Examen du 19 janvier 2018 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants ; on pourra toujours admettre une question pour faire les suivantes. Cet examen est noté sur **50**. **Le sujet est volontairement long et le total des points est** > 60**.** Le barème donné (sur 61) est indicatif ; les notes > 50 seront comptées comme 50. Il sera tenu compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments et calculs demandés. En particulier, les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. — (22 pts) Tous les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels considérés sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite *lipschitzienne* s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1) (2 pts) Montrer que si f est lipschitzienne, elle est continue.

2) (2 pts) Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Montrer que u est lipschitzienne. *Indication : considérer la base canonique* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et poser* $C = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|$.

Soient maintenant U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ une application différentiable. Soit $a \in U$. On suppose que l'application linéaire $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective et l'on note $df(a)^{-1}$ son inverse. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r soit contenue dans U.

3) (2 pts) Montrer qu'il existe une application continue $\varepsilon : B(a, r) \to \mathbb{R}^n$, nulle en a, telle que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait :

$$x - a = df(a)^{-1}\big(f(x) - f(a)\big) - \|x - a\|\, df(a)^{-1}(\varepsilon(x)).$$

Indication : utiliser la définition de la différentiabilité de f *en* a *et appliquer* $df(a)^{-1}$.

4) (1 pt) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait :

$$\|x - a\| \leq C\,\|f(x) - f(a)\| + C\,\|x - a\|\,\|\varepsilon(x)\|.$$

5) (1 pt) Montrer qu'il existe $\delta \in \,]0, r]$ tel que pour tout $x \in B(a, \delta)$ on ait $C\,\|\varepsilon(x)\| < 1/2$.

6) (1 pt) Montrer que pour tout $x \in B(a, \delta)$ on a $\|x - a\| \leq 2C\,\|f(x) - f(a)\|$.

On suppose de plus que $f : U \to V$ est un *homéomorphisme*, i.e. qu'elle est bijective et que l'application réciproque $g = f^{-1} : V \to U$ est continue.

7) (2 pts) Montrer que $W = f(B(a, \delta))$ est un ouvert de V contenant $b = f(a)$.

8) (2 pts) Montrer qu'il existe une application continue $\eta : W \to \mathbb{R}^n$, nulle en b, telle que pour tout pour tout $y \in W$ on ait :

$$\|g(y) - g(b) - df(a)^{-1}(y - b)\| \leq 2C\,\|y - b\|\,\|\eta(y)\|.$$

En déduire que g est différentiable en b et déterminer $dg(b)$.

9) (Les questions a), b), c) sont indépendante de ce qui précède.) Soient $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\}$ et $V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}$ et soit $f : U \to V$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 x_2)$.

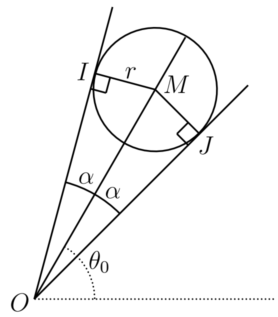
a) (2 pts) Montrer que f est différentiable et que $df(x_1, x_2)$ est inversible pour tout $(x_1, x_2) \in U$.

b) (3 pts) Montrer que f est une bijection de U sur V. *Indication :* x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2$. Quel est le discriminant Δ de ce polynôme ? Peut-on exprimer x_1 et x_2 en fonction de s et Δ ?

c) (2 pts) Soit $g : V \to U$ l'application réciproque de f. Montrer que g est continue.

d) (2 pts) Montrer que g est différentiable.

Exercice 2. — (16 pts) Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. On note O le point $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $M = (x, y) \neq O$ dans $\mathbb{R}^2$. On pose $R = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'on fixe θ_0 tel que $M = (R\cos(\theta_0), R\sin(\theta_0))$ (θ_0 est unique modulo 2π). Soit $r \in \,]0, R[$ et soit Γ le cercle de centre M et de rayon r. On rappelle qu'il existe exactement deux demi-droites issues de O tangentes à Γ, cf. la figure ci-dessous.



1) (2 pts) En s'appuyant sur cette figure, montrer qu'il existe un angle $\alpha \in \,]0, \pi/2[$ dont on précisera le sinus, tel que le disque ouvert D de centre M et de rayon r soit contenu dans l'image par ϕ du rectangle ouvert $]R - r, R + r[\times]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$.

2) (4 pts) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x, y)$ une application de classe C^1. On pose $f = g \circ \phi$, i.e. $f(r, \theta) = g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) g admet un maximum (resp. minimum) local en un point $M = (x, y) = \phi(R, \theta) \neq O$,

(ii) f admet un maximum (resp. minimum) local en (R, θ).

