CHAPITRE 4

INTÉGRALES MULTIPLES

[1] Le but de ce chapitre est d'introduire la notion d'intégrales multiples de façon à arriver rapidement à calculer des intégrales de la forme

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \qquad \text{ou} \qquad \iiint_B g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

où A est un rectangle ou un disque de $\mathbb{R}^2$, B un pavé, un ellipsoïde, un cylindre ou un cône dans $\mathbb{R}^3$, et $f : A \to \mathbb{R}$ (resp. $g : B \to \mathbb{R}$) une fonction continue.

15. Intégrales dépendant d'un paramètre

Commençons par les résultats suivants.

Proposition 15.1. — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}, (s, x_1, \dots, x_n) \mapsto$*
(Q) *$f(s, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. Alors l'application*

$$F : [a, b]^2 \times U \to \mathbb{R}, \qquad (r, t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_r^t f(s, x_1, \dots, x_n) ds$$

est continue.

Démonstration. — Soient $(r_0, t_0, x_0) \in [a, b]^2 \times U$. Comme U est ouvert, il contient une boule ouverte $B(x_0, \eta)$ avec $\eta > 0$ et donc aussi la boule fermée $\overline{B} = \overline{B}(x_0, \eta/2)$. Alors $K = [a, b] \times \overline{B}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^{n+1}$ donc est compacte.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact K, elle y est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que $|f(s, x) - f(s, x_0)| \leq \varepsilon/(b - a)$ pour tout $(s, x) \in K$ tel que $\|x - x_0\| \leq \delta$. De plus, $|f|$ est bornée sur K par une constante $M > 0$. Comme

$$F(r, t, x) - F(r_0, t_0, x_0) = \int_{t_0}^t f(s, x) ds + \int_r^{r_0} f(s, x) ds + \int_{r_0}^{t_0} \Big(f(s, x) - f(s, x_0) \Big) ds$$

alors si $\|x - x_0\| \leq \delta$ on a

$$|F(r, t, x) - F(r_0, t_0, x_0)| \leq \big(|t - t_0| + |r - r_0| \big) M + |t_0 - a| \, \frac{\varepsilon}{b - a} \leq \big(|t - t_0| + |r - r_0| \big) M + \varepsilon,$$

et donc $|F(r, t, x) - F(r_0, t_0, x_0)| \leq 2\varepsilon$ si l'on a de plus $|t - t_0| + |r - r_0| \leq \varepsilon/M$. Ceci prouve que F est continue en (r_0, t_0, x_0). $\square$

---

[1] v. du 2/12/17 : corrections de coquilles dans la Déf. 17.1 et la Prop. 18.4 signalées par Paul Martin, merci à lui !

(Q) ***Théorème 15.2.*** — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g : [a,b]\times U \to \mathbb{R}, (s, x_1, \dots, x_n) \mapsto g(s, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. On suppose que, pour $i = 1, \dots, n$, la dérivée partielle $\partial g/\partial x_i$ existe et est continue sur $[a,b] \times U$. Alors l'application*

$$G : [a,b] \times U \to \mathbb{R}, \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_a^t g(s, x_1, \dots, x_n) ds$$

est de classe C^1 : on a $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) = g(t, x_1, \dots, x_n)$ et, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_n) = \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x_1, \dots, x_n) ds.$$

Démonstration. — Fixons $x \in U$. L'application $t \mapsto g(t,x)$ est continue donc l'application $t \mapsto \int_a^t g(s,x)ds$ est dérivable, de dérivée $g(t,x)$. Ceci prouve que $\partial G/\partial t = g$.

Notons maintenant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et fixons $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que $x + he_i \in U$ pour tout $h \in I = [-r, r]$.

L'application $\phi : (s,h) \mapsto (\partial g/\partial x_i)(s, x + he_i)$ est continue sur le compact $[a,b] \times I$ donc y est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $|\phi(s, x+he_i) - \phi(s,x)| < \varepsilon$ si $|h| < \delta$.

Pour un tel h, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\theta = \theta(t,x) \in [0,1]$ tel que

$$g(s, x+he_i) - g(s,x) = h\frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x + \theta he_i)$$

et comme $|\theta h| \leq |h| < \delta$, on a $|\phi(s, x + \theta he_i) - \phi(s,x)| < \varepsilon$ et donc

$$\left|\frac{g(s,x+he_i) - g(s,x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(s,x)\right| < \varepsilon$$

pour $h \neq 0$. Comme

$$\frac{G(t, x+he_i) - G(t,x)}{h} - \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s,x)ds = \int_a^t \Big(\frac{g(s,x+he_i) - g(s,x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(s,x)\Big)ds$$

on en déduit que

$$\left|\frac{G(t,x+he_i) - G(t,x)}{h} - \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s,x)ds\right| \leq |t-a|\,\varepsilon$$

et ceci montre que $(\partial G/\partial x_i)(t,x) = \int_a^t \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(s,x)ds$. Comme $\partial g/\partial x_i$ est continue alors, d'après la proposition précédente, $\partial G/\partial x_i$ l'est aussi. Comme $\partial G/\partial t = g$ est aussi continue, il en résulte que G est de classe C^1. □

(Q) ***Corollaire 15.3.*** — *Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : [a,b] \times [c,d] \times U \to \mathbb{R}, (s, u, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(s, u, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. Alors pour tout $x \in U$ on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s,u,x)du\right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,u,x)ds\right) du$$

et cette intégrale sera notée $\phi(x) = \iint_R f(s,u,x)ds\,du$, où R désigne le rectangle $[a,b] \times [c,d]$.

Démonstration. — Fixons $x \in U$. L'application $s \mapsto F(s,x) = \int_c^d f(s,u,x)du$ est continue, donc l'application $p : t \mapsto \int_a^t F(s,x)ds$ est dérivable, de dérivée $p'(t) = F(t,x) = \int_c^d f(t,u,x)du$.

D'autre part, l'application $(t,u) \mapsto G(t,u,x) = \int_a^t f(s,u,x)ds$ est continue, d'après le lemme 15.1, et elle admet une dérivée partielle $\partial G/\partial t = f$ qui est continue. Donc, d'après le théorème 15.2, l'application $q : t \mapsto \int_c^d G(t,u,x)du$ est dérivable, de dérivée

$$q'(t) = \int_c^d \frac{\partial G}{\partial t}(t,u,x)du = \int_c^d f(t,u,x)du = p'(t).$$

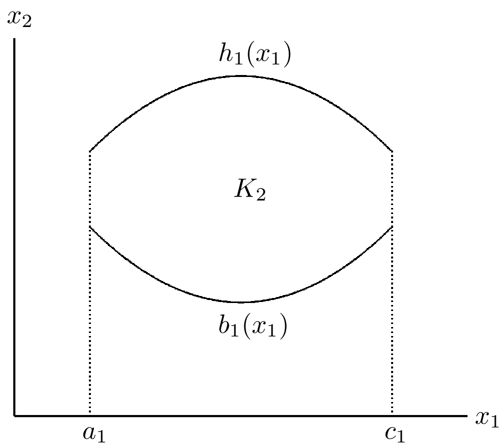
Or $p(a) = 0$ et $G(a,u,x) = 0$ pour tout (u,x), d'où aussi $q(a) = 0$. On en déduit que $p(t) = q(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, en particulier pour $t = b$. $\square$

16. Intégration sur un pavé et théorème de Fubini

***Définitions 16.1* (Intégration sur un pavé ou entre deux graphes)**

Soient $a_1 < c_1$ dans $\mathbb{R}$ et $I_1 = [a_1, c_1]$. On se donne deux fonctions continues $b_1, h_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ telles que $b_1(x) \leq h_1(x)$ pour tout $x \in I_1$ [(2)] et l'on note K_2 le compact de $\mathbb{R}^2$ situé entre les graphes de b_1 et h_1, i.e.

$$K_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x_1 \leq c_1, \quad b_1(x_1) \leq x_2 \leq h_1(x_1)\}.$$



En particulier, si b_1 et h_1 sont des fonctions constantes a_2 et c_2, alors K_2 est le pavé $[a_1,c_1] \times [a_2,c_2]$. On se donne ensuite deux fonctions continues $b_2, h_2 : K_2 \to \mathbb{R}$ telles que $b_2(x) \leq h_2(x)$ pour tout $x = (x_1,x_2) \in K_2$, et l'on note K_3 le compact de $\mathbb{R}^3$ situé entre les graphes de b_2 et h_2, i.e.

$$K_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1,x_2) \in K_2, \quad b_2(x_1,x_2) \leq x_3 \leq h_2(x_1,x_2)\}.$$

On se donne ensuite deux fonctions continues $b_3, h_3 : K_3 \to \mathbb{R}$, etc. et l'on arrive ainsi à un compact K_n de $\mathbb{R}^n$ obtenu en prenant successivement la région comprise entre les graphes de deux fonctions continues. Comme remarqué plus haut, si chaque fonction b_i (resp. h_i) est une constante a_i (resp. c_i), alors K_n est le pavé fermé $[a_1,c_1] \times \cdots \times [a_n,c_n]$.

