CHAPITRE 5

INTÉGRALES DE CHEMINS ET FORMULE DE GREEN-RIEMANN

20. Intégrales de chemins

[1] Commençons par la définition suivante.

(Q) ***Définition 20.1*** **(Chemins de classe C^1).** — Pour nous, un **chemin** [2] dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, sera la donnée de $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et d'une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (i.e. γ est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a (resp. à gauche en b) et γ' est continue sur $[a, b]$). On dit que le chemin est :

a) **simple** si γ est injective, i.e. si $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ lorsque $s \neq t$, i.e. si le chemin « ne passe pas deux fois au même endroit ».

b) **fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

c) **fermé simple** s'il est fermé et si l'application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est injective à l'exception du fait que $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. si le chemin ne passe qu'une fois en chaque point, sauf que $\gamma(a) = \gamma(b)$ est atteint deux fois.

Exemples 20.2. — Considérons les chemins $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, pour $i = 0, \ldots, 4$ ci-dessous. Pour $i = 0, \ldots, 3$, on prend $[a, b] = [0, 1]$. (Exercice : visualiser et/ou dessiner chacun de ces chemins.)

(1) Le chemin $\gamma_0 : t \mapsto (t, t)$ est simple, pas fermé. Il en est de même du chemin $\gamma_1 : t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$.

(2) Le chemin $\gamma_2 : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ est fermé simple ; $\gamma_3 : t \mapsto (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$ est fermé mais pas simple (c'est le cercle unité parcouru deux fois dans le sens trigonométrique).

(3) Enfin, le chemin $\gamma_4 : [-1/4, 5/4]$ défini par $\gamma(t) = (2 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ si $-1/4 \leq t \leq 0$ ou $1 \leq t \leq 5/4$, et $\gamma_4(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ si $0 \leq t \leq 1$ est de classe C^1 (le vérifier !) et n'est ni fermé ni simple : ses extrémités sont les points $(2, -1)$ et $(2, 1)$ et il passe deux fois au point $(1, 0)$.

(Q) ***Définition 20.3*** **(Chemin opposé).** — Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. L'application $\tau : [a, b] \to [a, b]$, $t \mapsto a + b - t$ consiste à parcourir l'intervalle $[a, b]$ en « sens inverse », i.e. en descendant de b vers a. Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to U$ de classe C^1, notons $\widetilde{\gamma}$ le chemin $\gamma \circ \tau : [a, b] \to U$, i.e. $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$ pour tout $t \in [a, b]$, et appelons-le le **chemin opposé** à γ.

---

[1] v. du 2/12/17 : correction d'une erreur dans la définition de chemin fermé simple (signalée par Yvon Bossut, merci à lui !) et d'un oubli dans l'exemple 20.13.

[2] On dit aussi « arc paramétré ».

(Q) ***Définition 20.4* (Somme de chemins)**. — Il est commode d'étendre la définition au cas de plusieurs intervalles, i.e. si l'on a, pour $k = 1, \dots, r$, des intervalles I_k et des chemins $\gamma_k : I_k \to \mathbb{R}^n$, on appellera « somme des γ_k » et l'on notera $\sum_{k=1}^{r} \gamma_i$ le chemin obtenu en parcourant successivement $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Donnons deux exemples dans $\mathbb{R}^2$:

(1) Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, soit $\mathscr{R}$ le carré $[a, b] \times [c, d]$ et soit γ le chemin qui fait le tour du carré dans le sens trigonométrique. La façon la plus simple de décrire γ est de définir les quatres chemins suivants :

$$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, c), \qquad \gamma_3 : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x, d),$$
$$\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^2, \quad y \mapsto (b, y), \qquad \gamma_4 : [c, d] \to \mathbb{R}^2, \quad y \mapsto (a, y),$$

et de poser $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \widetilde{\gamma_3} + \widetilde{\gamma_4}$. (Pour des raisons qui vont apparaître plus loin, on le notera aussi $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$.)

Bien sûr, on peut aussi paramétrer γ par l'intervalle $[0, 4]$ en posant :

$$(\diamondsuit) \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (a + t(b-a), c) & \text{pour } t \in [0, 1] \\ (b, c + (t-1)(d-c)) & \text{pour } t \in [1, 2] \\ (b + (t-2)(a-b), d) & \text{pour } t \in [2, 3] \\ (a, d + (t-3)(c-d)) & \text{pour } t \in [3, 4] \end{cases}$$

mais ceci est plus compliqué à écrire.

