# Corrigé de l'examen 2ème session du 15 juin 2016 (durée 2h)

**Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Les quatre exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. L'examen est noté sur **100**.

***Exercice 1.*** — (environ 18 pts) On pose $f(x,y) = x^6 + x^2 + 2y^2 - 2y(x^3 + x)$.

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2$.

Solution : $f$ est un polynôme donc est de classe $C^\infty$, a fortiori $C^2$, sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de $f$. *Indication* : pour un point critique $(x,y)$, on exprimera $y$ en fonction de $x$ puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où $P$ est un certain polynôme de degré 2.

Solution : Pour abréger, on écrit $\partial_x$ au lieu de $\partial/\partial x$. Pour tout $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_x f = 6x^5 + 2x - 2y(3x^2 + 1), \qquad \partial_y f = 4y - 2(x^3 + x).$$

Donc $p$ est un point critique si et seulement si $y = \dfrac{x^3 + x}{2} = x\dfrac{x^2+1}{2}$ et

$$0 = 6x^5 + 2x - (x^3 + x)(3x^2 + 1) = 6x^5 + 2x - (3x^5 + 4x^3 + x) = 3x^5 - 4x^3 + x = xP(x^2)$$

où $P(X) = 3X^2 - 4X + 1 = (X-1)(3X-1)$. Donc les points critiques sont donnés par $x = 0 = y$, $x = \pm 1 = y$, ou $x = \pm 1/\sqrt{3}$ et $y = 2x/3$, i.e. on a

$$p_1 = (0,0), \qquad p_2 = (1,1), \qquad p_3 = (-1,-1), \qquad p_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \qquad p_5 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}\right).$$

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de $f$.

Solution : Comme $f$ est $C^2$ on sait, d'après le théorème de Schwarz, que $\partial^2_{yx} f = \partial^2_{xy} f$, donc il suffit de calculer l'un des deux. Pour tout $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial^2_{xx} f = 30x^4 + 2 - 12xy, \qquad \partial^2_{xy} f = -6x^2 - 2, \qquad \partial^2_{yy} f = 4$$

et la matrice hessienne est $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 30x^4 + 2 - 12xy & -6x^2 - 2 \\ -6x^2 - 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(4) Pour chaque point critique $p$, écrire la matrice hessienne de $f$ en $p$ et déterminer, en le justifiant soigneusement, si $p$ est ou non un minimum ou maximum local de $f$. (Pour certains points critiques, il sera commode d'exprimer $xy$ en fonction de $x^2$.)

Solution : Pour $p_1 = (0,0)$, on obtient $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $8 - 4 = 4 > 0$ et la trace vaut $6 > 0$, donc les deux valeurs propres sont $> 0$. Donc $p_1$ est un minimum local.

Pour $p_2 = (1,1)$ et $p_3 = (-1,-1)$, on obtient la même matrice hessienne $\begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $80 - 64 = 16 > 0$ et la trace vaut $24 > 0$, donc les deux valeurs propres sont $> 0$. Donc $p_2$ et $p_3$ sont des minima locaux.

Pour $p_4$ et $p_5$, on a $xy = x^2(x^2+1)/2 = 2/9$ et l'on obtient la même matrice hessienne $\begin{pmatrix} 8/3 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $16(\frac{2}{3} - 1) < 0$ donc les deux valeurs propres sont de signe opposé. Donc $p_4$ et $p_5$ sont des points-selle.

***Exercice 2.*** — (environ 28 pts) Soient $U, V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ un $C^1$-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ une application continue.

(1) Écrire la formule de changement de variables (reliant $\int \cdots \int_V f(y)dy$ à une intégrale sur $U$), **en expliquant de façon précise** ce que sont les termes qui y figurent.

Solution : On a

$$\int \cdots \int_V f(y)dy = \int \cdots \int_U f(\phi(x)) \, |\text{dét}\, D\phi(x)| \, dx,$$

où $D\phi(x)$ désigne la matrice jacobienne de $\phi$ au point $x$ et $|\text{dét}\, D\phi(x)|$ est la valeur absolue de son déterminant.

Dans la suite de l'exercice, on prend $n = 3$ et l'on note $(x, y, z)$ les coordonnées (au lieu de $(x_1, x_2, x_3)$).

(2) Soient $\mathscr{B}$ un compact quarrable du plan horizontal d'équation $z = 0$ et $\alpha$ son aire, i.e. $\alpha = \iint_{\mathscr{B}} dx\, dy$. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $c \neq 0$ et soit $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points $B + tu$, avec $B \in \mathscr{B}$ et $t \in [0, 1]$. Montrer que $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{B} \times [0, 1]$ par un difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Puis, en utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume de $\mathscr{C}$.