(1) Soit $f_n : K_n \to \mathbb{R}$ une application continue. D'après la proposition 15.1, l'application

$$f_{n-1} : K_{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto \int_{b_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\,dx_n$$

(2) On a écrit b pour « bas » et h pour « haut ».

(Q) est continue. Par conséquent, on peut définir l'intégrale de f_n sur K_n par la formule récursive suivante :

$$(\star) \quad \int \cdots \int_{K_n} f_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$
$$\int \cdots \int_{K_{n-1}} \left(\int_{b_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Ainsi, on a

$$\iint_{K_2} f_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{c_1} \left(\int_{b_1(x_1)}^{h_1(x_1)} f_2(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$$

puis

$$\iiint_{K_3} f_3(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{K_2} F_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

où

$$F_2(x_1, x_2) = \int_{b_2(x_1,x_2)}^{h_2(x_1,x_2)} f_3(x_1, x_2, x_3)\, dx_3.$$

(Q) (2) Si f_n est la fonction constante 1, on pose

$$\mathrm{vol}_n(K_n) = \int \cdots \int_{K_n} dx_1 \cdots dx_n$$

et l'on dit que c'est le **volume** n-dimensionnel de K_n. On a donc, par définition,

$$\mathrm{vol}_n(K_n) = \int \cdots \int_{K_{n-1}} \Big(h_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) - b_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \Big) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

En particulier, si K_n est le pavé fermé $[a_1, c_1] \times \cdots \times [a_n, c_n]$, on obtient

$$(\heartsuit) \qquad \mathrm{vol}_n\Big([a_1, c_1] \times \cdots \times [a_n, c_n] \Big) = \prod_{i=1}^{n} (c_i - a_i).$$

(3) Soit $R = [a_1, c_1] \times [a_2, c_2]$ un rectangle dans $\mathbb{R}^2$ et $f : R \to \mathbb{R}$ une application continue. Avec la définition précédente, on a

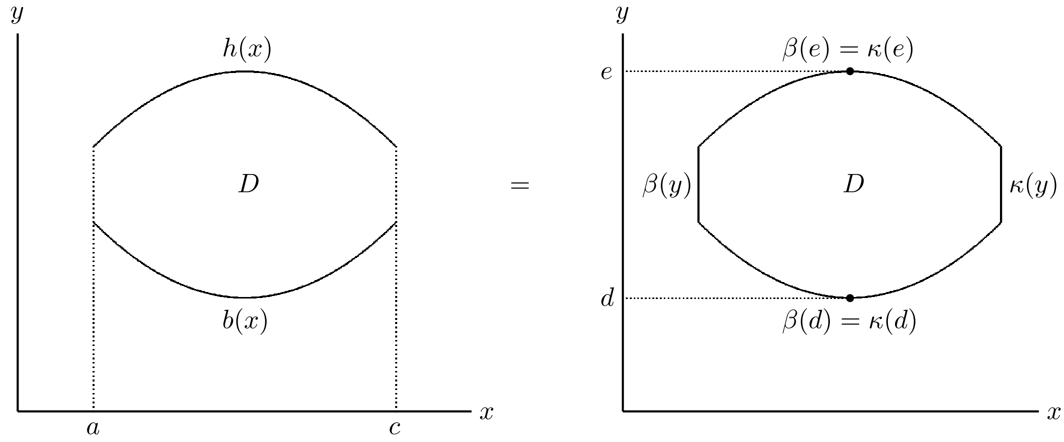
$$\iint_R f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{c_1} \left(\int_{a_2}^{c_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1.$$

Or on peut aussi partir de l'intervalle $J_1 = [a_2, c_2]$ et dire que R est la région comprise entre les graphes des fonctions constantes $\beta(x_2) = a_1$ et $\kappa(x_2) = c_1$, ce qui donne une autre définition possible de l'intégrale de f sur R, à savoir

$$\int_{a_2}^{c_2} \left(\int_{a_1}^{c_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2.$$

Mais il résulte du corollaire 15.3 que ces deux définitions coïncident ! On va voir plus bas que ceci se généralise au cas d'un pavé de $\mathbb{R}^n$ (théorème de Fubini pour un pavé).

(4) Plus généralement, considérons un compact D de $\mathbb{R}^2$ de la forme suivante :



c'est-à-dire D peut s'écrire à la fois sous la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq c, \quad b(x) \leq y \leq h(x)\}$$

et sous la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d \leq y \leq e, \quad \beta(y) \leq x \leq \kappa(y)\}$$

pour des fonctions continues $b, h : [a,c] \to \mathbb{R}$ et $\beta, \kappa : [d,e] \to \mathbb{R}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue. Avec la définition précédente, on a

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^c \left(\int_{b(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Or on pourrait vouloir utiliser la deuxième écriture de D pour définir (et calculer) l'intégrale de f sur D, i.e. pour que la théorie soit agréable à manipuler il est souhaitable que l'on ait l'égalité

$$(\spadesuit) \qquad \int_a^c \left(\int_{b(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_d^e \left(\int_{\beta(y)}^{\kappa(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

On prouvera ceci dans la section suivante, en introduisant une 3ème définition de $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ et en montrant qu'elle coïncide avec les deux précédentes. Contentons-nous pour le moment de démontrer le théorème de Fubini sur un pavé de $\mathbb{R}^n$.

***Théorème 16.2* (de Fubini).** — *Soit $\mathscr{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ une application continue. Dans la définition donnée plus haut, on peut permuter l'ordre*
(Q) *d'intégration, i.e. pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a*

$$\int \cdots \int_{\mathscr{P}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_{i_n} \right) \cdots \right) dx_{i_1} \qquad (*)$$

où l'on a noté $i_k = \sigma(k)$.

Démonstration. — Soit S_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.[3] Tout élément σ de S_n est représenté par le n-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$, où $i_k = \sigma(k)$. Pour tout σ, il existe une chaîne finie $\sigma = \sigma_0 \to \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_N = \mathrm{id}$, où le passage de chaque σ_p à σ_{p+1} se fait en échangeant deux lettres consécutives : $(i_{k-1}, i_k) \to (i_k, i_{k-1})$. En effet, on regarde dans $(i_1, \ldots, i_n)$ où est placé le nombre 1 : s'il apparaît comme i_k, on le fait descendre en l'échangeant avec i_{k-1} ; ainsi, après au

[3] On l'appelle le **groupe symétrique** S_n.

plus $(n-1)$ étapes, on a mis 1 à sa place, puis on fait la même chose avec 2, puis avec 3, etc. Illustrons ceci avec l'exemple de la permutation (43512). On fait :

$$(43512) \to (43152) \to (41352) \to (14352) \to (14325) \to (14235) \to (12435) \to (12345).$$

On est donc ramené à montrer que le terme de droite de $(*)$ ne change pas lorsqu'on échange l'ordre d'intégration des variables consécutives $x_{i_{k-1}}$ et x_{i_k}. Or ceci résulte du corollaire 15.3. ☐

Exemples 16.3. — En guise d'exercice, le lecteur pourra calculer le volume d'un disque, d'un cylindre droit et d'une sphère, de la manière suivante.[4] Si $g : [a,b] \to [c,d]$ est une bijection C^1 et croissante, on rappelle que pour toute fonction continue $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ on a la formule de changement de variable :

$$\int_c^d f(u)du = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

Soit R un réel > 0.

(1) Dans $\mathbb{R}^2$, soit D le disque fermé de centre $O = (0,0)$ et de rayon R, i.e.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Son aire est $\mathrm{vol}_2(D) = \iint_D dxdy = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$. En utilisant le changement de variable $g : [-\pi, 0] \to [-R, R]$, $\theta \mapsto R\cos(\theta)$ (et en utilisant que $\sqrt{\sin^2\theta} = -\sin\theta$ pour $\theta \in [-\pi, 0]$ et que $2\sin^2\theta =$
(Q) $1 - \cos 2\theta$) on obtient que

$$\mathrm{vol}_2(D) = 2R^2 \int_{-\pi}^{0} \sin^2\theta\, d\theta = R^2 \int_{-\pi}^{0} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \pi R^2.$$

(2) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{C}$ le cylindre de base le disque D précédent et de hauteur $h > 0$, i.e.

$$\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq h\}.$$

(Q) Alors $\mathrm{vol}_3(\mathscr{C}) = \iint_D h\, dxdy = h\pi R^2$.

