Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
Licence de Mathématiques, 2ème année

Fonctions de plusieurs variables, analyse vectorielle, intégrales multiples

2M216

Patrick Polo

CHAPITRE 1

FONCTIONS CONTINUES SUR $\mathbb{R}^n$, COMPACITÉ ET CONSÉQUENCES

1. Fonctions continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$: un résumé

[1] [2] Le but du cours est de définir et étudier les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui sont différentiables et dont les dérivées partielles sont continues. Il faut donc commencer par introduire la notion de fonction continue $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

***Terminologie 1.1* (Applications et fonctions).** — Soient X, Y deux ensembles.

(1) Une *application* $f : X \to Y$ est la donnée pour tout $x \in X$ d'un élément $f(x) \in Y$.

(2) Une *fonction* $f : X \to Y$ est une application à valeurs dans Y qui n'est définie que sur un sous-ensemble de X, appelé le *domaine de définition* de f et noté $\mathscr{D}_f$. Ce sous-ensemble n'est en général pas explicité et sa détermination est laissée au lecteur.

***Exemple 1.2*.** — La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 3)$ n'est définie au point (x,y) que si $x^2+y^2 > 3$. Son domaine de définition est donc $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 3\}$; c'est le complémentaire du disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. D'autre part, anticipant sur la définition qui va suivre, les fonctions $P : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 3$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(t)$ sont continues, donc $f = \ln \circ P$ est continue sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$. (On verra plus loin que f est différentiable sur $\mathscr{D}_f$.)

On note $|t|$ la valeur absolue d'un réel t et, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose

$$\|x\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

(Q) ***Définition 1.3* (Fonctions continues).** — Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

(i) Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que f est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on ait :

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

(ii) Si A est un sous-ensemble de $\mathscr{D}_f$, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

(Si $n = 1 = p$, on retrouve la définition connue pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

---

[1] Version du 11 mai 2016.

[2] Les symboles **(Q)** dans la marge signalent des énoncés (définitions ou résultats) qu'il faut absolument assimiler et qui pourront faire l'objet de questions de cours à l'examen.

Terminologie 1.4. — Lorsqu'on dira « f est continue en a » ou « f est continue sur A » ou « f est une fonction continue de A dans $\mathbb{R}^p$ », ceci sous-entendra toujours que $a \in \mathscr{D}_f$ et $A \subset \mathscr{D}_f$.

Notation 1.5. — Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, on notera $\mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}^p$.

On peut aussi définir la notion de suite convergente :

***Définition 1.6* (Limite d'une suite)**. — Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.[3] On dit que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^n$, et on note $x^k \to a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\|x^k - a\| < \varepsilon$.

(Q) ***Proposition 1.7***. — *Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$.*

(i) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour $i = 1, \ldots, n$, la suite $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des i-èmes coordonnées converge vers un réel a_i. Dans ce cas, $a = (a_1, \ldots, a_n)$.*

(ii) *Par conséquent, si elle existe, la limite de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est* unique.

Démonstration. — Supposons $x^k \to a$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\|x^k - a\| < \varepsilon$. Comme $|x_i^k - a_i| \leq \|x^k - a\|$ pour tout i, on obtient $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui montre que $x_i^k \to a_i$ dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que $x_i^k \to a_i$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_i$, on ait $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$. Posons $k_0 = \max(k_1, \ldots, k_n)$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Alors pour tout $k \geq k_0$, on a $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$ et donc $\|x^k - a\| < \varepsilon$, ce qui montre que $x^k \to a$.

Ceci prouve (i), et (ii) en découle (par l'unicité déjà connue des limites dans $\mathbb{R}$). ☐

On vérifie facilement qu'on a les propriétés suivantes, comme dans le cas des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(Q) ***Proposition 1.8***. — *Considérons deux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.*

(i) *Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

(ii) *Par conséquent, si $f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{C}(f(A), \mathbb{R}^q)$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}(A, \mathbb{R}^q)$.*

(Q) ***Proposition 1.9***. — *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathscr{D}_f$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a.*

(ii) *Pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers a, la suite $f(x^k)$ de $\mathbb{R}^p$ converge vers $f(a)$.*

Remarque 1.10. — En général, pour montrer qu'une fonction donnée f est continue, on utilise directement la définition 1.3. Par contre, la caractérisation en termes de suites convergentes est utile pour démontrer des résultats généraux sur les fonctions continues, en se ramenant à des résultats déjà démontrés pour les suites.

