Corrigé du partiel du 8 novembre 2018 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce partiel est noté sur **30**. Le barème donné est indicatif ; les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. — (**12 pts**) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^6 + x^2 + 2y^2 - 2y(x + x^3)$.
1) (**4 pts**) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x, y), on exprimera y comme un polynôme en x puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

Solution. — Étant un polynôme, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ donc ses dérivées partielles (de tout ordre) existent. On a $\partial_x f(x,y) = 6x^5 + 2x - 2y(1 + 3x^2)$ et $\partial_y f = 4y - 2(x + x^3)$. Pour un point critique $p = (x, y)$ on a donc $2y = x + x^3$ et

$$0 = 6x^5 + 2x - (x + x^3)(1 + 3x^2) = 6x^5 + x - 4x^3 - 3x^5 = x(3x^4 - 4x^2 + 1) = xP(x^2)$$

où $P(X) = 3X^2 - 4X + 1 = (X - 1)(3X - 1)$. Donc les points critiques sont donnés par $x = 0$ ou $x^2 = 1$ ou $x^2 = 1/3$ et $y = x(1 + x^2)/2$, donc ce sont

$$p_0 = (0,0), \quad p_1 = (1,1) \quad p_2 = (-1,-1), \quad p_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big) \quad p_4 = \Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\Big).$$

□

2) (**3 pts**) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point (x, y).

Solution. — On a $\partial^2_{xx} f = 30x^4 + 2 - 12xy$, $\partial^2_{yy} = 4$ et $\partial^2_{xy} = -2 - 6x^2 = \partial^2_{yx}$. (La 2ème égalité peut être prouvée soit par calcul direct, soit en invoquant le thm. de Schwarz.) La matrice hessienne est donc

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 30x^4 + 2 - 12xy & -2 - 6x^2 \\ -2 - 6x^2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

3) (**5 pts**) Pour chaque point critique p, déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local ou un point-selle. (Pour certains points critiques, il sera commode d'exprimer xy en fonction de x^2.)

Solution. — Pour p_0 on a $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant est $8 - 4 = 4 > 0$ et la trace est $6 > 0$, donc les deux valeurs propres sont > 0 donc il s'agit d'un minimum local.

Pour p_1 et p_2 on a $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant est $80 - 64 = 16 > 0$ et la trace est $24 > 0$, donc les deux valeurs propres sont > 0 donc il s'agit d'un minimum local.

Pour p_3 et p_4, il est commode d'observer que $12xy = 6x^2(1 + x^2) = 6(1/3)(4/3) = 8/3$. Alors on a

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 30/9 + 2 - 8/3 & -2 - 2 \\ -2 - 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est $(32 - 48)/3 = -16/3 < 0$ donc les deux valeurs propres sont de signes opposés donc il s'agit d'un point selle. □

Exercice 2. — (**12 pts**) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On note $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) (**1 pt**) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Pour la présentation, utiliser la formule $(g/h)' = g'/h - gh'/h^2$ et ne pas réduire au même dénominateur.

Solution. — Pour tout $(x,y) \in U$ on a $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2}$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy+y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2+2xy}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x+y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

□

2) (**1,5 pt**) Est-ce que f est de classe C^1 sur U ? Justifier votre réponse.

Solution. — Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U donc f est de classe C^1 sur U. □

3) (**1,5 pt**) Pour tout vecteur non nul $v = (a,b)$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Solution. — Posons $p = (0,0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a $p + tv = (ta, tb)$ et donc

$$\frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^3ab(a+b)}{t^2(a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe et vaut $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$ (qui, au passage, est $f(a,b)$.) □

4) (**2 pts**) Si f était différentiable au point $(0,0)$, que serait sa différentielle $L = Df(0,0)$? Justifier votre réponse.