(3) Dans $\mathbb{R}^3$, soit B la boule fermée de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R, i.e.

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, \quad -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}.$$

On a

$$\mathrm{vol}_3(B) = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy = 2\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

où, en posant $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et en utilisant le calcul fait en (1), on a

$$f(x) = \int_{-r(x)}^{r(x)} \sqrt{r(x)^2 - y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} r(x)^2 = \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2).$$

(Q) Donc

$$\mathrm{vol}_3(B) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\big(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\big) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

En admettant le résultat mentionné au point (4) des définitions, on peut aussi écrire que

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -R \leq x \leq R, \quad (y,z) \in D_x\}$$

[4] On verra dans une section suivante une manière plus agréable, en utilisant les coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

où D_x désigne le disque centré au point $P_x = (x, 0, 0)$, situé dans le plan $P_x yz$, de rayon $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. D'après le calcul déjà fait de l'aire d'un disque, on obtient alors directement que

$$\mathrm{vol}_3(B) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Définition 16.4. — Soient $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_N$ des pavés fermés de $\mathbb{R}^n$ d'intérieurs disjoints (i.e. tels que $\mathring{\mathscr{P}}_i \cap \mathring{\mathscr{P}}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$), $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^N \mathscr{P}_i$ et $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors on définit l'intégrale de f sur $\mathscr{P}$ par :

$$\int \cdots \int_{\mathscr{P}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^{N} \int \cdots \int_{\mathscr{P}_i} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

En particulier, on a $\mathrm{vol}(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^N \mathrm{vol}(\mathscr{P}_i)$.

Remarques 16.5. — (1) Soit $\mathscr{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$. Si, dans p intervalles $[a_i, b_i]$ on insère un point m_i tel que $a_i < m_i < b_i$, on obtient une subdivision de $\mathscr{P}$ en $N = 2^p$ pavés plus petits $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_N$, d'intérieurs disjoints. D'après l'égalité connue pour les intégrales à une variable, $\int_a^b g(x)dx = \int_a^m g(x)dx + \int_m^b g(x)dx$, on obtient alors que

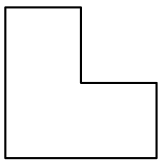
$$(\dagger) \qquad \int \cdots \int_{\mathscr{P}} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^{N} \int \cdots \int_{\mathscr{P}_i} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

i.e. la définition de l'intégrale est compatible avec les subdivisions de pavés.

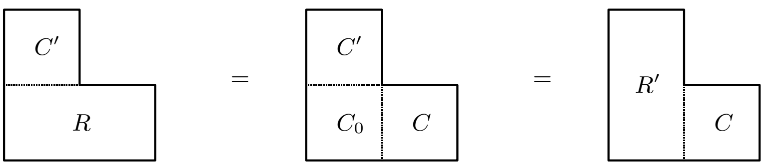
(2) On peut montrer que toute réunion finie A de pavés s'écrit comme une réunion finie de pavés $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_N$ d'intérieurs disjoints. (Pour s'en convaincre, faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$.) Cette écriture n'est pas nécessairement unique, mais si $A = \bigcup_{j=1}^t \mathscr{P}'_j$ est une autre décomposition de A en pavés d'intérieurs disjoints, il existe une troisième telle décomposition $A = \bigcup_{k=1}^p \mathscr{Q}_k$ qui est plus fine que les deux précédentes (i.e. telle que chaque $\mathscr{P}_i$ (resp. $\mathscr{P}'_j$) est réunion des $\mathscr{Q}_k$ qu'il contient). Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une application continue alors, d'après la remarque précédente, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \int \cdots \int_{\mathscr{P}_i} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{p} \int \cdots \int_{\mathscr{Q}_k} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{t} \int \cdots \int_{\mathscr{P}'_t} f(x)\, dx$$

et ceci montre que l'intégrale de f sur A est bien définie. Illustrons ceci par un exemple simple : dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 2\}$

$A \; =$ 

et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. On peut décomposer A en pavés d'intérieurs disjoints comme suit :



et donc $\iint_A f(x)\,dx$ est définie comme la valeur commune des sommes ci-dessous :

$$\iint_R f(x)\,dx + \iint_{C'} f(x)\,dx = \iint_{C_0} f(x)\,dx + \iint_C f(x)\,dx + \iint_{C'} f(x)\,dx = \iint_{R'} f(x)\,dx + \iint_C f(x)\,dx.$$

Si de plus f est continue sur le carré C_2 de sommets diagonaux $(0,0)$ et $(2,2)$, notons C_1 le carré de sommets diagonaux $(1,1)$ et $(2,2)$. Alors C_2 est la réunion de A et de C_1, dont les intérieurs sont disjoints, donc on a

$$\iint_{C_2} f(x)\,dx = \iint_A f(x)\,dx + \iint_{C_1} f(x)\,dx.$$

Donc dans ce cas on peut aussi calculer $\iint_A f(x)\,dx$ par la formule :

$$\iint_A f(x)\,dx = \iint_{C_2} f(x)\,dx - \iint_{C_1} f(x)\,dx.$$

17. Intégration sur un compact quarrable

***Définition 17.1* (Compacts quarrables).** — Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Chaque fonction coordonnée x_i atteint sur K un minimum a_i et un maximum b_i, donc

$$\mathscr{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

est le plus petit pavé fermé contenant K. Posons $\ell_i = b_i - a_i$ et $V = \mathrm{vol}_n(\mathscr{P}) = \ell_1 \cdots \ell_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{Q}_k$ le « quadrillage »[5] obtenu en découpant chaque intervalle $[a_i, b_i]$ en 2^k parties égales, i.e. en découpant $\mathscr{P}$ en 2^{kd} pavés, tous de volume $2^{-kd}V$. Notons $U(k)$, resp. $E(k)$, la réunion de ceux de ces pavés qui sont contenus dans K (resp. qui rencontrent K). Alors, pour tout k on a :

$$(\dagger) \qquad U_k \subset U_{k+1} \subset E_{k+1} \subset E_k.$$

En effet, si P est un pavé de $\mathcal{Q}_k$ contenu dans K alors tous les pavés P' de $\mathcal{Q}_{k+1}$ contenus dans P sont contenus dans K donc dans U_{k+1}, d'où $P \subset U_{k+1}$. Ceci montre que $U_k \subset U_{k+1}$.

D'autre part, remarquons que tout pavé du quadrillage $\mathcal{Q}_{k+1}$ est contenu dans un unique pavé du quadrillage $\mathcal{Q}_k$. Alors, si P' est un pavé de $\mathcal{Q}_{k+1}$ rencontrant K et si P est le pavé de $\mathcal{Q}_k$ contenant P', alors P rencontre K donc est contenu dans E_k, et donc $P' \subset E_k$. Ceci montre que $E_{k+1} \subset E_k$.

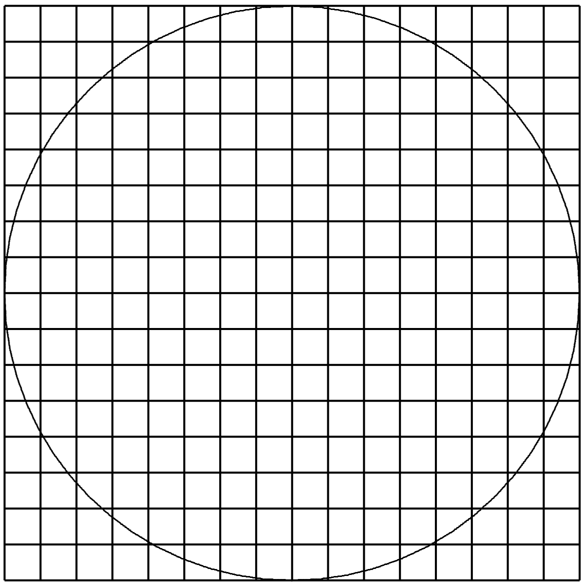
(Q) Il résulte de $(\dagger)$ que la suite $\mathrm{vol}_d(E_k - U_k)$ est décroissante.[6] On dit que K est **quarrable** si $\lim_{k\to\infty} \mathrm{vol}_d(E_k - U_k) = 0$.