(2) Soit C la *couronne* fermée de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les centres de centre $O = (0, 0)$ et de rayons 1 et 2, c.-à-d.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}.$$

Son bord est la réunion des cercles Γ_k de centre O et de rayon k, pour $k = 1, 2$. Pour $t \in [0, 2\pi]$, posons $\gamma_k(t) = (k \cos(t), k \sin(t))$. Son bord ∂C, *orienté* par la condition qu'en parcourant le bord on ait toujours l'intérieur de C à sa gauche, est le chemin

$$\gamma_2 + \widetilde{\gamma_1} = \gamma_2 - \gamma_1,$$

i.e. il faut parcourir le cercle extérieur Γ_2 dans le sens trigonométrique mais le cercle intérieur Γ_1 dans le sens inverse. Dans cet exemple, la réunion de Γ_1 et Γ_2 n'est pas connexe, donc on ne peut pas la paramétrer par un seul intervalle, il faut vraiment utiliser deux chemins γ_1 et γ_2.

Dans ces deux exemples, on voit que la notion de « somme de chemins » permet d'utiliser plusieurs fois le même intervalle ($[a, b]$ ou $[c, d]$ ou $[0, 2\pi]$) pour paramétrer des chemins successifs, ce qui donne une plus grand souplesse de langage et d'écriture.

***Définition 20.5* (Chemins de classe C^1 par morceaux)**. — La paramétrisation $(\diamond)$ du bord d'un rectangle conduit aussi à introduire la notion de chemin *de classe C^1 par morceaux* : on appelle ainsi une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ telle que γ soit de classe C^1 sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, N-1$. Ainsi, le chemin γ peut avoir des « points anguleux » en les points $\gamma(a_i)$, comme c'est le cas pour le bord du rectangle, ou de n'importe quel polygône du plan.

Par exemple, le chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (3t, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3, \\ (1, 3t-1) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ (3-3t, 5-6t) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est de classe C^1 par morceaux. (Exercice : le dessiner !) Il n'est ni fermé ni simple : ses extrémités sont les points $(0, 0)$ et $(0, -1)$ et il passe deux fois au point $(0, 1/2)$.

(Q) ***Définition 20.6*** **(Formes différentielles)**. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(1) Une **forme différentielle** de degré 1 sur U continue (resp. C^1) est une application continue (resp. C^1) $\omega : U \to M_{1,n}(\mathbb{R})$, où $M_{1,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices lignes à n colonnes, i.e. des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Donc, pour tout $x \in U$, $\omega(x)$ est une matrice ligne

$$\omega(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$$

qui correspond à la forme linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto a_1(x)h_1 + \cdots + a_n(x)h_n$.

(2) Par exemple, si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 (resp. C^2) alors sa différentielle $df : U \to M_{1,n}(\mathbb{R})$, $x \mapsto df(x)$ est une forme différentielle de degré 1 continue (resp. C^1). On dit qu'une forme différentielle $\omega : U \to \mathbb{R}^n$ est **exacte** si $\omega = df$ pour une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Noter que si U est connexe alors f, si elle existe, est unique à l'addition d'une constante près. En effet, si $dg = \omega = df$ alors $d(g - f) = 0$ donc $g - f$ est constante d'après le corollaire 7.16.

(3) Dans la suite, on écrira simplement « forme différentielle » au lieu de « forme différentielle de degré 1 » et toutes les formes différentielles considérées seront supposées au moins de classe C^0 (i.e. continues).

(Q) ***Définition 20.7*** **(Intégrales de chemin)**. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega : U \to M_{1,n}(\mathbb{R})$ une forme différentielle continue, et $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin de classe C^1 à valeurs dans U. Alors, pour tout $t \in [a, b]$ on dispose de la forme linéaire $\omega(\gamma(t))$ et du vecteur $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$, donc on peut former la fonction

$$f(t) = \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))\gamma_i'(t),$$

où les fonctions a_i (resp. γ_i) sont les composante de ω (resp. de γ). Comme ω est continue et γ est C^1, la fonction f est continue. On définit alors l'intégrale de ω sur le chemin γ par :

$$(\clubsuit) \qquad \int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)\, dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Exemple 20.8 **(Intégrales de chemin d'une différentielle exacte)**

(Q) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 , où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin de classe C^1 à valeurs dans U. Alors on a :

$$(\heartsuit) \qquad \int_\gamma df = \int_a^b df(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En effet, l'application $\phi(t) = f(\gamma(t))$ est de classe C^1 et, pour tout $t \in [a, b]$ on a $\phi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$ donc l'intégrale ci-dessus est égale à $\phi(b) - \phi(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Remarque 20.9 **(Intégrale sur le chemin opposé)**. — Conservons les notations précédentes et soit $\widetilde{\gamma}$ le chemin opposé à γ, i.e. $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, où $\tau(t) = a + b - t$ pour tout $t \in [a, b]$. D'après la formule de dérivation d'une fonction composée, on a $\widetilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(a + b - t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et donc