(Q) ***Proposition 1.11***. — *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Toute combinaison linéaire de fonctions continues $E \to \mathbb{R}^p$ est continue. Autrement dit, $\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

(ii) *Si $p = 1$, le produit de deux fonctions continues $E \to \mathbb{R}^p$ est continu.*

(iii) *Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est définie et continue en a.*

---

[3] Les termes de la suite sont notés x^k, avec k en exposant, afin de pouvoir noter $x_1^k, \ldots, x_n^k$ les coordonnées du vecteur x^k.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Remarquons qu'une application $f : A \to \mathbb{R}^p$ est donnée par ses p applications coordonnées $f_i : A \to \mathbb{R}$, i.e. pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans A on a :

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

(Q) ***Proposition 1.12.*** — *Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une application $A \to \mathbb{R}^p$.*

(i) *Soit $a \in A$. Alors f est continue en a ssi les f_i $(i = 1, \ldots, p)$ le sont.*

(ii) *Par conséquent, f est continue sur A ssi chaque f_i l'est.*

Démonstration. — (i) Supposons $f_1, \ldots, f_p$ continues en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f_i est continue en a, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on ait

$$\|x - a\| < \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon.$$

Soit $\delta = \min \delta_i$, alors $\delta > 0$ et pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\| < \delta$, on a $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ et donc $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Ceci montre que f est continue en a. La réciproque est analogue (et plus facile) et laissée au lecteur. Ceci prouve (i), et (ii) en découle. $\square$

On a ainsi ramené l'étude de la continuité des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ à celle des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Attention : on ne peut pas aller plus loin, i.e. se ramener au cas des fonctions d'une variable $f_a^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_a^i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Considérons en effet l'exemple suivant :

Exemple 1.13. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et soit $a = (0, 0)$. L'application partielle $f_a^1 : t \mapsto f(t, 0) = 0$ est nulle, donc continue sur $\mathbb{R}$, et il en est de même de $f_a^2 : t \mapsto f(0, t) = 0$. Par contre, f n'est pas continue en $a = (0, 0)$. En effet, la suite définie par $x^k = (1/k, 1/k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ converge vers a mais l'on a $f(x^k) = 1/2$ donc $f(x^k)$ ne converge pas vers $f(a) = 0$.

Un cas particulier d'applications continues est le suivant.

(Q) ***Définition 1.14*** **(Applications lipschitziennes)**. — Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et soit f une application $A \to \mathbb{R}^p$.

(i) On dit que f est L-lipschitzienne[4], où L est un réel > 0, si pour tout $x, y \in A$ on a :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L \, \|y - x\|. \tag{$*$}$$

(ii) Il est clair qu'alors f est continue sur A : pour tout $\varepsilon > 0$ et $x, y \in A$, on a l'implication $\|y - x\| < \varepsilon/L \Longrightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$.

(iii) Si L est le plus petit réel > 0 vérifiant $(*)$, on dit que L est la constante de Lipschitz de f.

Exemples 1.15 **(d'applications continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$)**. — (1) Pour tout i, la projection $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

(Q) (2) **Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue**. En effet, chaque composante $f_1, \ldots, f_p$ de f est une forme linéaire, ce qui nous ramène au cas où $p = 1$. Dans ce cas, $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ donc f est une combinaison linéaire des π_i, donc est continue.

[4] Rudolf Lipschitz, mathématicien allemand (1832-1903).

(3) Une fonction polynomiale (ou polynôme) sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = \sum_{k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_k\, x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

où les $a_k \in \mathbb{R}$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Si les a_k ne sont pas tous nuls, on pose $\deg(P) = \max\{k_1 + \cdots + k_n \mid a_k \neq 0\}$. Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}^n$ puisque c'est une combinaison linéaire de produits de fonctions continues.

***Exemple 1.16* (de polynôme).** — Pour $n = 2$, un polynôme de degré 2 s'écrit sous la forme

$$P(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,0}x_1 + a_{0,1}x_2 + a_{2,0}x_1^2 + a_{1,1}x_1x_2 + a_{0,2}x_2^2,$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Pour étudier la dérivabilité en a d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a besoin que f soit définie sur un intervalle ouvert contenant a. Ceci nous conduit à introduire les parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$:

(Q) ***Définition 1.17* (Ouverts et fermés).** — Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

(i) On dit que F est un **fermé** si pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}^n$ vers une limite ℓ, on a $\ell \in F$. (Noter que, par définition, $\varnothing$ est fermé, ainsi que $\mathbb{R}^n$.)

(ii) Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit **ouvert** si son complémentaire ${}^cU = \mathbb{R}^n - U$ est fermé.

(Q) ***Terminologie 1.18* (Image réciproque).** — Soit $f : X \to Y$ une application.