Il est clair que tout pavé fermé $\mathscr{P}$ est quarrable, car alors pour tout k on a $U_k = E_k = \mathscr{P}$. On va donner plus bas d'autres exemples de parties quarrables de $\mathbb{R}^n$, mais signalons tout de suite qu'il existe des compacts de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas quarrables.

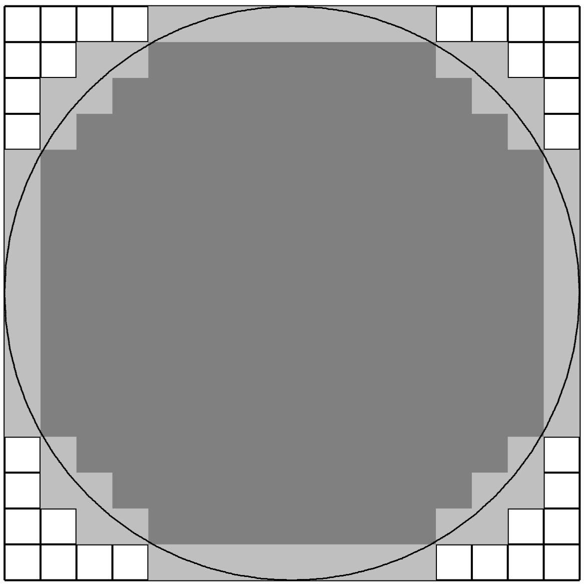
Illustrons ces définitions par les figures suivantes, où K est un disque :

[5] Si $d = 2$, c'est un quadrillage « rectangulaire » par des rectangles qui sont tous homothétiques, dans un rapport $1/2^k$, du rectangle initial $\mathscr{P} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

[6] Comme $E_k - U_k$ est une réunion de, disons N_k, pavés du quadrillage $\mathcal{Q}_k$, on peut calculer son volume : il est égal à $N_k\, 2^{-kd} V$.



On indique ci-dessous les parties U_4 (en gris foncé) et $E_4 - U_4$ (en gris clair) :



Remarque. — La notion de compact quarrable est suffisante pour nos besoins : elle permet de définir le volume des parties A de $\mathbb{R}^d$ qui sont mesurables au sens de Riemann et Jordan et de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un tel A. Mais en travaillant un peu plus, on peut définir une « meilleure » théorie de la mesure, dûe à Lebesgue, [7] pour laquelle on peut définir le volume de tout compact de $\mathbb{R}^d$ et intégrer des fonctions beaucoup plus générales.

[7] Bernhard Riemann (1826-1866), Camille Jordan (1838-1922), Henri Lebesgue (1875-1941).

On va définir ci-dessous l'intégrale d'une fonction continue f sur un compact quarrable K et énoncer les résultats à connaître :

(1) Cette définition coïncide avec les définitions données précédemment dans le cas d'un domaine compris entre deux graphes ou d'une réunion de pavés.

(2) L'intégrale ainsi définie est « linéaire et croissante » par rapport à f et « additive » par rapport à K.

Les démonstrations, assez techniques, sont reléguées en fin de section et peuvent être omises.

(Q) ***Définition et proposition 17.2.*** — *Soient K un compact quarrable de $\mathbb{R}^d$ et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le quadrillage $\mathcal{Q}_n$ et l'approximation U_n de K définis précédemment, et dans tout pavé C de U_n on choisit un point x_C, par exemple le centre de C. Alors la suite*

$$S_n(K, f) = \sum_{C \in U_n} \mathrm{vol}(C) f(x_C)$$

(où la notation $C \in U_n$ signifie que C parcourt les pavés du quadrillage $\mathcal{Q}_n$ contenus dans U_n) est de Cauchy, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des x_C et est notée

$$\int \cdots \int_K f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Cette définition de l'intégrale de f sur K coïncide avec la définition donnée précédemment lorsque K est délimité par des graphes, i.e. on a la proposition et le corollaire suivant.

(Q) ***Proposition 17.3.*** — *Soient A un compact quarrable de $\mathbb{R}^d$ et $b, h : A \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $b(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in A$. Considérons le compact suivant de $\mathbb{R}^{d+1}$:*

$$K = \{(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid x \in A, \quad b(x) \leq s \leq h(x)\}.$$

Alors :

(1) *K est quarrable*

(2) *Pour toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ on a*

$$\int \cdots \int_K f(x, s)\, dxds = \int \cdots \int_A \left(\int_{b(x)}^{h(x)} f(x, s)\, ds \right) dx.$$

En particulier, on a $\mathrm{vol}_{d+1}(K) = \int \cdots \int_A (h(x) - b(x)) dx$.

On procédant par récurrence sur n, on obtient le corollaire suivant.

(Q) ***Corollaire 17.4.*** — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ délimité par des graphes successifs, comme dans la définition* 16.1. *Alors l'intégrale*

$$\int_{a_1}^{c_1} \left(\int_{b_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \cdots \left(\int_{b_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1$$

est égale à l'intégrale $\int \cdots \int_K f(x) dx$ donc ne dépend que de K. Par conséquent, dans la situation (4) *de* 16.1 *on a les égalités*

$$\int_a^c \left(\int_{b(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_d^e \left(\int_{\beta(y)}^{\kappa(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

De la définition donnée dans la proposition 17.2, on déduit facilement les points (1), (2) et (6) de la proposition suivante. Pour abréger la notation, on écrira $\iint$ au lieu de $\int \cdots \int$.

(Q) ***Proposition 17.5*** **(Linéarité et croissance).** — *L'intégrale ainsi définie jouit des propriétés suivantes.*

a) *Fixons un compact quarrable D de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'application $f \mapsto \iint_D f$ est linéaire et croissante, i.e. soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(1) (Linéarité) *On a $\iint_D \big(f(x) + \lambda g(x)\big)\, dx = \iint_D f(x)\, dx + \lambda \iint_D g(x)\, dx$.*

(2) (Croissance) *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$, alors $\iint_D f(x)\, dx \leq \iint_D g(x)\, dx$.*

(3) *Par conséquent, on a $\left|\iint_D f(x)\, dx\right| \leq \iint_D |f(x)|\, dx$.*

b) *(Additivité) Soient D_1, D_2 deux compacts quarrables de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors :*

(4) *$D_1 \cap D_2$ et $D_1 \cup D_2$ sont quarrables*

(5) *On a* $\displaystyle\iint_{D_1 \cup D_2} f(x)\, dx = \iint_{D_1} f(x)\, dx + \iint_{D_2} f(x)\, dx - \iint_{D_1 \cap D_2} f(x)\, dx.$

(6) *En particulier, si $D_2 \subset D_1$ si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in D_1$, alors $\iint_{D_2} f(x)\, dx \leq \iint_{D_1} f(x)\, dx$.*

(7) *Notant ∂A_i la frontière de A_i, on a $\iint_{\partial D_i} f(x)dx = 0$. Par conséquent, si D_1 et D_2 sont d'intérieurs disjoints, on a*

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x)\, dx = \iint_{D_1} f(x)\, dx + \iint_{D_2} f(x)\, dx.$$

Démonstration. — (1), (2) et (6) découlent de la définition 17.2. Prouvons (3). Pour tout $x \in D$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ donc, d'après (2),

$$-\iint_D |f(x)|\, dx \leq \iint_D f(x)\, dx \leq \iint_D |f(x)|\, dx$$

d'où (3). □

Donnons maintenant des démonstrations des résultats précédents. Ces démonstrations peuvent être omises. Toutefois, les notions ci-dessous de diamètre d'un compact et de suite de Cauchy peuvent être utiles.

Définition 17.6 **(Diamètre d'un compact).** — Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors $K \times K$ est un compact de $\mathbb{R}^{2d}$ donc la fonction continue

$$K \times K \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

est bornée et atteint sa borne supérieure. Celle-ci est notée $\delta(K)$ et appelée le **diamètre** de K (pour la norme oonsidérée). Par exemple, si l'on prend la norme $\|\cdot\|_\infty$ et si $\mathscr{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ est le plus petit pavé fermé contenant K, alors le diamètre de K (et de $\mathscr{P}$) est $\delta_\infty(K) = \max\{b_i - a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Exercice. Si K est une boule euclidienne de rayon R, montrer que son diamètre pour la norme euclidienne est $2R$.

Rappel 17.7. — On rappelle que $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, est un espace métrique **complet**, i.e. toute suite de Cauchy est convergente.