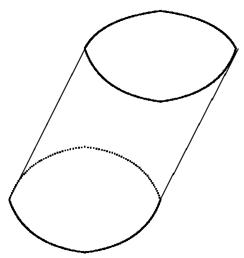
Solution : Soit $\phi$ l'application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, i.e. $\phi$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Son déterminant est $c \neq 0$, donc $\phi$ est bijective. Par définition, le cylindre $\mathscr{C}$ est l'image par $\phi$ de $\mathscr{B} \times [0, 1]$. D'après la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, on a donc

$$\text{vol}(\mathscr{C}) = \iiint_{\mathscr{C}} dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathscr{B} \times [0,1]} |c| \, dx\, dy\, dt = |c| \iint_{\mathscr{B}} dx\, dy = |c| \, \alpha.$$

On obtient ainsi que le volume du cylindre $\mathscr{C}$ est le produit de sa hauteur (ici $|c|$) par l'aire de sa base (ici $\alpha$).

(3) On suppose que $\mathscr{B} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $u = (0, 1, 2)$. Pouvez-vous faire un dessin représentant $\mathscr{C}$ ? Quel est le volume de $\mathscr{C}$ ?

Solution :



L'aire de $\mathscr{B}$ est $\pi$ et $c = 2$ donc, d'après la question précédente, le volume de $\mathscr{C}$ est $2\pi$.

(4) Introduire les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, **en faisant un dessin** pour expliquer à quoi correspondent les angles introduits. Puis, fixant un réel $R > 0$, utiliser la formule de changement de variables et le théorème de Fubini pour calculer le volume de la boule euclidienne $\overline{B}(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Solution : Prenons l'exemple de la Terre : soit $O$ son centre, $R$ son rayon et $\mathscr{C}$ le cercle équatorial, dans le plan $Oxy$. Un méridien est un demi-cercle joignant le pôle Nord et le pôle Sud, et chacun est paramétré par son point d'intersection avec le cercle équatorial $\mathscr{C}$. Le méridien de référence (Greenwich) correspond au point $P_0 = (R, 0, 0)$ et à l'angle $\theta = 0$. Les méridiens sont paramétrés par $\theta$ (longitude) qui varie dans $]-\pi, \pi]$ (ou entre $-180$ et 180 degrés). On peut paramétrer les points de chaque méridien de l'une des façons suivantes :

(1) En géographie, on prend un angle $\phi$ (latitude) qui varie de $-90$ à 90 degrés et vaut 0 sur l'équateur.

(2) En mathématiques, on prend un angle $\phi$ (colatitude) qui varie dans $[0, \pi]$ et vaut 0 (resp. $\pi$) au pôle Nord (resp. Sud) et $\pi/2$ à l'équateur.

Notons comme plus haut $\mathscr{P}^-$ le demi-plan $\{(x, 0, z) \mid x \leq 0\}$. Si $M$ est un point de $\mathbb{R}^3 - \mathscr{P}^-$ et $M'$ (resp. $M''$) son projeté sur le plan $Oxy$ (resp. sur la droite $Oz$), on a donc $OM' = OM \sin\phi = r\sin\phi$ et $OM'' = OM\cos\phi = r\cos\phi$. Puis les coordonnées $(x, y, 0)$ de $M'$ sont données par

$$x = OM'\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta, \qquad\qquad y = OM'\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta.$$

On obtient ainsi les coordonnées sphériques : c'est le difféomorphisme

$$\Psi : \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \times ]0, \pi[ \to \mathbb{R}^3 - \mathscr{P}^-, \qquad (r, \theta, \phi) \mapsto (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi).$$

On obtient ainsi la matrice jacobienne ci-dessous (où la 1ère ligne donne les dérivées partielles de $x = r\sin\phi\cos\theta$ par rapport à $r, \theta, \phi$) :

$$Df(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient que son déterminant vaut :

$$-r\sin\phi\, r\sin^2\phi + \cos\phi\, r^2\sin\phi\cos\phi\,(-1) = -r^2\sin\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = -r^2\sin\phi.$$

(Bien sûr, si on prend les dérivées partielles dans l'ordre $r, \phi, \theta$ ceci permute les colonnes 2 et 3 et multiplie le déterminant jacobien par $-1$.) Sa valeur absolue est $r^2\sin\phi$, puisque $\phi$ varie dans $]0, \pi[$.

Ensuite, $\overline{B}(R)$ a même volume que $\overline{B}(R) - \mathscr{P}^-$ qui est l'image de $]0, R] \times ]-\pi, \pi[ \times ]0, \pi[$ par le difféomorphisme $\Psi$. D'après la formule de changement de variable et le théorème de Fubini, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\overline{B}(R)) = \iiint_{\overline{B}(R)} dx\,dy\,dz = \iiint_{[0,R]\times[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi &= 2\pi\frac{R^3}{3}[-\cos\phi]_0^\pi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

(5) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Montrez que $\mathscr{E}$ est l'image de $\overline{B}(1)$ par une application linéaire bijective $\phi$ que l'on précisera. En utilisant la formule de changement de variables, déterminer le volume de l'ellipsoïde $\mathscr{E}$.

