Partiel du 23 novembre 2017 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce partiel est noté sur **25**. Le barème donné (sur 31) est indicatif ; les notes > 25 seront comptées comme 25.

Les correcteurs tiendront compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments et calculs demandés. En particulier, des réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. — (8 pts) On pose $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{3/2}\, y}{(x^2+y^2)^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On note $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) (2 pts) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Pour la présentation, utiliser la formule $(g/h)' = g'/h - gh'/h^2$ et ne pas réduire au même dénominateur.

Solution. — Pour tout $(x,y) \in U$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3(x^2+y^2)^{1/2}xy}{(x^2+y^2)^2+y^2} - \frac{4(x^2+y^2)^{3/2}yx(x^2+y^2)}{\big((x^2+y^2)^2+y^2\big)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3(x^2+y^2)^{1/2}y^2+(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2} - \frac{(x^2+y^2)^{3/2}y\big(4(x^2+y^2)y+2y\big)}{\big((x^2+y^2)^2+y^2\big)^2}.$$

□

2) (0,5 pt) Est-ce que f est de classe C^1 sur U ? Justifier votre réponse.

Solution. — Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U donc f est de classe C^1 sur U. □

3) (0,5 pt) Pour tout vecteur $v = (a,0)$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Solution. — La fonction $t \mapsto f(tv) = f(ta,0) = 0$ est identiquement nulle, donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ dans ce cas. □

4) (1 pt) Pour tout vecteur $v = (a,b)$ avec $b \neq 0$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Solution. — Soit $v = (a,b)$, avec $b \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \frac{|t|^3(a^2+b^2)^{3/2}tb}{t^3\big(b^2+t^2(a^2+b^2)^2\big)} = \frac{|t|\,(a^2+b^2)^{3/2}b}{b^2+t^2(a^2+b^2)^2}.$$

Lorsque t tend vers 0, le dénominateur tend vers $b^2 \neq 0$, tandis que le numérateur tend vers 0. Par conséquent, on a $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$. □

5) (1 pt) Si f était différentiable au point $(0,0)$, que serait sa différentielle $L = Df(0,0)$?

Solution. — Si f était différentiable au point $(0,0)$, de différentielle $L = Df(0,0)$, alors pour tout vecteur v on aurait $L(v) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ donc L serait l'application linéaire nulle. $\square$

6) (1 pt) Déterminer $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f(t,t^2)}{t}$.

Solution. — Pour $t > 0$ on a :

$$\frac{f(t,t^2)}{t} = \frac{t^5(1+t^2)^{3/2}}{t^5\big((1+t^2)^2+1\big)} = \frac{(1+t^2)^{3/2}}{(1+t^2)^2+1}$$

et lorsque t tend vers 0^+ ceci tend vers $1/2$. $\square$

7) (2 pts) Si f était différentiable en $(0,0)$, quelle serait la dérivée en 0 de l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t,t^2)$? Est-ce que f est différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Solution. — L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,t^2)$ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u'(t) = (1,2t)$. On a $h = f \circ u$ et $u(0) = (0,0)$ donc si f était différentiable en 0, alors h serait dérivable en 0, de dérivée $h'(0) = Df(0,0)(v)$, où $v = u'(0) = (1,0)$. Or on a vu que si $Df(0,0)$ existe elle est nulle, donc on aurait $h'(0) = 0$. Ceci contredit le résultat de la question précédente : $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 1/2$. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

On peut aussi procéder comme suit. Posant $u_1(t) = t$ et $u_2(t) = t^2$, on a $u_1'(t) = 1$ et $u_2'(t) = 2t$. Si f était différentiable en $(0,0)$ alors $h = f \circ u$ serait dérivable en 0 et l'on aurait :

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)u_2'(0) = 0.$$

Ceci contredit le résultat de la question précédente : $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 1/2$. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Remarque. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(*) \qquad |f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

En effet, c'est vrai pour $(x,y) = (0,0)$ et sinon, posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, l'inégalité $(*)$ est équivalente à $2r^2|y| \leq r^4 + y^2$, qui est bien vérifiée car $r^4 + y^2 - 2r^2|y| = \big(r^2 - |y|\big)^2 \geq 0$. Il résulte de $(*)$ que f est continue en $(0,0)$.

Par conséquent, cet exercice donne l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, est continue en $(0,0)$ et y admet selon tout vecteur v une dérivée partielle égale à 0, mais qui n'est pas différentiable en $(0,0)$. $\square$

Exercice 2. — (8,5 pts + 1 pt bonus) Soient $R, h \in \mathbb{R}_+^\times$ et $\varphi \in \,]0, 2\pi[$ et soit

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \varphi\}.$$

1) (0,5 pt) Faire un dessin représentant D lorsque $\varphi = 2\pi/3$.

