Examen 2ème session du 15 juin 2016 (UE 2M216 printemps)

(durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. L'examen est noté sur **100**.

Exercice 1. — (environ 18 pts) On pose $f(x,y) = x^6 + x^2 + 2y^2 - 2y(x^3 + x)$.

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2.

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x,y), on exprimera y en fonction de x puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

(4) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f. (Pour certains points critiques, il sera commode d'exprimer xy en fonction de x^2.)

Exercice 2. — (environ 28 pts) Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ une application continue.

(1) Écrire la formule de changement de variables (reliant $\int \cdots \int_V f(y)dy$ à une intégrale sur U), **en expliquant de façon précise** ce que sont les termes qui y figurent.

Dans la suite de l'exercice, on prend $n = 3$ et l'on note (x,y,z) les coordonnées (au lieu de (x_1, x_2, x_3)).

(2) Soient $\mathscr{B}$ un compact quarrable du plan horizontal d'équation $z = 0$ et α son aire, i.e. $\alpha = \iint_{\mathscr{B}} dx\,dy$. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $c \neq 0$ et soit $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points $B + tu$, avec $B \in \mathscr{B}$ et $t \in [0,1]$. Montrer que $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{B} \times [0,1]$ par une application linéaire bijective $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Puis, en utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume de $\mathscr{C}$.

(3) On suppose que $\mathscr{B} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $u = (0,1,2)$. Pouvez-vous faire un dessin représentant $\mathscr{C}$? Quel est le volume de $\mathscr{C}$?

(4) Introduire les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, **en faisant un dessin** pour expliquer à quoi correspondent les angles introduits. Puis, fixant un réel $R > 0$, utiliser la formule de changement de variables et le théorème de Fubini pour calculer le volume de la boule euclidienne $\overline{B}(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

(5) Soient $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Montrez que $\mathscr{E}$ est l'image de $\overline{B}(1)$ par une application linéaire bijective ϕ que l'on précisera. En utilisant la formule de changement de variables, déterminer le volume de l'ellipsoïde $\mathscr{E}$.

Exercice 3. — (environ 26 pts) Soit $\mathscr{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq h\}$, où h est un réel > 1.

(1) Faire soigneusement un dessin représentant $\mathscr{P}$.

(2) $\mathscr{P}$ est-il convexe ? Justifiez précisément votre réponse.

(3) Déterminer l'aire α de $\mathscr{P}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$. On rappelle que le centre d'inertie G de $\mathscr{P}$ est le point de $\mathbb{R}^2$ défini par une certaine égalité vectorielle, ou par les égalités correspondantes pour ses coordonnées x_G et y_G.

(4) Rappeler la définition évoquée plus haut, puis déterminer (x_G, y_G).

(5) Montrer que G appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $h \geq h_0$, pour un certain h_0 que l'on déterminera.

(6) Donner une valeur approchée de $(h_0 - 1)^2$ et montrer que $h_0 < 3/2$. [(1)]

Exercice 4. — (environ 32 pts) Soit V (resp. U) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) et soient $f : V \to U$ et $g : U \to \mathbb{R}^q$ des applications différentiables.

(1) Pour tout $a \in V$, que vaut la différentielle de $g \circ f$ en a ?

(2) On suppose que $n = 1$ et V est un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, que vaut le vecteur dérivé $(g \circ f)'(t)$?

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ une application de classe C^1. On rappelle qu'une *forme différentielle* ω continue sur U est une application continue de U dans l'espace dual $(\mathbb{R}^2)^* = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = M_{1,2}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\omega : U \to M_{1,2}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \omega(x, y) = \Big(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)\Big).$$

Dans ce cas, pour tout $t \in I$ on peut appliquer la forme linéaire $\omega(\gamma(t))$ au vecteur $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$ ce qui donne le réel

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \omega_2(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Pour $a < b$ dans I, on pose alors $\int_{\gamma([a,b])} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt$.

(3) On suppose que $\omega = dF$ pour une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (i.e. $\omega(x, y) = dF(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U$). Montrer alors que $\int_{\gamma([a,b])} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Dans la suite de l'exercice, on prend $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Soit ω la forme différentielle sur U définie pour tout $(x, y) \in U$ par $\omega(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma_R(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$.

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer $\gamma_R'(t)$ puis $\omega(\gamma_R(t))(\gamma_R'(t))$.

(5) Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, calculer $\int_{\gamma_R([a,b])} \omega$. Déterminer, en justifiant votre réponse, s'il existe une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\omega = dF$.

(6) Pour tout $(x, y) \in U$ on pose $f(x, y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Pour tout point $M = (x, y)$ de U, exprimer le gradient $\nabla f(M)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (où $O = (0, 0)$).

---

(1) Ceci est mieux que la valeur $1 + \sqrt{2}$ donnée lors de l'examen.