Démonstration de la proposition 17.2. — Comme $|f|$ est continue sur le compact K, elle y est majorée par un réel $M > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur K, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/\mathrm{vol}(K)$ pour tous $x, x' \in K$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$.

Observons que le diamètre (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de tout pavé C du quadrillage $\mathcal{Q}_n$ est $2^{-n}\delta_\infty(K)$. D'autre part, comme K est quarrable la suite $\mathrm{vol}(E_n - U_n)$ tend vers 0. Donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

(a) $2^{-n}\delta_\infty(K) < \delta$ et donc $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/\mathrm{vol}(K)$ pour tout $C \in U_n$ et $x, x' \in C$.

(b) $\mathrm{vol}(E_n - U_n) < \varepsilon/M$.

Soient alors $p \geq n \geq n_0$. Pour tout $C \in U_n$, désignons par $\mathcal{Q}_p(C)$ l'ensemble des pavés C' du quadrillage $\mathcal{Q}_p$ qui sont contenus dans C. Alors $S_n(K,f) - S_p(K,f)$ est la somme des termes suivants.

(1) Pour chaque $C \in U_n$, le terme

$$\mathrm{vol}(C)f(x_C) - \sum_{C' \in \mathcal{Q}_p(C)} \mathrm{vol}(C')f(x_{C'}) = \sum_{C' \in \mathcal{Q}_p(C)} \mathrm{vol}(C')\Big(f(x_C) - f(x_{C'})\Big).$$

D'après (a) ci-dessus, ce terme est majoré en valeur absolue par $\mathrm{vol}(C)\varepsilon/\mathrm{vol}(K)$, donc la somme de tous ces termes est majorée en valeur absolue par $\mathrm{vol}(U_n)\varepsilon/\mathrm{vol}(K)$, qui est $\leq \varepsilon$ puisque $\mathrm{vol}(U_n) \leq \mathrm{vol}(K)$.

(2) Pour chaque $C' \subset U_p - U_n$, le terme $-\mathrm{vol}(C')f(x_{C'})$, dont la valeur absolue est $\leq \mathrm{vol}(C')M$. La somme de tous ces termes est majorée en valeur absolue par $\mathrm{vol}(U_p - U_n)M$, et comme $U_p \subset E_n$ alors, d'après (b) ci-dessus, ceci est $\leq \varepsilon$.

Donc, pour tout $p \geq n \geq n_0$ on a $|S_p(K,f) - S_n(K,f)| \leq 2\varepsilon$. Ceci montre que la suite est de Cauchy, donc convergente. De plus sa limite ne dépend pas du choix des x_C car si y_C est un autre choix, alors d'après le point **(a)** ci-dessus on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\left|\sum_{C \in U_n} \mathrm{vol}(C)f(x_n) - \sum_{C \in U_n} \mathrm{vol}(C)f(y_n)\right| \leq \sum_{C \in U_n} \mathrm{vol}(C)\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \leq \mathrm{vol}(U_n)\frac{\varepsilon}{\mathrm{vol}(K)} \leq \varepsilon.$$

Ceci établit la définition et proposition 17.2. □

Démonstration de la proposition 17.3. — (1) Montrons que K est quarrable. Notons b_A (resp. h^A) le minimum de b (resp. le maximum de h) sur A et posons $J = [b_A, h^A]$ et $\ell = h^A - b_A$. Soit $\mathscr{P}$ le plus petit pavé fermé de $\mathbb{R}^d$ contenant A, alors le plus petit pavé fermé contenant K est $\mathscr{P} \times J$, et l'on voit que chaque quadrillage $\mathcal{Q}_n(K)$ est le produit des quadrillages $\mathcal{Q}_n(A)$ et $\mathcal{Q}_n(J)$. De plus, si un pavé $C \times I$ de $\mathcal{Q}_n(K)$ appartient à $E_n(K)$ (resp. à $U_n(K)$) alors sa projection C sur $\mathbb{R}^d$ appartient à $E_n(A)$ (resp. à $U_n(A)$).

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\mathrm{vol}_d(E_n(A) - U_n(A)) < \varepsilon$, alors la réunion $\mathscr{C}$ des pavés de $E_n(K) - U_n(K)$ qui se projettent sur $E_n(A) - U_n(A)$ vérifie :

$$\mathrm{vol}_{d+1}(\mathscr{C}) \leq \ell\varepsilon \tag{1}$$

donc il suffit de s'occuper des pavés de $E_n(K)$ qui se projettent sur un pavé C de $U_n(A)$. Comme b et h sont uniformément continues sur le compact A, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$ et tout pavé C de $U_n(A)$, notant b_C resp. b^C (resp. h_C et h^C) le minimum et le maximum de b (resp. de h) sur C, on ait $b^C \leq \varepsilon + b_C$ et $h^C \leq \varepsilon + h_C$.

Fixant un tel C, notons $\alpha_0, \dots, \alpha_{2^n}$ les points du quadrillage $\mathcal{Q}_n(J)$ et notons i_0 (resp. i_2) le plus grand indice i tel que $\alpha_i \leq b_C$ (resp. $\leq h_C$) et i_1 (resp. i_3) le plus petit indice i tel que $\alpha_i \geq b^C$ (resp. $\geq h^C$). Alors pour $i_1 \leq i < i_2$ les pavés $C \times [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ de $\mathcal{Q}_n(K)$ sont contenus dans $U_n(K)$, cf. la figure ci-dessous.

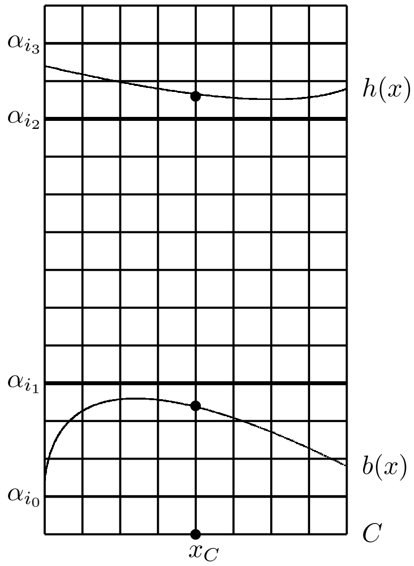
D'autre part, on a $\alpha_{i_1} \leq b^C + \ell/2^n \leq b_C + \varepsilon + \ell/2^n \leq \alpha_{i_0} + \varepsilon + 2\ell/2^n$, et de même $\alpha_{i_3} \leq \alpha_{i_2} + \varepsilon + 2\ell/2^n$. Soit $n_2 \geq n_1$ tel que $2\ell/2^{n_2} < \varepsilon$, alors pour tout $n \geq n_2$ et $C \in U_n(A)$, on obtient que la réunion des pavés de $E_n(K)$ se projetant sur C, à savoir

$$C \times \Big([\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}] \cup [\alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}]\Big)$$

est de volume $(d+1)$-dimensionnel $\leq 4\varepsilon \operatorname{vol}_d(C)$, donc lorsque C parcourt $U_n(A)$, tout ceci est de volume $\leq 4\varepsilon \operatorname{vol}_d(A)$. Tenant compte de (1) plus haut, on obtient ainsi que pour $n \geq n_2$ on a

$$\operatorname{vol}_{d+1}\big(E_n(K) - U_n(K)\big) \leq \varepsilon(\ell + 4\operatorname{vol}_d(A))$$

et ceci prouve que K est quarrable.



(2) Démontrons maintenant le second point. Conservons les notations précédentes et notons $F : A \to \mathbb{R}$ la fonction continue $x \mapsto \int_{b(x)}^{h(x)} f(x,s)\, ds$. Alors, d'une part, l'intégrale de F sur A est la limite de la suite

$$S_n(A,F) = \sum_{C \in U_n(A)} \operatorname{vol}_d(C) F(x_C) = \sum_{C \in U_n(A)} \operatorname{vol}_d(C) \int_{b(x_C)}^{h(x_C)} f(x_C, s) ds,$$

où x_C est un point choisi dans C, par exemple son milieu. D'autre part, avec les notations précédentes, l'intégrale de f sur K est la limite de la suite :

$$S_n(K,f) = \sum_{C \in U_n(A)} \operatorname{vol}_d(C) \sum_{i=i_1(C)}^{i_2(C)-1} \frac{\ell}{2^n} f(x_C, m_i),$$

où m_i est un point choisi dans l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, par exemple son milieu.