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \omega = -\int_a^b \omega\big(\gamma(a + b - t)\big)\big(\gamma'(a + b - t)\big)\, dt.$$

Posons $f(t) = \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)$. Comme $\tau'(t) = -1$ pour tout t, la formule de changement de variable pour les fonctions d'une variable donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-t)|\tau'(t)|\,dt = \int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

(Q) et l'on a donc

(†)
$$\int_{\widetilde{\gamma}} \omega = -\int_{\gamma} \omega.$$

Donc : « *l'intégrale de chemin change de signe quand on remplace γ par le chemin opposé $\widetilde{\gamma}$* ». Ceci justifie de désigner $\widetilde{\gamma}$ par $-\gamma$: pour tout ω on a

(‡)
$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega.$$

En fait, ceci est un cas particulier de la proposition suivante :

(Q) ***Proposition 20.10***. — *Soit $\phi : [c,d] \to [a,b]$ un C^1-difféomorphisme (i.e. ϕ est C^1 et $\phi'(t)$ ne s'annule pas sur $[c,d]$). Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin de classe C^1 et soit $\delta = \gamma \circ \phi$. Alors on a :*

$$\int_{\delta} \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma} \omega & \text{si } \phi \text{ préserve l'orientation, i.e. si } \phi'(t) > 0 \text{ pour tout } t \in [a,b]; \\ \displaystyle -\int_{\gamma} \omega & \text{si } \phi \text{ renverse l'orientation, i.e. si } \phi'(t) < 0 \text{ pour tout } t \in [a,b]. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour tout $t \in [c,d]$ on a $(\gamma \circ \phi)'(t) = \phi'(t)\gamma'(\phi(t))$ et donc

$$\int_{\delta} \omega = \int_c^d \omega\Big(\gamma \circ \phi(t)\Big)\Big(\gamma'(\phi(t))\Big)\phi'(t)\,dt.$$

D'autre part, en tenant compte de la formule de changement de variables (pour les fonctions d'une variable), on a :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(x)\big)\big(\gamma' x)\big)\,dx = \int_c^d \omega\Big(\gamma \circ \phi(t)\Big)\Big(\gamma'(\phi(t))\Big)|\phi'(t)|\,dt$$

donc on voit que les deux expressions sont égales ou opposées selon que ϕ préserve ou renverse l'orientation. □

(Q) ***Définition 20.11*** **(Intégrales sur une somme de chemins)**. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega : U \to M_{1,n}(\mathbb{R})$ une forme différentielle continue. Si γ est une somme des chemins $\gamma_k : I_k \to U$, pour $k = 1, \ldots, r$, on pose

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_k} \omega.$$

Ceci justifie l'écriture $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r$, puisqu'on a ainsi :

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_r} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \cdots + \int_{\gamma_r} \omega.$$

Donnons trois exemples importants, tous les trois dans $\mathbb{R}^2$.

(Q) ***Exemple 20.12***. — Soient $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $\omega(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$, c'est-à-dire, puisque dx (resp. dy) est la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ de valeur constante la matrice ligne $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) :

$$\omega(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Soient $T \in \mathbb{R}_+$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma : [0,T] \to U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$. Alors, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$ et donc

$$\omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) = \frac{1}{R^2}(-R\sin(t), R\cos(t)) \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

pour tout $t \in [0,T]$. On a donc

$$\int_\gamma \omega = \int_0^T dt = T.$$

Par exemple, si $T = 2N\pi$, i.e. si l'on fait N fois le tour, dans le sens trigonométrique, du cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon R, cette intégrale vaut $2N\pi$. Par contre, si on tourne en sens inverse, i.e. si on définit $\delta(t) : [0,T] \to U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} R\cos(-t) \\ R\sin(-t) \end{pmatrix}$, alors

$$\int_\delta \omega = -\int_0^T dt = -T.$$

(Q) ***Exemple 20.13***. — Soient $a < c$ et $b < d$ dans $\mathbb{R}$, soient R le rectangle $[a,c]\times[b,d]$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant R, et $P, Q : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. Considérons la forme différentielle $\omega = P\,dx + Q\,dy$ sur U, i.e. pour tout $(x,y) \in U$, $\omega(x,y)$ est la matrice ligne $\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$. Introduisons les chemins suivants :

$$\gamma_1 : [a,c] \to U, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}, \qquad \delta_3 : [a,c] \to U, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 : [b,d] \to U, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} c \\ y \end{pmatrix}, \qquad \delta_4 : [b,d] \to U, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix},$$

$\gamma_3 = \widetilde{\delta_3}$ et $\gamma_4 = \widetilde{\delta_4}$, et soit $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_4$, i.e. le bord orienté ∂R du rectangle R.