Solution. — D est la partie du disque de centre $O = (0,0)$ et de rayon R, délimitée par les demi-droites $[OP)$ et $[OQ)$, où $P = (1,0)$ et $Q = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. $\square$

2) (3 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer l'aire α de D puis les intégrales

$$x_A = \frac{1}{\alpha}\iint_D x\,dxdy \qquad \text{et} \qquad y_A = \frac{1}{\alpha}\iint_D y\,dxdy.$$

Le point $A = (x_A, y_A)$ est appelé le *centre d'inertie* de D.

Solution. — L'application qui définit les coordonnées polaires :

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; elle envoie le rectangle fermé $\mathcal{R} = [0,R] \times [0,\varphi]$ sur D. De plus, la restriction de ϕ au rectangle ouvert $U = \mathring{\mathcal{R}}$ est une bijection de U sur l'intérieur de D et pour tout $(r,\theta) \in U$ on a $\det D\phi(r,\theta) = r \neq 0$ donc ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur son image, d'après le théorème d'inversion locale (cf. 8.2 du polycopié) ou par l'étude directe de la bijection réciproque (cf. 8.4 du polycopié). On peut donc appliquer la formule de changement de variables (cf. 18.7 du polycopié) et l'on a :

$$\alpha = \iint_D dxdy = \iint_{\mathcal{R}} |\det D\phi(r,\theta)|\, drd\theta == \int_0^{\varphi} \left(\int_0^R r\, dr \right) d\theta = \varphi \frac{R^2}{2}$$

puis

$$\alpha\, x_A = \iint_D x\, dxdy = \iint_{\mathcal{R}} r\cos(\theta) |\det D\phi(r,\theta)|\, drd\theta = \int_0^{\varphi} \left(\int_0^R \cos(\theta) r^2\, dr \right) d\theta$$
$$= \sin(\varphi) \frac{R^3}{3},$$

$$\alpha\, y_A = \iint_D y\, dxdy = \iint_{\mathcal{R}} r\sin(\theta) |\det D\phi(r,\theta)|\, drd\theta = \int_0^{\varphi} \left(\int_0^R \sin(\theta) r^2\, dr \right) d\theta$$
$$= \big(1 - \cos(\varphi)\big) \frac{R^3}{3}.$$

On a donc $x_A = \dfrac{2R}{3} \dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi}$ et $y_A = \dfrac{2R}{3} \dfrac{1-\cos(\varphi)}{\varphi}$. □

3) (bonus 1pt) Déterminer la limite de x_A et y_A lorsque φ tend vers 0^+.

Solution. — Lorsque φ tend vers 0, $\dfrac{\sin(\varphi)}{\varphi}$ tend vers 1 et donc x_A tend vers $\dfrac{2R}{3}$, et $\dfrac{1-\cos(\varphi)}{\varphi}$ et y_A tendent vers 0. □

On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$. Soient I le point $(0,0,h)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ le cône de base D et de sommet I, i.e. $\mathcal{C}$ est la réunion, pour $p = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ variant dans D, des segments

$$[p, I] = \{tp + (1-t)I = (tr\cos\theta, tr\sin\theta, (1-t)h) \mid t \in [0,1]\}$$

i.e. $\mathcal{C}$ est l'image du pavé fermé $\mathcal{P} = [0,R] \times [0,\varphi] \times [0,1]$ par l'application

$$\Psi : (r,\theta,t) \mapsto \big(x(r,\theta,t), y(r,\theta,t), z(r,\theta,t)\big) = (tr\cos\theta, tr\sin\theta, (1-t)h).$$

4) (1 pt) Écrire la matrice jacobienne $D\Psi(r,\theta,t)$ et calculer son déterminant.

Solution. — L'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est de classe C^1 ; en tout point (r,θ,t) sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} t\cos\theta & -tr\sin\theta & r\cos\theta \\ t\sin\theta & tr\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $-hrt^2$. Donc la valeur absolue du déterminant jacobien est hrt^2. □

5) (4 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer le volume V de $\mathcal{C}$ puis les intégrales

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} z\,dxdydz.$$

Le point $G = (x_G, y_G, z_G)$ est appelé le *centre d'inertie* de $\mathcal{C}$.