(1) Pour tout sous-ensemble B de Y, on note $f^{-1}(B)$ et l'on appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \in B$, i.e.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

(2) Alors, pour tout sous-ensemble A de X, on a l'équivalence :

$$A \subset f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(A) \subset B.$$

(Q) ***Proposition 1.19.*** — *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue.*

(i) *Si F est un fermé de $\mathbb{R}^p$, son image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *De même, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — (i) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^p$ et $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(F)$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$. Comme f est continue, la suite $f(x^k)$ converge vers $f(\ell)$, et comme cette suite est à valeurs dans F qui est fermé, on a $f(\ell) \in F$ et donc $\ell \in f^{-1}(F)$. Ceci prouve que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^p - U$ le fermé complémentaire. Alors on a

$$\mathbb{R}^n = f^{-1}(F) \sqcup f^{-1}(U)$$

où le symbole $\sqcup$ désigne une réunion disjointe (en effet, tout élément de $\mathbb{R}^n$ est envoyé par f soit dans U, soit dans F). D'après (i), $f^{-1}(F)$ est fermé donc son complémentaire $f^{-1}(U)$ est ouvert. $\square$

La proposition précédente est très utile pour montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est ouvert ou fermé. Donnons-en des exemples.

Exemples 1.20. — (1) L'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_i x_i^2$ est polynomiale donc continue et le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par conséquent, la sphère unité (pour la norme euclidienne) :

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > z^2\}$ la région « à l'extérieur » du cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$. La fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ et $U = f^{-1}(]0, +\infty[)$. Comme $]0, +\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, on en déduit que U est ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

2. Parties compactes de $\mathbb{R}^n$: un résumé

(Q) ***Définition 2.1.*** — On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est **bornée** s'il existe un réel $R > 0$ tel que $\|a\| \leq R$ pour tout $a \in A$. Dans ce cas, si $B \subset A$ il est clair que B est aussi borné.

***Exemple 2.2* (important).** — Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant dans $\mathbb{R}^n$ vers une limite ℓ. Alors l'ensemble $\{x_k,\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est borné.

En effet, prenant $\varepsilon = 1$ il existe k_0 tel que $\|x^k - \ell\| < 1$ pour tout $k > k_0$. Alors, pour $i = 1, \dots, n$ et $k > k_0$ on a :

$$|x_i^k| \leq |x_i^k - \ell_i| + |\ell_i| < \|\ell\| + 1$$

et donc $\|x^k\| < \|\ell\| + 1$.[5] Par conséquent, posant $R_0 = \max_{k\leq k_0} \|x^k\|$ et $R = \max(R_0, \|\ell\| + 1)$, on obtient $\|x^k\| \leq R$ pour tout k.

(Q) ***Définition 2.3.*** — Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite **compacte** si elle vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, c.-à-d. : de toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément a de K.

Rappel 2.4. — On rappelle que, pour tout $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[a, b]$ est compact.

(Q) ***Théorème 2.5.*** — (i) *Pour $j = 1, \dots, n$, soient $a_j \leq b_j$ dans $\mathbb{R}$ et $I_j = [a_j, b_j]$. Alors le « pavé fermé »*

$$\mathscr{P} = I_1 \times \cdots \times I_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j \ \text{ pour } j = 1, \dots, n\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. — (i) Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}$. Alors, pour $j = 1, \dots, n$, chaque suite x_j^k est à valeurs dans l'intervalle $I_j = [a_j, b_j]$. D'après 2.4, on peut extraire une sous-suite $x^{\varphi_1(k)}$ dont la première coordonnée converge vers un réel $a_1 \in I_1$, i.e. telle que la suite $x_1^{\varphi_1(k)}$ converge vers a_1.

Puis on peut extraire de cette suite une sous-suite $x^{\varphi_2(k)}$ (i.e. $\varphi_2(k) = \varphi_1(\psi(k))$ pour une certaine fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) dont la seconde coordonnée converge vers un réel $a_2 \in I_2$. Après n extractions, on obtient une suite $y^k = x^{\varphi_n(k)}$ dont la j-ème coordonnée converge vers un réel $a_j \in I_j$, pour $j = 1, \dots, n$. Alors y^k converge vers $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{P}$. Ceci prouve que $\mathscr{P}$ est compact.

(ii) Supposons K fermé et borné, disons $\|a\| \leq R$ pour tout $a \in K$. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. Comme K est contenu dans le pavé I^n, où $I = [-R, R]$, il existe une suite

[5] On vient de démontrer ici, dans un cas particulier, que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

extraite $x^{\varphi(k)}$ d'éléments de K qui converge vers un élément a de I^n, et comme K est supposé fermé on a $a \in K$. Ceci prouve que K est compact.