Comme $\gamma_1'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\gamma_3'(x)$ et $\gamma_2'(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\gamma_4'(y)$, on obtient facilement que

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_a^c P(x,b)\,dx, \qquad \int_{\gamma_3} \omega = -\int_a^c P(x,d)\,dx$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_b^d Q(c,y)\,dy, \qquad \int_{\gamma_4} \omega = -\int_b^d Q(a,y)\,dy.$$

D'autre part, en utilisant Fubini on obtient que

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_b^d \left(\int_a^c \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\right) dy = \int_b^d \Big(Q(c,y) - Q(a,y)\Big) dy = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_4} \omega$$

et

$$\iint_D \frac{-\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^c \left(\int_b^d \frac{-\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^c \Big(P(x,b) - P(x,d)\Big) dx = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega.$$

On obtient donc l'égalité

$$(*) \qquad \int_{\partial R} P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

En posant $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, cette égalité se récrit de façon plus condensée (et esthétique) :

$$(**) \qquad \int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Ceci est la **formule de Green-Riemann** que l'on va énoncer (et démontrer) plus bas dans un cadre plus général.

(Q) ***Exemple 20.14***. — Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et soit $\omega = Pdx + Qdy$ la forme différentielle de l'exemple 20.12, i.e. $P(x,y) = -y/(x^2+y^2)$ et $Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$. On vérifie (exercice !) que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

et donc $d\omega = 0$. Soit C la couronne fermée de centre $O = (0,0)$ délimitée par les cercles Γ_r et Γ_R de centre O et de rayons $r < R$. Alors le bord de C, orienté par la condition qu'en parcourant le bord on ait toujours l'intérieur de C à sa gauche, est $\partial C = \Gamma_R - \Gamma_r$ et donc, d'après l'exemple 20.12, on a

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{\Gamma_R} \omega - \int_{\Gamma_r} \omega = 2\pi - 2\pi = 0,$$

ce qui est en accord avec la formule de Green-Riemann car $\iint_D d\omega = 0$ puisque $d\omega = 0$.

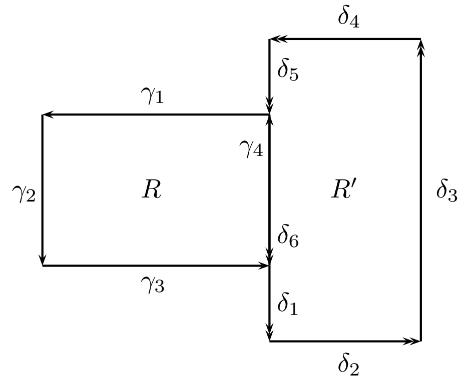
Avant d'énoncer la formule de Green-Riemann dans le cas général, observons d'abord qu'elle est valable pour une réunion de rectangles :

Proposition 20.15 **(Green-Riemann pour une réunion de rectangles)**

Soient $\mathscr{R}$ une réunion de rectangles, $\partial\mathscr{R}$ son bord orienté, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathscr{R}$ et $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle continue sur U. Alors on a

$$\int_{\partial\mathscr{R}} \omega = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{\mathscr{R}} d\omega.$$

Démonstration. — On a déjà vu que toute réunion de rectangles s'écrit comme réunion de rectangles d'intérieurs disjoints, il suffit donc de traiter ce cas. Pour simplifier, considérons le cas de deux rectangles :



Le bord orienté de R est $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_4$ et celui de R' est $\delta = \delta_1 + \cdots + \delta_6$. Par additivité de l'intégrale double et d'après la formule de Green-Riemann pour les rectangles R et R', on a

$$\iint_{R\cup R'} d\omega = \iint_R d\omega + \iint_{R'} d\omega = \int_\gamma \omega + \int_\delta \omega.$$

Or $\delta_6 = -\gamma_4$ donc ces deux intégrales de chemin s'annulent et dans le terme de droite ne reste que l'intégrale sur le chemin $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \delta_1 + \cdots + \delta_5$, qui est précisément le bord orienté de $R \cup R'$. ☐

Pour terminer cette section, donnons une façon alternative de présenter les intégrales de chemin : la *circulation* d'un champ de vecteurs sur un chemin. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard, défini par $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

(Q) ***Définition 20.16*** **(Circulation d'un champ de vecteurs)**. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $v : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. Grâce au produit scalaire, v définit aussi une forme différentielle ω sur U, définie par $\omega(x)(y) = v(x) \cdot y$ pour tout $x \in U$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Soit alors $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin de classe C^1 à valeurs dans U. On définit la **circulation** de v sur γ comme l'intégrale de chemin de la forme différentielle ω, i.e. on pose

$$(\spadesuit) \qquad \oint_\gamma v = \int_\gamma \omega = \int_a^b v\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Une interprétation en physique et mécanique de la circulation d'un champ de vecteurs est la notion de *travail d'une force.*