Solution. — Pour $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ donné, t est déterminé par $1 - t = z/h$, et si $t \neq 0$ alors r et θ sont uniquement déterminés par les égalités

$$r\cos\theta = \frac{x}{t}, \qquad r\sin\theta = \frac{y}{t},$$

donc la restriction de Ψ au pavé ouvert $\mathcal{U} = \mathring{\mathcal{P}}$ est une bijection de $\mathcal{U}$ sur l'intérieur de $\mathcal{C}$; de plus pour tout $(r, \theta, t) \in \mathcal{U}$ on a $\det D\Psi(r, \theta, t) = hrt^2 \neq 0$ donc Ψ est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. On peut donc appliquer la formule de changement de variables et l'on a :

$$V = \iiint_{\mathcal{C}} dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\varphi \left(\int_0^R hrt^2\,dr\right) d\theta\right) dt = \frac{R^2}{2}\varphi\frac{h}{3}$$

puis

$$Vx_G = \iiint_{\mathcal{C}} x\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\varphi \left(\int_0^R hr^2\cos(\theta)t^3\,dr\right) d\theta\right) dt = \frac{R^3}{3}\sin(\varphi)\frac{h}{4}$$

$$Vy_G = \iiint_{\mathcal{C}} y\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\varphi \left(\int_0^R hr^2\sin(\theta)t^3\,dr\right) d\theta\right) dt = \frac{R^3}{3}(1-\cos(\varphi))\frac{h}{4}$$

et

$$Vz_G = \iiint_{\mathcal{C}} z\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^\varphi \left(\int_0^R h^2r(t^2 - t^3)\,dr\right) d\theta\right) dt = \frac{R^2}{2}\varphi\frac{h}{12}$$

On a donc

$$x_G = \frac{R}{2}\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} = \frac{3x_A}{4}, \qquad y_G = \frac{R}{2}\frac{1-\cos(\varphi)}{\varphi} = \frac{3y_A}{4}; \qquad z_G = \frac{h}{4}$$

i.e. $G = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AI}$ est le point du segment $[A, I]$ situé au quart de ce segment en partant de A. □

Exercice 3. — (9,5 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Un point a de A est dit *intérieur* à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit contenue dans A. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

1) (2 pts) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$, puis que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A.

Solution. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A ; alors pour tout $a \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset U$, d'où $B(a, r) \subset A$ et donc $a \in \mathring{A}$. Ceci montre que $U \subset \mathring{A}$.

Réciproquement, la réunion U des boules ouvertes contenues dans A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A et contenant $\mathring{A}$ (d'après la définition de $\mathring{A}$) ; on a donc $U = \mathring{A}$. Ceci montre que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A. □

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on dit que f admet en a un *maximum* (resp. *minimum*) *local* s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait $f(a) \geq f(x)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

2) (0,5 pt) Si f admet en a un maximum (ou minimum) local, que peut-on dire de la différentielle $Df(a)$?

Solution. — D'après le cours, si f admet en a un maximum (ou minimum) local alors a est un point critique de f, i.e. $Df(a) = 0$. $\square$

On prend $n = 2$ et l'on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + x^2 - y^2$.

3) (1,5 pts) Déterminer les points critiques de f. Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne $Hf(p)$ et déterminer si p est ou non un maximum ou minimum local de f.

Solution. — On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2y$ donc l'unique point critique de f est $p = (-1/2, 0)$. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

donc la matrice hessienne de f en tout point est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, p est un point selle. $\square$

4) (1,5 pts) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet sur A un maximum M et un minimum m. On ne cherchera pas à déterminer M et m.

Solution. — A est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, donc compacte. Par conséquent, la fonction continue f admet sur A un maximum M et un minimum m. $\square$

5) (2 pts) Soit $(x_0, y_0) \in A$. Montrer que si $f(x_0, y_0) = M$ ou $f(x_0, y_0) = m$, alors $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Solution. — Soit $q = (x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x,y) = M$ (resp. $= m$). Supposons que q appartiennent au disque ouvert $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset D \subset A$ et, comme $f(x_0, y_0) = M$ (resp. $= m$), on aurait $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ (resp. $\leq f(x,y)$) pour tout $(x,y) \in B(a,r)$ donc q serait un maximum (resp. minimum) local de f, donc en particulier un point critique. Or on a vu que l'unique point critique p est un point selle, et non un maximum ou minimum local. Cette contradiction montre que q n'appartient pas à D, donc on a $x_0^2 + y_0^2 = 1$. $\square$

6) (2 pts) Étudier la fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2x^2 - 1$. En déduire les valeurs de M et m et les points (x,y) de A en lesquels f prend la valeur M ou m.

