Examen du 31 mai 2016 (UE 2M216 printemps) (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les cinq exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. L'examen est noté sur **100**.

Exercice 1. — (environ 18 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + 4x^2 + 2y^2 - 2y(x^2 + 2x) + 1.$$

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f.

(3) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

***Exercice 2* (Questions de cours).** — (environ 30 pts) Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ une application continue.

(1) Écrire la formule de changement de variables (reliant $\int \cdots \int_V f(y)dy$ à une intégrale sur U), en introduisant clairement les termes qui y figurent.

Dans la suite de cet exercice, on prend $n = 3$.

(2) Introduire les coordonnées cylindriques et calculer le déterminant jacobien correspondant.

(3) Soient $R, h \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume du cylindre $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}$.

(4) Introduire les coordonnées sphériques (ne pas hésiter à faire un dessin !), puis calculer le déterminant jacobien correspondant.

(5) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume de la boule euclidienne $\overline{B}(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Exercice 3. — (environ 14 pts) Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{P} = \mathscr{R} \cup \mathscr{D}$, où $\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -c \leq x \leq 0,\ -c \leq y \leq c\}$ et $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq c^2,\ x \geq 0\}$.

(1) Faire soigneusement un dessin représentant $\mathscr{P}$.

(2) Déterminer, en détaillant le calcul, l'aire A de $\mathscr{P}$.

(3) On considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$ et l'on note G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) de G.

***Exercice 4* (Théorème de Guldin).** — (environ 12 pts) Dans le plan Oxz de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{P}$ une plaque quarrable située dans le demi-plan donné par $x \geq 0$. Soit $\mathscr{V}$ le solide de révolution obtenu en faisant tourner $\mathscr{P}$ autour de l'axe Oz, i.e. $\mathscr{V}$ est l'ensembles des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(r, 0, z) \in \mathscr{P}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$ et l'on note $G = (a, 0, c)$ son centre d'inertie. On note A l'aire de $\mathscr{P}$.

(1) En utilisant des coordonnées cylindriques et le théorème de Fubini, démontrer que $\mathrm{vol}(\mathscr{V}) = 2\pi A a$.

(2) Soit $R > 0$, on prend $\mathscr{P} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq R^2,\ x \geq 0\}$; dans ce cas $\mathscr{V}$ est la boule fermée $\overline{B}$ de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R. En utilisant la formule connue pour $\mathrm{vol}(\overline{B})$ (cf. exercice 2), en déduire la première coordonnée a du centre d'inertie G de $\mathscr{P}$.

T.S.V.P. →

Exercice 5. — (environ 30 pts) On rappelle que $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \,]-\pi/2, \pi/2[$ est dérivable et $\mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{Arctan}(y/x)$.

(1) Calculer les dérivées partielles de f et, en citant un résultat du cours, montrer que f est de classe C^1 sur U.

Pour tout $(x,y) \in U$ on note $\nabla f(x,y)$ le gradient de f en (x,y). D'autre part, on pose $V = \{(x,y) \in U \mid x^2 + y^2 > 1\}$.

(2) Pour tout $(x,y) \in V$, montrer que $\|\nabla f(x,y)\|_2 < 1$ (où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

Soient $A = (\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2})$ et $B = (\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{-\lambda\sqrt{3}}{2})$, où λ est un réel tel que $1 < \lambda < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(3) Faire un dessin représentant approximativement V et les points A, B.

(4) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$ puis montrer que $f(A) - f(B) > \|\overrightarrow{AB}\|_2$.

(5) L'ouvert V est-il convexe ? Justifier votre réponse.

(6) Cet exercice montre que dans un théorème vu en cours on ne peut omettre une certaine hypothèse. Pouvez-vous dire quels sont le théorème et l'hypothèse en question ?