Définitions 20.17 **(Travail d'une force. Forces conservatives)**

Pour commencer, on se place dans $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'à l'origine $O = (0, 0, 0)$ se trouve un point matériel de masse m. Alors toute particule matérielle de masse $m' = 1$ située en un point $M \neq O$ est soumise à une force d'attraction gravitationnelle

$$F(M) = \frac{m}{G}\frac{1}{OM^3}\overrightarrow{MO}$$

où G est la constante universelle de gravitation. De même, si en O se trouve une charge électrique $q > 0$, alors toute particule chargée de charge $q' = -1$ située en un point $M \neq O$ est soumise à une force électrostatique (force de Coulomb)

$$F(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM^3}\overrightarrow{MO}$$

où ε_0 est une certaine constante (appelée permittivité du vide). Si l'on néglige les constantes, on obtient dans les deux cas que la particule massique ou chargée en O crée dans $\mathbb{R}^3 - \{O\}$ un « champ de forces », i.e. le champ de vecteurs

$$v(M) = \frac{-1}{OM^3}\overrightarrow{OM}.$$

Ceci conduit aux définitions suivantes. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un « champ de forces » continu sur U, i.e. un champ de vecteurs continu $F = U \to \mathbb{R}^n$. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin de classe C^1 reliant les points $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$, on définit le **travail** $W_\gamma(F)$ de la force F le long de γ comme la circulation sur γ du champ de vecteurs F, i.e.

$$W_\gamma(F) = \oint_\gamma F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

On dit que la force F est **conservative** si, pour tous points $A, B \in U$, le travail ci-dessus ne dépend que de A et B, et pas du choix du chemin γ reliant A à B.

On a déjà vu en 20.8 que ceci est le cas si F est le champ de gradients d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. En fait, la réciproque est vraie, i.e. on a la proposition suivante.

Proposition 20.18. — *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de forces conservatif sur U.*

(i) *Il existe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F(x) = \nabla f(x)$ pour tout $x \in U$.*

(ii) *f est unique à l'addition d'une constante près, i.e. si $F = \nabla g$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = f(x) + \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. — (i) Fixons un point $A \in U$. Comme U est connexe alors pour tout $B \in U$ il existe au moins un chemin γ joignant A à B et l'on pose

$$f(B) = W_\gamma(F) = \oint_\gamma F.$$

Par hypothèse, ceci ne dépend pas du choix de γ, i.e. l'application $f : U \to \mathbb{R}$ est bien définie. Montrons qu'elle est de classe C^1. Fixons un point $B \in U$, un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert et F continu en B, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leq \delta$ on ait $B + tv \in U$ et

$$\|F(B + tv) - F(B)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel t et posons $C = B + tv$. Soit β (resp. γ) un chemin joignant A à B (resp. à C) et, pour $s \in [0, 1]$, posons $\phi(s) = B + stv$, i.e. ϕ est une paramétrisation du segment joignant B à C. On a $\phi'(s) = tv$ pour tout $s \in [0, 1]$. Le point-clé est que les chemins $-\beta+\gamma$ et ϕ sont deux chemins joignant B à C donc, par hypothèse, on a

$$f(C) - f(B) = \oint_{\gamma-\beta} F = \oint_\phi F = \int_0^1 F(B + stv) \cdot tv\, ds.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} |f(B + tv) - f(B) - tF(B) \cdot v| &= \left| t \int_0^1 \big(F(B + stv) - F(B)\big) \cdot v\, ds \right| \\ &\leq |t| \int_0^1 \Big| \big(F(B + stv) - F(B)\big) \cdot v \Big|\, ds \leq |t|\, \varepsilon\, \|v\|_2 \end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci montre que la dérivée partielle de f suivant le vecteur v existe en B et vaut $(\partial f/\partial v)(B) = F(B)\cdot v$. Comme F est continue, ceci montre que f admet en B des dérivées partielles continues, donc f est C^1 et $\nabla(f)(B) = F(B)$ pour tout $B \in U$. Ceci prouve (i).

(ii) Si $g : U \to \mathbb{R}$ vérifie $\nabla g = F$ alors $d(g - f) = 0$ donc, puisque U est connexe, $g - f$ est constante (cf. Corollaire 7.16). □

***Remarques 20.19* (Énergie potentielle)**. — (1) En physique et en mécanique, si $F = \nabla(f)$ est un champ de forces conservatif, on introduit la fonction « énergie potentielle » $V = -f$ et l'on dit que F « dérive du potentiel V » (i.e. ceci signifie que $F = -\nabla V$).