Réciproquement, supposons K compact et montrons que K est fermé et borné. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K convergeant dans $\mathbb{R}^n$ vers une limite ℓ. Comme K est compact, il existe une suite extraite $x^{\varphi(k)}$ convergeant vers une limite $a \in K$ et comme $x^k \to \ell$ on a nécessairement $\ell = a$ donc $\ell \in K$. Ceci montre que K est fermé. Montrons qu'il est borné. Dans le cas contraire, il existerait une suite x^k d'éléments de K telle que $\|x^k\| > k$ pour tout k, et toute suite extraite serait non bornée, donc non convergente (d'après l'exemple 2.2), une contradiction. Ceci montre que K est borné. □

(Q) ***Théorème 2.6.*** — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}^p$ une application continue.*

(i) *$f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.*

(ii) *En particulier, si $p = 1$ alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $a, b \in K$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. — (i) Soit $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$ et, pour tout k, soit x^k un élément de K tel que $f(x^k) = y^k$. Comme K est compact, on peut extraire de la suite x^k une sous-suite $x^{\varphi(k)}$ convergeant vers un élément $a \in K$. Comme f est continue, la suite $y^{\varphi(k)} = f(x^{\varphi(k)})$ converge vers $f(a) \in f(K)$. Ceci montre que $f(K)$ est compact (donc fermé et borné).

(ii) D'après ce qui précède, $f(K)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$: elle possède donc une borne inférieure α (resp. supérieure β) et comme $f(K)$ est fermé on a $\alpha, \beta \in f(K)$ donc il existe $a, b \in K$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. □

Définition 2.7. — Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $B = f(A)$. On dit que f est un **homéomorphisme** de A sur B si :

(1) f est continue et bijective.

(2) L'application inverse $f^{-1} : B \to A$ est continue.

Noter que la condition (2) n'est **pas** conséquence de la condition (1) : par exemple, l'application $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $t \mapsto e^{it}$ est continue et bijective, mais n'est pas un homéomorphisme. (Exercice : le démontrer !) Par contre, une propriété agréable des compacts est la :

Proposition 2.8. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}^p$ une application continue et bijective. Alors f est un homéomorphisme de K sur $f(K)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que f^{-1} est continue en tout point b de $f(K)$. Soit $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$ convergeant vers $b = f(a)$. Montrons que la suite $x^k = f^{-1}(y_k)$ converge vers a.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe $r > 0$ et une suite extraite $u^k = x^{\varphi(k)}$ telle que $\|u^k - a\| \geq r$ pour tout k. Comme K est compact, on peut extraire de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $v^k = u^{\psi(k)}$ qui converge vers $\ell \in K$, et l'on a $\|\ell - a\| \geq r$ donc $\ell \neq a$. Comme f est continue, la suite $f(v^k)$ converge vers $f(\ell)$. D'autre part, $f(v^k)$ est une suite extraite de $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$, donc converge vers $b = f(a)$. Donc $f(\ell) = f(a)$, contredisant la bijectivité de f. □

Une autre propriété importante des parties compactes, qui sera utile pour la définition des intégrales multiples, est donnée par le théorème ci-dessous.

Définition 2.9. — Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite **uniformément continue** sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Remarque 2.10. — Cette propriété est *plus forte* que la continuité en tout point x de A. En effet, dans la définition de la continuité en un point x, le δ dépend à la fois de ε et de x. Par contre, ε étant donné, la définition plus haut exige l'existence d'un δ qui donne la majoration $\|f(x)-f(y)\| < \varepsilon$ de façon « uniforme » en x, i.e. pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tel que $\|x - y\| < \delta$.

Par exemple, on pourra vérifier que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$ est continue mais **pas** uniformément continue.

***Théorème 2.11* (Heine)**. — *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$. Alors f est uniformément continue sur K.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $x^k, y^k \in K$ tels que $\|x^k - y^k\| < 1/k$ et $\|f(x^k) - f(y^k)\| \geq \varepsilon_0$. Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite $x^{\varphi_1(k)}$ qui converge vers un élément x de K, puis une sous-suite $y^{\varphi_1(\varphi_2(k))}$ qui converge vers un élément y de K. Posant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ et notant $u^k = x^{\varphi(k)}$ et $v^k = y^{\varphi(k)}$, on obtient que $u \to x$ et $v \to y$.

Comme f est continue, $f(u^k) - f(v^k)$ converge vers $f(x) - f(y)$ et l'on en déduit que $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0$. D'autre part, comme $\|u^k - v^k\| < 1/\varphi(k) \leq 1/k$, on en déduit que $x = y$, d'où $f(x) = f(y)$ ce qui contredit l'inégalité $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0$. $\square$