Comme $|f|$ est continue sur le compact K, elle y est majorée par un réel $M > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur K, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$ pour tous y, y' appartenant à un même pavé du quadrillage $\mathcal{Q}_n(K)$. Or

$$\int_{b(x_C)}^{h(x_C)} f(x_C,s)ds = \int_{b(x_C)}^{\alpha_{i_1}(C)} f(x_C,s)ds + \int_{\alpha_{i_1}(C)}^{\alpha_{i_2}(C)} f(x_C,s)ds + \int_{\alpha_{i_2}(C)}^{h(x_C)} f(x_C,s)ds$$

et chacun des termes extrêmes est majoré en valeur absolue par $(\varepsilon+\ell/2^n)M$. Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\ell/2^{n_1} < \varepsilon$, alors pour tout $n \geq n_1$ on a :

$$\left|\int_{b(x_C)}^{h(x_C)} f(x_C,s)ds - \sum_{i=i_1(C)}^{i_2(C)-1} \frac{\ell}{2^n} f(x_C,m_i)\right| \leq 4\varepsilon M + \sum_{i=i_1(C)}^{i_2(C)-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \big|f(x_C,s)-f(x_C,m_i)\big| ds$$

$$\leq 4\varepsilon M + \big(\alpha_{i_2}(C)-\alpha_{i_1}(C)\big)\varepsilon \leq (4M+\ell)\varepsilon$$

et donc $|S_n(A,F)-S_n(K,f)| \leq (4M+\ell)\varepsilon \sum_{C\in U_n(A)} \mathrm{vol}_d(C) \leq (4M+\ell)\mathrm{vol}_d(A)\varepsilon$. Ceci montre que les suites $S_n(A,F)$ et $S_n(K,f)$ ont même limite, d'où la proposition. $\square$

Enfin, dans la proposition 17.5, pour montrer que $D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2$ sont quarrables et qu'on a l'égalité (5), on a besoin de quelques préliminaires.

Remarques 17.8. — Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$.

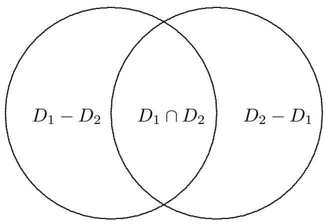
a) Il est clair que $\overline{A}\cup\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$ et comme $\overline{A}\cup\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cup B$ donc aussi son adhérence, on a l'inclusion réciproque d'où l'égalité $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

b) Il est clair que $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$, mais l'inclusion peut être stricte. Par exemple si $A=[0,1[$ et $B=]1,2]$ alors $A\cap B$ est vide ainsi que son adhérence, mais $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$.

c) Il est clair que $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$ et comme $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A\cap B$, il est aussi contenu dans son intérieur, on a l'inclusion réciproque d'où l'égalité $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$.

d) Il est clair que $\mathring{A}\cup\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$, mais l'inclusion peut être stricte. Par exemple si $A=[0,1]$ et $B=[1,2]$ alors $A\cup B=[0,2]$ a pour intérieur $]0,2[$, qui est plus grand que $\mathring{A}\cup\mathring{B}$.

Lemme 17.9. — *Soient D_1, D_2 deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Alors le bord de D_1-D_2 (resp. D_2-D_1, resp. $D_1\cap D_2$) est contenu dans $\partial D_1 \cup \partial D_2$.*



Démonstration. — Pour $i=1,2$, notons U_i l'ouvert complémentaire de D_i. Alors $D_1-D_2 = D_1\cap U_2$ a pour intérieur $\mathring{D}_1\cap U_2$, et $\overline{D_1\cap U_2} \subset D_1\cap\overline{U_2}$, donc

$$\partial(D_1-D_2) \subset (D_1\cap\overline{U_2}) - (\mathring{D}_1\cap U_2)$$

et ceci est contenu dans la réunion de $(D_1\cap\overline{U_2})-\mathring{D}_1 \subset \partial D_1$ et de $(D_1\cap\overline{U_2})-U_2 = \partial U_2 = \partial D_2$. Évidemment, il en est de même pour D_2-D_1.

D'autre part, $D_1\cap D_2$ est un fermé d'intérieur $\mathring{D}_1\cap\mathring{D}_2$ donc

$$\partial(D_1\cap D_2) = (D_1\cap D_2) - (\mathring{D}_1\cap\mathring{D}_2)$$

et ceci est contenu dans la réunion de $(D_1\cap D_2)-\mathring{D}_1 \subset \partial D_1$ et de $(D_1\cap D_2)-\mathring{D}_2 \subset \partial D_2$. $\square$

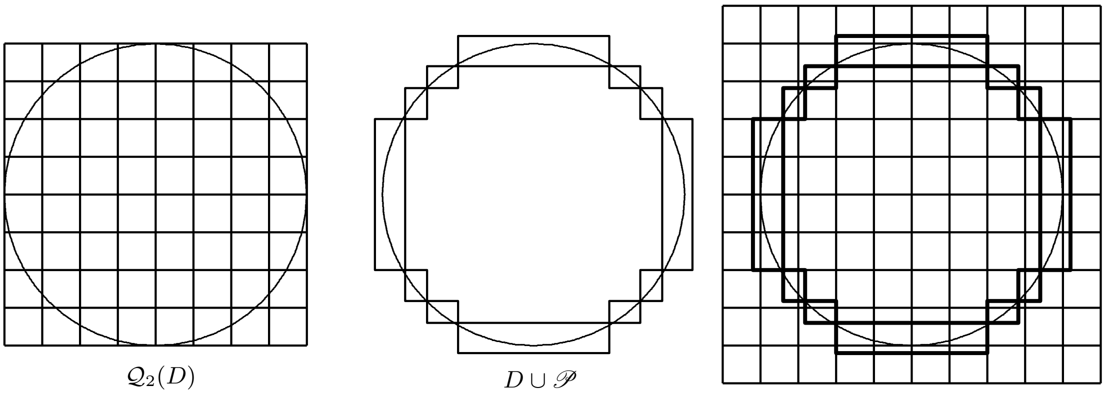
Afin de donner une caractérisation plus maniable des ensembles quarrables, introduisons la définition suivante.

Définition 17.10. — Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite **négligeable** (ou de volume nul) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une réunion finie $\mathscr{P}_\varepsilon$ de pavés telle que $A \subset \mathscr{P}_\varepsilon$ et $\mathrm{vol}_n(\mathscr{P}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Proposition 17.11. — *Un compact D de $\mathbb{R}^d$ est quarrable si et seulement si son bord ∂D est négligeable.*

Démonstration. — [8] Supposons D quarrable au sens de la définition 17.1 et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_k(D) - U_k(D)$ est une réunion finie de pavés contenant ∂D, et est de volume $< \varepsilon$ pour k assez grand. Donc ∂D est négligeable.

Réciproquement, supposons ∂D négligeable. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe une réunion finie de pavés $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^N P_i$ contenant ∂D et telle que $\mathrm{vol}_d(\mathscr{P}) < \varepsilon/2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons les quadrillages $\mathscr{Q}_k(D)$ et étendons ces quadrillages de façon à recouvrir $D \cup \mathscr{P}$, cf. la figure suivante, où D est un disque.



$\mathscr{Q}_2(D)$ $D \cup \mathscr{P}$

Chaque pavé P_i est un produit d'intervalles $I_{i1} \times \cdots \times I_{id}$. Pour chaque entier k soit $P_i(k)$ le plus petit pavé qui est réunion de pavés du quadrillage $\mathscr{Q}_k(D)$ et qui contient P_i. Écrivant $P_i(k) = I_{i1}(k) \times \cdots \times I_{id}(k)$, on a pour $j = 1, \ldots, d$

$$\ell(I_{ij}(k)) \leq \ell(I_{ij}) + 2 \cdot 2^{-k} \delta_\infty(D) = \ell(I_{ij}) + 2^{1-k} \delta_\infty(D)$$

Donc si on note $\mathscr{P}(k)$ la réunion des $P_i(k)$, on a $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}(k)$ et

$$\mathrm{vol}_d(\mathscr{P}(k)) \leq \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^d \big(\ell(I_{ij}) + 2^{1-k} \delta_\infty(D)\big).$$

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^d \big(\ell(I_{ij}) + t\, \delta_\infty(D)\big)$ est un polynôme, donc continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que $|f(t)| < \varepsilon/2$ si $|t| < \eta$. Alors pour tout k tel que $2^{1-k} < \eta$, on a

$$\mathrm{vol}_d(\mathscr{P}(k)) < f(0) + \frac{\varepsilon}{2} = \mathrm{vol}_d(\mathscr{P}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

D'autre part, on a $E_k(D) - U_k(D) \subset \mathscr{P}(k)$ car .... (à compléter) $\square$

18. Formule de changement de variables

Commençons par rappeler, en la démontrant, la formule de changement de variables pour les fonctions d'une variable.