Solution. — On a $g'(x) = 1 + 4x$, donc g' s'annule en $\alpha = -1/4$ et est < 0 sur $[-1, \alpha[$ et > 0 sur $]\alpha, 1]$. Par conséquent g est strictement décroissante sur $[-1, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$. On a $g(\alpha) = -9/8$, $g(-1) = 0$ et $g(1) = 2$. Donc g atteint son minimum $-9/8$ en $x = -1/4$ et son maximum 2 en $x = 1$ Par conséquent, f atteint sur A son minimum $-9/8$ en les points $(-1/4, \pm\sqrt{15}/4)$ et son maximum 2 en le point $(1, 0)$. $\square$

Exercice 4. — (5 pts) Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^p$ une application continue. On pose $B = f(A)$ et l'on dit que f est un *homéomorphisme* de A sur B si f est bijective et si l'application inverse $g = f^{-1} : B \to A$ est continue.

1) (2 pts) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme.

Solution. — f est polynomiale donc de classe C^∞, a fortiori continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$ et ceci est > 0 si $x \neq 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. D'autre part, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

L'application réciproque $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue, d'après le résultat général suivant.

Théorème. — *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point, et $f : I \to J$ une application continue et strictement croissante (resp. décroissante). Alors l'application réciproque $g : J \to I$ est continue et strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration. — Faisons-la lorsque f est strictement croissante (le cas strictement décroissant étant analogue). Soient $y < y'$ dans J ; posons $x = g(y)$ et $x' = g(y')$. Comme g est bijective on a $x \neq x'$; on ne peut pas avoir $x' < x$ car sinon, f étant strictement croissante, on aurait $y' = f(x') < f(x) = y$, une contradiction. On a donc $x < x'$: ceci prouve que g est strictement croissante. Montrons que g est continue.

Soit $y \in J$ et $x = g(y)$. Supposons d'abord que x soit un point intérieur à I. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[\subset I$. Comme f est strictement croissante, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a :

$$g^{-1}(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) = f(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) =]f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon)[$$

et ceci est un intervalle ouvert contenant $f(x) = y$. Ceci montre que g est continue en y.

Le raisonnement est analogue si x est une extrémité de I : par exemple si $I = [a, b[$ alors $J = [f(a), f(b)[$; si $x = a$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $[a, a+\varepsilon_0[\subset I$. Alors, comme f est strictement croissante, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a :

$$g^{-1}([a, a + \varepsilon[) = f([a, a + \varepsilon[) = [f(a), f(a + \varepsilon)[$$

et ceci montre que g est continue en $y = f(a)$. □

Remarque 1. Le résultat n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle. Par exemple, l'application $f : [0, 1] \cup]2, 3] \to [0, 2]$ définie par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = x - 1$ si $x \in]2, 3]$ est continue et bijective, mais l'application réciproque n'est pas continue au point 1.

Remarque 2. Noter que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $g'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pour tout $x \neq 0$, mais g n'est pas dérivable en 0 car on a $f'(x) = 0$, cf. la question 3). □

2) (1 pt) Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. L'application $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est continue et bijective. (On ne demande pas de le vérifier). Est-ce un homéomorphisme ? Justifier votre réponse.

Solution. — $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ est bien continue car ses composantes $f_1(t) = \cos(t)$ et $f_2(t) = \sin(t)$ le sont. L'application réciproque g n'est pas continue car $g(1) = 0$ mais pour tout disque ouvert $B(1, r)$, l'image par g de $S^1 \cap B(1, r)$ contient des points arbitrairement proches de 2π. □

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ une application de classe C^1. On dit que f est un C^1-*difféomorphisme* de U sur V si f est bijective et si l'application inverse $g = f^{-1} : V \to U$ est de classe C^1.

3) (2 pts) On suppose que $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme. Montrer que pour tout $a \in U$, la différentielle $Df(a)$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution. — Par définition, on a $g \circ f = \mathrm{id}_U$ (l'application identique de U) et de même $f \circ g = \mathrm{id}_V$. Donc, notant I_n l'application identique de $\mathbb{R}^n$, la formule pour la différentielle d'une composée donne, pour tout $a \in U$:

$$Dg(f(a)) \circ Df(a) = D(\mathrm{id}_U)(a) = I_n \qquad \text{et} \qquad Df(a) \circ Dg(f(a)) = D(\mathrm{id}_V)(f(a)) = I_n.$$

Ceci prouve que $Df(a)$ est inversible, d'inverse $Dg(f(a))$.

Remarque. Comme, pour une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) u est injective

b) u est bijjective

c) u est surjective

alors l'égalité $Dg(f(a)) \circ Df(a) = I_n$ suffit déjà à entraîner que $Df(a)$ est inversible, d'inverse $Dg(f(a))$. Question de cours de L1 ou 2M270 : démontrez l'équivalence des trois propriétés.

$\square$