Solution. — D'après la question précédente appliqué au vecteur $e_1 = (1,0)$ puis au vecteur $e_2 = (0,1)$, on a

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 0.$$

Donc, si f était différentiable au point $(0,0)$, de différentielle $L = Df(0,0)$, alors L serait l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par la matrice ligne $(\alpha, \beta) = (0,0)$, i.e. ce serait l'application linéaire nulle $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. □

5) (**3 pts**) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Solution. — Si f était différentiable en $p = (0,0)$ alors pour tout vecteur $v = (a,b)$ on aurait $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = L(v) = 0$. Or, pour $v = (a,b)$ non nul, on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

et ceci est non nul en général. Par exemple pour $a = 1 = b$, ceci vaut 1. □

6) (**3 pts**) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Solution. — Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ donc $|xy| \leq x^2+y^2$. Donc pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Il en résulte que f est continue en $(0,0)$. □

Exercice 3. — (**12 pts**) On rappelle que si C est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, sa borne inférieure, notée $\inf C$, est caractérisée par la propriété suivante : si l'on pose $\alpha = \inf C$, on a d'une part $\alpha \leq c$ pour tout $c \in C$ et, d'autre part, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $c \in C$ tel que $c < \alpha + \varepsilon$.

1) (**3 pts**) Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x,B) = \inf\{d(x,b) \mid b \in B\}$. Montrer que $d(x,B) = 0$ si et seulement si x appartient à l'adhérence $\overline{B}$ de B.

Solution. — Supposons $x \in \overline{B}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ contient au moins un point de B donc $d(x,B) < \varepsilon$. Par conséquent on a $d(x,B) = 0$.

Réciproquement, supposons $d(x,B) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément b_ε de B qui vérifie $d(x,b_\varepsilon) < \varepsilon$, i.e. qui appartient à $B(x,\varepsilon)$. Ceci montre que x appartient à $\overline{B}$: en effet tout ouvert U contenant x contient une boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$, donc rencontre B. □

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux ouverts U_1 et U_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que $A_1 = A \cap U_1$ et $A_2 = A \cap U_2$ soient non vides et disjoints.

2) (**4 pts**) Pour tout $x \in A_1$, montrer que $r(x) = d(x,A_2)$ est strictement positif.

Solution. — Soit $x \in A_1$. Alors x appartient à U_1, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ne rencontrant pas A_2. Par conséquent, x n'appartient pas à $\overline{A}_2$. Donc d'après la question précédente, appliquée à $B = A_2$, on a $r(x) = d(x,A_2) > 0$. □

De façon analogue, pour tout $y \in A_2$, le réel $r'(y) = d(y,A_1)$ est strictement positif. On note V_1 (resp. V_2) la réunion des boules ouvertes $B(x,r(x)/2)$ pour $x \in A_1$ (resp. $B(y,r'(y)/2)$ pour $y \in A_2$).

3) (**1,5 pt**) Montrer que V_1 (resp. V_2) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Solution. — Toute réunion d'ouverts est un ouvert. Par conséquent V_1 est un ouvert, de même que V_2. □

4) (**3,5 pts**) Montrer que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Indication : supposer que $V_1 \cap V_2$ contient un point z et montrer qu'il existe $x \in A_1$ et $y \in A_2$ tels que $d(x,y) < \max(r(x), r'(y))$.

Solution. — Supposons que $V_1 \cap V_2$ contienne un point z. Alors z appartient à la réunion des $B(x,r(x)/2)$ (et à celle des $B(y,r'(y)/2)$), donc il existe $x \in A_1$ et $y \in A_2$ tels que $d(x,z) < r(x)/2$ et $d(y,z) < r'(y)/2$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r(x)+r'(y)}{2} \leq \max(r(x), r'(y)).$$

De plus, comme $y \in A_2$ on a $r(x) \leq d(x,y)$ et comme $x \in A_1$ on a $r'(y) \leq d(x,y)$. Par conséquent, le terme de droite est $\leq d(x,y)$ et l'on obtient donc $d(x,y) < d(x,y)$, d'où une contradiction. Cette contradiction montre que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. [1] □

1. Cet exercice est dû à Maxime Zavidovique, merci à lui !