---

[8] Cette démonstration (ainsi que celle de la proposition 17.5) sera complétée dans une version ultérieure du polycopié.

(Q) ***Proposition 18.1.*** — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Pour toute application continue $f : \phi([a,b]) \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

où $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$ désigne $-\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)dx$ si $\phi(b) < \phi(a)$.

Démonstration. — Comme ϕ est C^1 et f continue, l'application $t \mapsto g(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ est continue et donc l'application $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(t) = \int_a^t g(s)ds$ est dérivable, de dérivée $G' = g$, et vérifie $G(a) = 0$.

De même, l'application $F : \phi([a,b]) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\phi(a)}^x f(u)du$ est dérivable, de dérivée $F' = f$, et vérifie $F(a) = 0$. Comme ϕ est C^1, donc dérivable, l'application composée

$$F \circ \phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto F(\phi(t)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(t)} f(u)du$$

est dérivable, de dérivée $t \mapsto F'(\phi(t))\phi'(t) = g$, et vérifie $F(\phi(a)) = 0$. Il en résulte que $G(t) = F(\phi(t))$ pour tout $t \in [a,b]$, en particulier pour $t = b$. □

Supposons en particulier que ϕ soit un C^1-difféomorphisme de l'intervalle ouvert $I =]a,b[$ sur son image $J =]c,d[$, où $c < d$. Alors $\phi'(t)$ ne s'annule pas sur I donc, étant continue, elle y garde un signe constant $\varepsilon = \pm 1$. Si $\varepsilon = 1$ alors ϕ est strictement croissante, d'où $c = \phi(a)$ et $d = \phi(b)$, et l'on a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|dt$$

(on a la seconde égalité car $\phi'(t) \geq 0$ sur $[a,b]$). Si par contre $\varepsilon = -1$, alors ϕ est strictement décroissante, d'où $c = \phi(b)$ et $d = \phi(a)$, et l'on a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_b^a f(\phi(t))\phi'(t)dt = -\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|dt$$

(on a la seconde égalité car $\phi'(t) \leq 0$ sur $[a,b]$). Donc, sous l'hypothèse additionnelle que ϕ soit un C^1-difféomorphisme de $]a,b[$ sur son image $]c,d[$ (avec $c < d$), la formule de la proposition précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\int_c^d f(x)dx = \varepsilon \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)|dt$$

où ε est le signe de $\phi'(t)$ sur $]a,b[$. C'est sous cette forme que la formule va se généraliser aux intégrales multiples.

Remarque 18.2 **(Invariance par translation)**. — Remarquons d'abord que la définition de l'intégrale est « invariante par translation ». Dans le cas d'une variable, si $T \in \mathbb{R}$ et si $\phi(t) = t + T$, d'où $\phi'(t) = 1$, la proposition précédente donne

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(t+T)dt$$

pour toute application continue f de $\phi([a,b]) = [a+T, b+T]$ dans $\mathbb{R}$. Dans le cas de n variables, soient $u \in \mathbb{R}^n$, K un compact quarrable de $\mathbb{R}^n$ et $T_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + u$ la translation de vecteur u. Comme T_u transforme tout pavé en un pavé de même volume, il résulte de la définition 17.1 et de la définition-proposition 17.2 que $T_u(K) = K + u$ est quarrable et que $U_n(T_u(K)) = U_n(K) + u$ pour tout n, d'où en posant $y_C = x_C + u$ pour tout $C \in U_n(K)$,

$$S_n(T_u(K), f) = \sum_{C \in U_n(K)} \mathrm{vol}(C + u) f(y_C) = \sum_{C \in U_n(K)} \mathrm{vol}(C) f(x_C + u) = S_n(K, f \circ T_u)$$

et donc $\iint_{K+u} f(y)dx = \iint_K f(x + u)dx$.

Notation 18.3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles, i.e. telles que $\mathrm{dét}(A) \neq 0$. C'est un groupe (pour la multiplication des matrices), appelé le **groupe linéaire** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarquons ici que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, l'application affine $\phi : X \mapsto AX + b$ est évidemment de classe C^1, et c'est un C^1-difféomorphisme si et seulement si A est inversible. (Dans ce cas, $\phi^{-1}(Y) = A^{-1}(Y - b)$.)

On a alors la proposition suivante.

Proposition 18.4 **(Changement de variable pour une application linéaire)**

(Q) *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tout compact quarrable K de $\mathbb{R}^n$, on note $A(K)$ son image par A, i.e. $A(K) = \{A(x) \mid x \in K\}$. Alors : $A(K)$ est un compact quarrable et pour toute application continue $f : A(K) \to \mathbb{R}$ on a*

$$(\heartsuit) \qquad \iint_{A(K)} f(y)dy = \iint_K f(A(x))|\,\mathrm{dét}(A)|dx.$$

Démonstration. — Elle sera donnée dans une version ultérieure du polycopié. □

Remarque 18.5. — Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$; notons $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application affine $x \mapsto A(x) + b$. Soit K un compact quérable de $\mathbb{R}^n$. En combinant la proposition et la remarque précédente, on obtient que $\phi(K)$ est un compact quarrable et que pour toute application continue $f : \phi(K) \to \mathbb{R}$ on a

$$\iint_{\phi(K)} f(y)dy = \iint_K f(\phi(x))|\,\mathrm{dét}(A)|dx.$$

Exemple 18.6 **(Traité en cours)**. — Toute rotation ou symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est de déterminant ± 1. Par conséquent, le calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$ et des volumes dans $\mathbb{R}^3$ est invariant par translation et par rotations et symétries orthogonales. Par exemple, soit $\mathcal{T} = (ABC)$ un triangle de $\mathbb{R}^2$; il possède au moins deux angles aigus, disons en A et B. Par rotation et translation on peut supposer que A et B sont situés sur l'axe (Ox), i.e. $A = (a, 0)$ et $B = (b, 0)$ avec, disons, $a < b$. Posons $C = (c, h)$, quitte à effectuer la symétrie orthogonale d'axe (Ox), on peut supposer $h > 0$. Alors h est la hauteur du triangle, tandis que la (longueur de sa) base est $b - a$. D'autre part, $\mathcal{T}$ est le domaine délimité par le segment $[a, b]$ et le graphe de la fonction f affine par morceaux définie par

$$f(x) = \begin{cases} h(x - a)/(c - a) & \text{si } a \leq x \leq c, \\ h - h(x - c)/(b - c) = h(b - x)/(b - c) & \text{si } c \leq x \leq b. \end{cases}$$

On obtient alors que $\mathrm{vol}_2(\mathcal{T})$ (l'aire de $\mathcal{T}$) est égale à $h(b - a)/2$, i.e. à la moitié du produit base $\times$ hauteur.

Enfin, on peut démontrer le théorème suivant.

(Q) ***Théorème 18.7* (Formule de changement de variables).** — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, $\mathscr{P}$ un pavé fermé contenu dans U, et $\mathring{\mathscr{P}}$ l'intérieur de $\mathscr{P}$ (i.e. le pavé ouvert correspondant). On suppose que la restriction de ϕ à $\mathring{\mathscr{P}}$ est un difféomorphisme de $\mathring{\mathscr{P}}$ sur son image. Alors, $\phi(\mathscr{P})$ est quarrable et pour toute application continue $f : \phi(\mathscr{P}) \to \mathbb{R}$ on a*

$$\iint_{\phi(\mathscr{P})} f(y)\,dy = \iint_{\mathscr{P}} f(\phi(x))\,\big|\,\mathrm{d\acute{e}t}\,D\phi(x)\big|\,dx$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.

Démonstration. — La démonstration est assez longue, elle sera peut-être donnée dans une version ultérieure du polycopié. □

***Exemple 18.8* (Coordonnées polaires).** — Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. Prenons $U = \mathbb{R}^2$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\mathscr{P} = [0, R] \times [0, \varphi]$. Alors $\phi(\mathscr{P})$ est un secteur angulaire fermé du disque de centre 0 et de rayon R, et ϕ est un difféomorphisme de $\mathring{\mathscr{P}}$ sur le secteur angulaire ouvert correspondant.

