Partiel du 8 novembre 2018 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce partiel est noté sur **30**. Le barème donné est indicatif ; les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. — (**12 pts**) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^6 + x^2 + 2y^2 - 2y(x + x^3)$.

1) (**4 pts**) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x,y), on exprimera y comme un polynôme en x puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

2) (**3 pts**) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point (x,y).

3) (**5 pts**) Pour chaque point critique p, déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local ou un point-selle. (Pour certains points critiques, il sera commode d'exprimer xy en fonction de x^2.)

Exercice 2. — (**12 pts**) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On note $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) (**1 pt**) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Pour la présentation, utiliser la formule $(g/h)' = g'/h - gh'/h^2$ et ne pas réduire au même dénominateur.

2) (**1,5 pt**) Est-ce que f est de classe C^1 sur U ? Justifier votre réponse.

3) (**1,5 pt**) Pour tout vecteur non nul $v = (a,b)$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

4) (**2 pts**) Si f était différentiable au point $(0,0)$, que serait sa différentielle $L = Df(0,0)$? Justifier votre réponse.

5) (**3 pts**) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

6) (**3 pts**) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Exercice 3. — (**12 pts**) On rappelle que si C est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, sa borne inférieure, notée $\inf C$, est caractérisée par la propriété suivante : si l'on pose $\alpha = \inf C$, on a d'une part $\alpha \leq c$ pour tout $c \in C$ et, d'autre part, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $c \in C$ tel que $c < \alpha + \varepsilon$.

1) (**3 pts**) Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x,B) = \inf\{d(x,b) \mid b \in B\}$. Montrer que $d(x,B) = 0$ si et seulement si x appartient à l'adhérence $\overline{B}$ de B.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux ouverts U_1 et U_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que $A_1 = A \cap U_1$ et $A_2 = A \cap U_2$ soient non vides et disjoints.

2) (**4 pts**) Pour tout $x \in A_1$, montrer que $r(x) = d(x, A_2)$ est strictement positif.

De façon analogue, pour tout $y \in A_2$, le réel $r'(y) = d(y, A_1)$ est strictement positif. On note V_1 (resp. V_2) la réunion des boules ouvertes $B(x, r(x)/2)$ pour $x \in A_1$ (resp. $B(y, r'(y)/2)$ pour $y \in A_2$).

3) (**1,5 pt**) Montrer que V_1 (resp. V_2) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4) (**3,5 pts**) Montrer que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Indication : supposer que $V_1 \cap V_2$ contient un point z et montrer qu'il existe $x \in A_1$ et $y \in A_2$ tels que $d(x,y) < \max(r(x), r'(y))$.