(2) Le champ gravitationnel (ou coulombien) F considéré en 20.17 est conservatif. En effet, pour tout $M = (x, y, z) \neq O$, posons $r(x, y, z) = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors $f = 1/r$ est de classe C^1

sur $\mathbb{R}^3 - \{O\}$ et l'on a

$$df(x,y,z) = \frac{-dr(x,y,z)}{r^2} = -\frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} \qquad \text{i.e.} \qquad \nabla(f)(M) = \frac{-\overrightarrow{OM}}{OM^3} = F(M),$$

donc F est le champ de gradients de f, donc dérive du potentiel $V = -1/r$. Ceci explique le choix du signe moins : on veut que l'énergie potentielle V croisse lorsqu'on s'éloigne de l'origine.

21. Formule de Green-Riemann

(Q) ***Théorème 21.1* (Green-Riemann).** — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K est une somme de chemins de classe C^1. On oriente chacun d'eux par la condition qu'en parcourant chaque chemin on ait toujours l'intérieur de K à sa gauche. Alors :*

(1) *K est quarrable.*

(2) *Soit $\omega : U \to \mathbb{R}$ une forme différentielle de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant K. Écrivons $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, i.e. pour tout $h = \binom{h_1}{h_2} \in \mathbb{R}^2$ on a $\omega(x,y)(h) = P(x,y)h_1 + Q(x,y)h_2$. Alors, on a la formule de Green-Riemann :*

$$\int_{\partial K} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_K d\omega.$$

Démonstration. — Dans le cas général, contentons-nous de donner l'idée d'une démonstration : pour tout $\varepsilon > 0$ on peut approximer K par une réunion finie $\mathscr{P}_\varepsilon$ de rectangles, telle que

$$\left|\iint_K d\omega - \iint_{\mathscr{P}_\varepsilon} d\omega\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{\partial K} \omega - \int_{\partial \mathscr{P}_\varepsilon} \omega\right| < \varepsilon.$$

Comme $\iint_{\mathscr{P}_\varepsilon} d\omega = \int_{\partial \mathscr{P}_\varepsilon} \omega$, il en résulte que

$$\left|\iint_K d\omega - \int_{\partial K} \omega\right| < 2\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité voulue. □

Donnons toutefois une démonstration directe dans le cas où K est délimité par des graphes :

(Q) ***Proposition 21.2.*** — *Soient $a < c$ dans $\mathbb{R}$ et soient $b, h : [a,c] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $b(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a,c]$. Soit K le compact quarrable suivant :*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq c, \quad b(x) \leq y \leq h(x)\},$$

soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant K, soient $P, Q : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 et soit ω la forme différentielle $Pdx + Qdy$. Notant ∂K le bord de K orienté dans le sens trigonométrique, on a

$$\int_{\partial K} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_K d\omega.$$

Démonstration. — Considérons les chemins suivants :

$$\gamma_1 : [a,c] \to U, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ b(x) \end{pmatrix}, \qquad \gamma_3 : [a,c] \to U, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 : [b(c), h(c)] \to U, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} c \\ y \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4 : [b(a), h(a)] \to U, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix},$$

alors $\partial K = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$. On a $\gamma_2'(y) = \binom{0}{1}$ et de même pour $\gamma_4'(y)$, donc

$$(1) \qquad \int_{\gamma_2} \omega = \int_{b(c)}^{h(c)} Q(c,y)\,dy, \qquad \int_{-\gamma_4} \omega = -\int_{b(a)}^{h(a)} Q(a,y)\,dy.$$

De même, on a

$$(2) \qquad \int_{\gamma_1} \omega = \int_a^c \Big(P(x,b(x)), Q(x,b(x))\Big) \begin{pmatrix} 1 \\ b'(x) \end{pmatrix} dx = \int_a^c \Big(P(x,b(x)) + Q(x,b(x))b'(x)\Big) dx$$

et

$$(3) \qquad \int_{-\gamma_3} \omega = -\int_a^c \Big(P(x,h(x)) + Q(x,h(x))h'(x)\Big) dx.$$

D'autre part, d'après le théorème de Fubini, on a

$$(4) \qquad \iint_K \frac{-\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^c \left(\int_{b(x)}^{h(x)} \frac{-\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right) dx = \int_a^c \Big(P(x,b(x)) - P(x,h(x))\Big) dx.$$

D'après Fubini, on a aussi

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_a^c \left(\int_{b(x)}^{h(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy\right) dx.$$

