Partiel du 23 novembre 2017 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce partiel est noté sur **25**. Le barème donné (sur 31) est indicatif ; les notes > 25 seront comptées comme 25.

Les correcteurs tiendront compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments et calculs demandés. En particulier, des réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. — (8 pts) On pose $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^{3/2}\, y}{(x^2+y^2)^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$. On note $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) (2 pts) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Pour la présentation, utiliser la formule $(g/h)' = g'/h - gh'/h^2$ et ne pas réduire au même dénominateur.

2) (0,5 pt) Est-ce que f est de classe C^1 sur U ? Justifier votre réponse.

3) (0,5 pt) Pour tout vecteur $v = (a,0)$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

4) (1 pt) Pour tout vecteur $v = (a,b)$ avec $b \neq 0$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

5) (1 pt) Si f était différentiable au point $(0,0)$, que serait sa différentielle $L = Df(0,0)$?

6) (1 pt) Déterminer $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f(t,t^2)}{t}$.

7) (2 pts) Si f était différentiable en $(0,0)$, quelle serait la dérivée en 0 de l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t,t^2)$? Est-ce que f est différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

Exercice 2. — (8,5 pts + 1 pt bonus) Soient $R, h \in \mathbb{R}_+^\times$ et $\varphi \in \,]0, 2\pi[$ et soit

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le \varphi\}.$$

1) (0,5 pt) Faire un dessin représentant D lorsque $\varphi = 2\pi/3$.

2) (3 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer l'aire α de D puis les intégrales

$$x_A = \frac{1}{\alpha}\iint_D x\,dxdy \qquad \text{et} \qquad y_A = \frac{1}{\alpha}\iint_D y\,dxdy.$$

Le point $A = (x_A, y_A)$ est appelé le *centre d'inertie* de D.

3) (bonus 1pt) Déterminer la limite de x_A et y_A lorsque φ tend vers 0^+.

On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=0$. Soient I le point $(0,0,h)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ le cône de base D et de sommet I, i.e. $\mathcal{C}$ est la réunion, pour $p = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ variant dans D, des segments

$$[p, I] = \{tp + (1-t)I = (tr\cos\theta, tr\sin\theta, (1-t)h) \mid t \in [0,1]\}$$

i.e. $\mathcal{C}$ est l'image du pavé fermé $\mathcal{P} = [0,R] \times [0,\varphi] \times [0,1]$ par l'application

$$\Psi : (r,\theta,t) \mapsto \big(x(r,\theta,t), y(r,\theta,t), z(r,\theta,t)\big) = (tr\cos\theta, tr\sin\theta, (1-t)h).$$

4) (1 pt) Écrire la matrice jacobienne $D\Psi(r,\theta,t)$ et calculer son déterminant.

5) (4 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer le volume V de $\mathcal{C}$ puis les intégrales

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} z\,dxdydz.$$

Le point $G = (x_G, y_G, z_G)$ est appelé le *centre d'inertie* de $\mathcal{C}$.

Exercice 3. — (9,5 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Un point a de A est dit *intérieur* à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a,r)$ soit contenue dans A. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

1) (2 pts) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$, puis que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A.

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on dit que f admet en a un *maximum* (resp. *minimum*) *local* s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a,r)$ on ait $f(a) \geq f(x)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

2) (0,5 pt) Si f admet en a un maximum (ou minimum) local, que peut-on dire de la différentielle $Df(a)$?

On prend $n = 2$ et l'on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + x^2 - y^2$.

3) (1,5 pts) Déterminer les points critiques de f. Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne $Hf(p)$ et déterminer si p est ou non un maximum ou minimum local de f.

4) (1,5 pts) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet sur A un maximum M et un minimum m. On ne cherchera pas à déterminer M et m.

5) (2 pts) Soit $(x_0, y_0) \in A$. Montrer que si $f(x_0, y_0) = M$ ou $f(x_0, y_0) = m$, alors $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

6) (2 pts) Étudier la fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2x^2 - 1$. En déduire les valeurs de M et m et les points (x,y) de A en lesquels f prend la valeur M ou m.

Exercice 4. — (5 pts) Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^p$ une application continue. On pose $B = f(A)$ et l'on dit que f est un *homéomorphisme* de A sur B si f est bijective et si l'application inverse $g = f^{-1} : B \to A$ est continue.

1) (2 pts) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme.

2) (1 pt) Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. L'application $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est continue et bijective. (On ne demande pas de le vérifier). Est-ce un homéomorphisme ? Justifier votre réponse.

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ une application de classe C^1. On dit que f est un C^1-*difféomorphisme* de U sur V si f est bijective et si l'application inverse $g = f^{-1} : V \to U$ est de classe C^1.

3) (2 pts) On suppose que $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme. Montrer que pour tout $a \in U$, la différentielle $Df(a)$ est inversible et déterminer son inverse.