Indication : pour l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) utiliser la continuité de ϕ ; pour l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i), utiliser la question précédente.

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(r, \theta) = (r^2 - r)\sin(\theta)$.

a) (3 pts) Déterminer les dérivées partielles de f puis ses dérivées partielles secondes.

b) (4 points) Déterminer les points critiques de f ; pour chacun d'eux écrire la matrice hessienne et déterminer si le point est ou non un maximum ou minimum local de f.

c) (1 pt) Faire avec soin deux figures représentant le graphe des fonctions $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(r) = f(r, \pi/2)$ et $f_2(r) = f(r, -\pi/2)$.

4) (1 pt) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)y$. En utilisant les questions précédentes, déterminer les extrema locaux de g sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

5) (1 pt) Montrer de façon directe que $(0, 0)$ n'est ni un maximum ni un mimimum local de g.

Exercices 3 et 4 sur la page suivante

Notation. On écrira $\iint$, resp. $\iiint$, resp. $\int\cdots\int$ pour désigner une intégrale double, resp. triple, resp. à plus de 4 variables.

Exercice 3. — (13 pts) Soient $\mathcal{P}$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{P}$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \phi(u) = (\phi_1(u), \dots, \phi_n(u))$ une application de classe C^1. On pose $\mathcal{A} = \phi(\mathcal{P})$ et l'on suppose que la restriction de ϕ à l'intérieur de $\mathcal{P}$ est un C^1-difféomorphisme de l'intérieur de $\mathcal{P}$ sur l'intérieur de $\mathcal{A}$. On note α le volume de $\mathcal{A}$.

1) (2 pts) En utilisant la formule de changement de variables, exprimer α comme une certaine intégrale sur $\mathcal{P}$.

On identifie $\mathbb{R}^n$ au sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ formé des éléments dont la dernière coordonnée est nulle, on fixe un point $S = (c_1, \dots, c_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $c_{n+1} > 0$, et l'on considère le « cône » $\mathcal{C}$ de base $\mathcal{A}$ et de sommet S : c'est la réunion pour $a \in \mathcal{A}$ des segments $[S, a]$ i.e. $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{P} \times [0, 1]$ par l'application

$$\psi : \mathcal{P} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (u,t) \mapsto \big(t\phi_1(u) + (1-t)c_1, \dots, t\phi_n(u) + (1-t)c_n, (1-t)c_{n+1}\big).$$

2) (2 pts) Pour tout $(u, t) \in \mathcal{P} \times [0, 1]$, montrer que la matrice jacobienne $D\psi(u, t)$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t(\partial\phi_1/\partial u_1)(u) & \cdots & t(\partial\phi_1/\partial u_n)(u) & \phi_1(u) - c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t(\partial\phi_n/\partial u_1)(u) & \cdots & t(\partial\phi_n/\partial u_n)(u) & \phi_n(u) - c_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -c_{n+1} \end{array}\right)$$

3) (2 pts) Montrer que $\det D\psi(u, t) = -c_{n+1} t^n \det D\phi(u)$.

4) (3 pts) En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, exprimer le volume V de $\mathcal{C}$ en fonction de α et de c_{n+1}. (On rappelle que $c_{n+1} > 0$.)

5) (4 pts) On suppose que pour $i = 1, \dots, n$ on a : $\displaystyle\int\cdots\int_{\mathcal{A}} x_i \, dx_1 \cdots dx_n = 0$.

Soient $(g_1, \dots, g_{n+1})$ les coordonnées du centre d'inertie G de $\mathcal{C}$, données pour $i = 1, \dots, n+1$ par les formules

$$g_i = \frac{1}{V} \int\cdots\int_{\mathcal{C}} x_i \, dx_1 \cdots dx_{n+1}.$$

En utilisant la formule de changement de variables, la question (3) et le théorème de Fubini, exprimer chaque g_i en fonction de c_i.

Exercice 4. — (10 pts) Soit n un entier ≥ 2. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin de classe C^1 défini par

$$\gamma(t) = \big(n\cos(t) + \cos(nt), n\sin(t) - \sin(nt)\big).$$

1) (4 pts) Soit ω la forme différentielle $\dfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x, y)$ est la matrice ligne $\dfrac{1}{2}(-y, x)$. Calculer $I = \displaystyle\int_\gamma \omega$.

2) (2 pts) On admet que γ est le bord orienté d'un compact K. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire A de K.

3) (4 pts) Soit c la restriction de γ à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{2\pi}{n+1}\right]$, i.e. pour tout $t \in I$ on a $c(t) = \gamma(t)$. Calculer, en le justifiant, la longueur $L(c)$ de c. (On rappelle que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.)