Introduisons la fonction de trois variables $F(s,t,x) = \int_s^t Q(x,y)dy$. D'après la section 15, F est de classe C^1 et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t,x) = Q(x,t), \qquad \frac{\partial F}{\partial s}(s,t,x) = -Q(x,s), \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(s,t,x) = \int_s^t \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

d'où en particulier

$$(5) \qquad \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_a^c \frac{\partial F}{\partial x}(b(x),h(x),x)\,dx.$$

La fonction $\phi(x) = F(b(x),h(x),x)$ est de classe C^1 et l'on a

$$\phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(b(x),h(x),x) + \frac{\partial F}{\partial s}(b(x),h(x),x)b'(x) + \frac{\partial F}{\partial t}(b(x),h(x),x)h'(x).$$

Par conséquent on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(b(x),h(x),x) = \phi'(x) + Q(x,b(x))b'(x) - Q(x,h(x))h'(x)$$

et donc le terme de droite de (5) est égal à

$$(6) \qquad \phi(c) - \phi(a) + \int_a^c \Big(Q(x,b(x))b'(x) - Q(x,h(x))h'(x)\Big) dx.$$

Comme $\phi(c) = \int_{b(c)}^{h(c)} Q(c,y)dy$ et $\phi(a) = \int_{b(a)}^{h(a)} Q(a,y)dy$, on obtient en combinant (1), (2), (3) d'une part et (4), (5), (6) de l'autre, qu'on a l'égalité

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial K} \omega.$$

Ceci prouve la proposition. □

(Q) ***Définitions 21.3* (Rotationnel et divergence).** — (1) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $v : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C^1. On lui associe les applications continues $U \to \mathbb{R}$ suivantes :

(i) Son *rotationnel*, noté $\mathrm{rot}(v)$, est l'application $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(ii) Sa **divergence**, noté $\mathrm{div}(v)$, est l'application $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

(2) Donnons aussi les définitions analogues dans $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $v : U \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C^1.

(i) Sa **divergence**, noté $\mathrm{div}(v)$, est l'application continue $U \to \mathbb{R}$ égale à $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

(ii) Par contre, son **rotationnel**, noté $\mathrm{rot}(v)$, est le champ de vecteurs sur U défini par la *formule symbolique* [(3)] suivante :

$$\mathrm{rot}(v) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

c.-à-d., notant pour abréger Q_x au lieu de $\partial Q/\partial x$, etc., on a :

$$\mathrm{rot}(v) = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}.$$

On peut déjà récrire la formule de Green-Riemann en termes de circulation d'un champ de vecteurs :

(Q) ***Corollaire 21.4.*** — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K est une somme de chemins de classe C^1. On oriente chacun d'eux par la condition qu'en parcourant chaque chemin on ait toujours l'intérieur de K à sa gauche. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant K et $v : U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Alors on a :*

$$\oint_{\partial K} v = \iint_K \mathrm{rot}(v)\, dxdy.$$

Avant de définir le *flux* d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à travers un chemin, commençons par la remarque suivante pour mettre en perspective la notion de flux.

Remarque 21.5 **(Hypersurfaces et flux).** — Soit n un entier ≥ 2. On définit une « hypersurface paramétrée » de $\mathbb{R}^n$ comme une application $f : P \to \mathbb{R}^n$, où P est un pavé fermé de $\mathbb{R}^{n-1}$ d'intérieur non vide, et f une application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant P, telle que f soit injective sur l'intérieur de P.

Par exemple, si on se donne un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$, un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant R et une application $f : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, injective sur le rectangle ouvert, alors $f(R)$ est une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, prenant $U = \mathbb{R}^2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$f(\theta, \varphi) = (R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\theta)),$$

on voit que la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon R est une surface paramétrée.

---

(3) Ce n'est qu'un moyen mnémotechnique pour retenir la définition de $\mathrm{rot}(v)$.

Pour tout champ de vecteurs v sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'hypersurface paramétrée $f(P)$, on peut définir une certaine intégrale, appelée le *flux* de v à travers $f(P)$. Par exemple, on verra dans la section suivante comment calculer le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$. Pour $n \geq 3$, les notions de circulation et flux d'un champ de vecteurs sont de nature différentes.

Mais pour $n = 2$, une « hypersurface paramétrée » de $\mathbb{R}^2$ n'est autre qu'un chemin paramétré $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, injectif sur $]a, b[$. [(4)] Pour cette raison, le flux d'un champ de vecteurs v à travers un chemin fermé simple est encore défini par une intégrale de chemin.