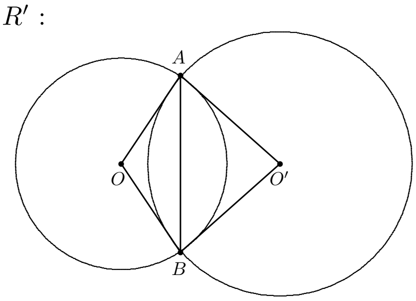
Pour tout $(r, \theta) \in \mathscr{P}$, le déterminant de $D\phi(r, \theta)$ est $r > 0$ donc, d'après la proposition précédente, pour toute application continue $f : \phi(\mathscr{P}) \to \mathbb{R}$ on a :

$$\iint_{\phi(\mathscr{P})} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathscr{P}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

(Q) En particulier, prenant $f =$ la fonction constante 1, on obtient que l'aire de $\phi(\mathscr{P})$ vaut

$$\iint_{\phi(\mathscr{P})} dxdy = \iint_{\mathscr{P}} rdrd\theta = \int_0^R r\left(\int_0^{\varphi} d\theta\right) dr = \varphi \int_0^R rdr = \frac{\varphi R^2}{2}.$$

***Exemple 18.9* (Traité en cours).** — Soit K la réunion des deux disques D et D' ci-dessous, de centres O et O' et de rayons R et R' :



et soit θ (resp. θ') l'angle en O (resp. O') du triangle OAB (resp. $O'AB$). Alors l'aire de K est la somme des aires des disques moins l'aire de la région d'intersection D. De plus, la partie G de D à gauche du segment $[A, B]$ est égale au secteur angulaire S délimité par A et B, moins le triangle OAB. En utilisant les exemples 18.6 et 18.8, on en déduit (exercice !) que

$$\mathrm{vol}_2(G) = \mathrm{vol}_2(S) - \mathrm{vol}_2(OAB) = \frac{R^2\theta}{2} - \frac{R^2\sin\theta}{2}$$

De même, l'aire de la partie droite de D vaut $R'^2(\theta' - \sin\theta')/2$ et donc l'aire de K est

$$\mathrm{vol}_2(K) = \pi(R^2 + R'^2) - \frac{R^2}{2}(\theta - \sin\theta) - \frac{R'^2}{2}(\theta' - \sin\theta').$$

19. Intégration de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, exemple des centres d'inertie

À nouveau, pour abréger la notation, on écrira des intégrales doubles $\iint$ pour désigner des intégrales multiples $\int \cdots \int$ dans $\mathbb{R}^n$ (avec n signes $\int$)

Définition 19.1. — Soit K un compact quarrable de $\mathbb{R}^n$. La définition des intégrales multiples s'étend immédiatement au cas des fonctions continues $f : K \to \mathbb{R}^p$ à valeurs vectorielles. En effet, notant $(f_1, \ldots, f_p)$ les composantes de f, on définit $\iint f(x)dx$ comme le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \iint_K f_1(x)dx \\ \vdots \\ \iint_K f_p(x)dx \end{pmatrix}$$

i.e. on intégre « coordonnée par coordonnée ». Cette généralisation est utile par exemple pour définir le centre d'inertie d'une surface de $\mathbb{R}^2$ ou d'un solide de $\mathbb{R}^3$.

Commençons avec la définition suivante.

Définition 19.2 **(Barycentre de N points pondérés).** — Donnons-nous N points $A_1, \ldots, A_N$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tels que $S = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$ soit $\neq 0$. Notant O l'origine de $\mathbb{R}^n$, on définit le point G par l'égalité

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

On dit que G est le barycentre (ou centre d'inertie) des « points pondérés » (A_i, λ_i) pour $i = 1, \ldots, N$.

(Q) ***Proposition 19.3.*** — *On conserve les notations précédentes. Pour* **tout** *point $I \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \overrightarrow{IA_i}.$$

Démonstration. — On a $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG}$ et de même $\overrightarrow{IA_i} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA_i}$. Donc le terme de droite vaut

$$\frac{1}{S}\overrightarrow{IO} + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{IG}.$$

□

Définition 19.4. — Pour fixer les idées, supposons maintenant que $n = 3$ et soit S un « solide » de $\mathbb{R}^3$, i.e. un compact quarrable de $\mathbb{R}^3$, d'intérieur non vide, muni d'une fonction continue

$$\rho : S \to \mathbb{R}_+^*$$

appelée « densité volumique ». (I.e. on pense à un solide fait d'un alliage de métaux, dont la densité peut varier en fonction du point $p \in S$.) Par définition la « masse » de S est

$$\mu(S) = \iiint_S \rho(p)\, dp > 0,$$

où $p = (x, y, z)$ désigne un point variable de S et dp désigne $dx\, dy\, dz$. Notant O l'origine de $\mathbb{R}^3$, on
(Q) définit alors le **centre d'inertie** G du solide (S, ρ) par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(S)} \iiint_S \rho(p) \overrightarrow{Op}\, dp$$

i.e. en prenant les coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{\mu(S)} \iiint_S \rho(x,y,z)x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{\mu(S)} \iiint_S \rho(x,y,z)y\,dxdydz,$$
$$z_G = \frac{1}{\mu(S)} \iiint_S \rho(x,y,z)z\,dxdydz.$$

(Q) En particulier, si le solide S est *homogène*, i.e. si la densité volumique ρ est une constante $\rho > 0$, on a $\mu(S) = \rho\,\mathrm{vol}_3(S)$ et

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mathrm{vol}_3(S)} \iiint_S \overrightarrow{Op}\,dp$$

d'où

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{vol}_3(S)} \iiint_S x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{\mathrm{vol}_3(S)} \iiint_S y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{\mathrm{vol}_3(S)} \iiint_S z\,dxdydz.$$

De même, si $\mathscr{P}$ est une « plaque » de $\mathbb{R}^2$, i.e. un compact quarrable de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur non vide, muni d'une fonction continue

$$\rho : S \to \mathbb{R}_+^*$$

appelée « densité surfacique ». (Penser à une plaque très fine, i.e. considérée comme d'épaisseur nulle, dont la densité peut varier en fonction du point $p \in \mathscr{P}$.) Alors, par définition la « masse » de $\mathscr{P}$ est

$$\mu(\mathscr{P}) = \iint_{\mathscr{P}} \rho(p)\,dp > 0.$$

(Q) Notant O l'origine de $\mathbb{R}^2$, on définit alors le **centre d'inertie** G de la plaque $(\mathscr{P}, \rho)$ par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu(\mathscr{P})} \iint_{\mathscr{P}} \rho(p)\overrightarrow{Op}\,dp$$

i.e. en prenant les coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{\mu(\mathscr{P})} \iint_{\mathscr{P}} \rho(x,y)x\,dxdy, \qquad y_G = \frac{1}{\mu(\mathscr{P})} \iint_S \rho(x,y)y\,dxdy.$$

(Q) En particulier, si la plaque $\mathscr{P}$ est *homogène*, i.e. si la densité surfacique ρ est une constante $\rho > 0$, on a $\mu(\mathscr{P}) = \rho\,\mathrm{vol}_2(\mathscr{P})$ et

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(\mathscr{P})} \iint_S \overrightarrow{Op}\,dp$$

d'où

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(\mathscr{P})} \iint_{\mathscr{P}} x\,dxdy, \qquad y_G = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(\mathscr{P})} \iint_{\mathscr{P}} y\,dxdy.$$

Enfin, on a une définition analogue si l'on a un segment $[A, B]$ muni d'une fonction continue $\rho : [A, B] \to \mathbb{R}_+^*$ appelée « densité linéique ». Bien sûr, si celle-ci est constante, alors le centre d'inertie du segment est simplement son milieu.

En fait, comme dans le cas de N points pondérés, le centre d'inertie ne dépend pas du choix de l'origine O, i.e. on a la proposition suivante.

(Q) ***Proposition 19.5***. — *Soit K un compact quarrable de $\mathbb{R}^n$ et $\rho : K \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\mu = \iint_K \rho(p)dp$ soit $\neq 0$. On définit le centre d'inertie G de (K, ρ) par l'égalité vectorielle*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\mu} \iint_K \rho(p)\overrightarrow{Op}\,dp.$$

Alors pour tout point $I \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(\star) \qquad \overrightarrow{IG} = \frac{1}{\mu} \iint_K \rho(p) \overrightarrow{Ip}\, dp.$$

Démonstration. — On a $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG}$ et de même $\overrightarrow{Ip} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{Op}$ pour tout $p \in K$. Donc le terme de droite de $(\star)$ vaut

$$\frac{1}{\mu}\left(\iint_K \rho(p) dp\right) \overrightarrow{IO} + \frac{1}{\mu} \iint_K \rho(p) \overrightarrow{Op}\, dp = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{IG}.$$

□