(Q) ***Définition 21.6* (Flux et normale sortante).** — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \to U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ un chemin de classe C^1 à valeurs dans U et $v : U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs continu sur U. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ la rotation d'angle $-\pi/2$. On définit le **flux** de v à travers γ par la formule :[(5)]

$$\begin{aligned}\mathrm{Flux}_\gamma(v) = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot A\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \begin{pmatrix} P(\gamma(t)) \\ Q(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt \\ = \int_a^b \Big(P(\gamma(t))y'(t) - Q(\gamma(t))x'(t) \Big) dt.\end{aligned}$$

Le flux a la *signification géométrique* suivante. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K est une somme de chemins fermés simples $\gamma_1, \ldots, \gamma_r : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, qui sont tous *réguliers*, i.e. tels que $\gamma_i'(t) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et $t \in [0, 1]$. Alors chaque chemin γ_i admet au point $\gamma_i(t)$ une droite tangente, qui est engendrée par le vecteur $\gamma_i'(t)$. On oriente chaque γ_i par la condition qu'en le parcourant on ait toujours l'intérieur de K à sa gauche ; alors le vecteur $A\gamma_i'(t)$ est le vecteur *normal* (i.e. orthogonal) à la tangente, de même longueur que $\gamma_i'(t)$, dirigé vers *l'extérieur* de K ; on dit que c'est un vecteur « normal sortant ».

Alors que la circulation de v sur $\gamma = \partial K$ est l'intégrale sur γ de la composante tangentielle de v (donnée par le produit scalaire avec le vecteur tangent $\gamma'(t)$), le **flux** de v à travers $\gamma = \partial K$ est l'intégrale sur γ de la composante normale de v (comptée positivement si elle sort et négativement si elle rentre).

D'autre part, comme $P(\gamma(t))y'(t) - Q(\gamma(t))x'(t) = \begin{pmatrix} -Q(\gamma(t)) \\ P(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, on voit que ce flux est la circulation du champ de vecteurs $\widetilde{v}$ sur U défini par

$$\widetilde{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -Q(x, y) \\ P(x, y) \end{pmatrix} = A^{-1} v(x, y)$$

où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle $+\pi/2$. On a donc, par définition,

$$\mathrm{Flux}_\gamma(v) = \oint_\gamma \widetilde{v}.$$

(4) Noter que γ se prolonge en une application $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, définie par $\widetilde{\gamma}(x) = \gamma(b) + (x - b)\gamma'(b)$ pour $x > b$ et $\widetilde{\gamma}(x) = \gamma(a) + (x - a)\gamma'(a)$ pour $x < a$.

(5) Souvent la définition n'est donnée que lorsque γ est un chemin fermé simple, ou une somme de tels chemins.

Notons enfin que $\mathrm{rot}(\widetilde{v}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ est la **divergence** de v. On déduit donc de la formule de Green-Riemann le :

(Q) ***Corollaire 21.7*** **(Formule de la divergence dans $\mathbb{R}^2$).** — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K est une somme de chemins de classe C^1. On oriente chacun d'eux par la condition qu'en parcourant chaque chemin on ait toujours l'intérieur de K à sa gauche. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant K et $v : U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Alors on a :*

$$\mathrm{Flux}_{\partial K}(v) = \iint_K \mathrm{div}(v)\, dxdy.$$

Pour terminer cette section, donnons l'application suivante.

Proposition 21.8. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ contenant dans son intérieur le point $O = (0, 0)$ et dont le bord est un chemin fermé simple γ de classe C^1. Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ défini par $v(M) = \dfrac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$. Alors :*

$$\mathrm{Flux}_\gamma(v) = 2\pi.$$

Démonstration. — Comme K contient O dans son intérieur, il existe $R > 0$ tel que K contienne le disque ouvert D de centre O et de rayon R. Notons C le compact $K - D$, son bord orienté est $\partial C = \gamma - \Gamma_R$, où Γ_R désigne le cercle de centre O et de rayon R. On a

$$\mathrm{Flux}_\gamma(v) - \mathrm{Flux}_{\Gamma_R}(v) = \mathrm{Flux}_{\partial C}(v) = \iint_C \mathrm{div}(v)\, dxdy.$$

Comme $v(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$\mathrm{div}(v) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\Big(x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2\Big) = 0$$

et donc $\mathrm{Flux}_\gamma(v) = \mathrm{Flux}_{\Gamma_R}(v)$. Or on peut calculer le second flux : pour $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\Gamma_R(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma'_R(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{Flux}_{\Gamma_R}(v) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

□

22. Intégrales de surfaces dans $\mathbb{R}^3$ et formules d'Ostrogradsky et de Stokes

Cette section n'a pas été traitée en cours et n'est pas au programme de l'examen. Elle sera rédigée ultérieurement.

FIN (à la date du 4/12/2016)