Solution : Soit $\phi$ l'application linéaire $\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} at \\ bu \\ cv \end{pmatrix}$, i.e. $\phi$ est donnée par la matrice diagonale $D$ de coefficients diagonaux $a, b, c$. On voit que $(x, y, z) = (at, bu, cv)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $(t, u, v)$ appartient à $\overline{B}(1)$. En tout point $(t, u, v) \in \mathbb{R}^3$ la matrice jacobienne de $\phi$ est $D$ et son déterminant est $abc > 0$. Donc d'après la formule de changement de variables on a :

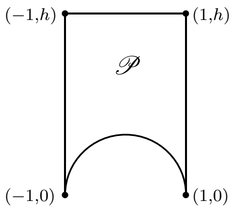
$$\mathrm{vol}(\mathscr{E}) = \iiint_{\mathscr{E}} dx\, dy\, dz = \iiint_{\overline{B}(1)} abc\; dt\, du\, dv = abc\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(Pour $a = b = c = R$ on retrouve $4\pi R^3/3$.)

***Exercice 3.*** — (environ 26 pts) Soit $\mathscr{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq h\}$, où $h$ est un réel $> 1$.

(1) Faire soigneusement un dessin représentant $\mathscr{P}$.

Solution :




(2) $\mathscr{P}$ est-il convexe ? Justifiez précisément votre réponse.

Solution : $\mathscr{P}$ n'est pas convexe car les points $p = (-1, 0)$ et $q = (1, 0)$ sont dans $\mathscr{P}$ mais le segment $[p, q]$ n'est pas contenu dans $\mathscr{P}$.

(3) Déterminer l'aire $\alpha$ de $\mathscr{P}$.

Solution : $\mathscr{P}$ est un rectangle de côtés 2 et $h$, privé d'un demi-disque de rayon 1, donc son aire est $2h - \pi/2 = (4h - \pi)/2$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$. On rappelle que le centre d'inertie $G$ de $\mathscr{P}$ est le point de $\mathbb{R}^2$ défini par une certaine égalité vectorielle, ou par les égalités correspondantes pour ses coordonnées $x_G$ et $y_G$.

(4) Rappeler la définition évoquée plus haut, puis déterminer $(x_G, y_G)$.

Solution : Par définition, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha}\iint_{\mathscr{P}} \overrightarrow{OM}\, dM = \frac{1}{\alpha}\iint_{\mathscr{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\, dy$$

et donc $x_G = \dfrac{1}{\alpha}\iint_{\mathscr{P}} x dx\, dy$ et $y_G = \dfrac{1}{\alpha}\iint_{\mathscr{P}} y dx\, dy$.

On a $x_G = 0$ car la plaque $\mathscr{P}$ est homogène et symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0$, donc $G$ est situé sur cette droite. Calculons $y_G$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\iint_{\mathscr{P}} y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{h} y\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{h^2 - (1-x^2)}{2} dx = h^2 - 1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = h^2 - \frac{2}{3}.$$

Donc $y_G = \dfrac{h^2 - 2/3}{2h - \pi/2}$.

(5) Montrer que $G$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $h \geq h_0$, pour un certain $h_0$ que l'on déterminera.

Solution : Il est clair « pour des raisons physiques » que $y_G \leq h$. (Comme $2h - \pi/2 > 0$ (puisque $h > 1$), l'inégalité $y_G \leq h$ est équivalente à $h^2 - \dfrac{\pi}{2}h + \dfrac{2}{3} \geq 0$, et le discriminant du trinôme est $\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{8}{3} = (3\pi^2 - 32)/12 < 0$ donc ce trinôme est toujours $> 0$.) Donc, comme $x_G = 0$ alors $G$

appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y_G \geq 1$. Comme $2h - \pi/2 > 0$ (puisque $h > 1$), ceci équivaut à $h^2 - 2/3 \geq 2h - \pi/2$, c.-à-d.

$$h^2 - 2h + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \geq 0.$$

Le discriminant réduit $\Delta$ du trinôme de gauche est $1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{\pi}{2}$, qui est $> 0$ (car $10 > 3\pi$). Donc les deux racines sont $h_1 = 1 - \sqrt{\Delta} < 1$ et $h_0 = 1 + \sqrt{\Delta} > 1$. Le trinôme est $\geq 0$ à l'extérieur des racines et comme on a supposé $h > 1$ on a donc $G \in \mathscr{P}$ si et seulement si $h \geq h_0$.

(6) Donner une valeur approchée de $(h_0 - 1)^2$ et montrer que $h_0 < 3/2$.

Solution : Une valeur approchée de $(h_0 - 1)^2 = \Delta$ est $1,66 - 1,57 = 0,09$ qui est $< 1/4$. Et en effet l'inégalité

$$\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{4}$$

équivaut à $20 - 6\pi < 3$ soit $17 < 3\pi$ qui est bien vérifiée. Donc on a $h_0 < 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. (Et une valeur approchée de $h_0$ est $1,3$.)

***Exercice 4***. — (environ 32 pts) Soit $V$ (resp. $U$) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) et soient $f : V \to U$ et $g : U \to \mathbb{R}^q$ des applications différentiables.

(1) Pour tout $a \in V$, que vaut la différentielle de $g \circ f$ en $a$ ?

Solution : $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

(2) On suppose que $n = 1$ et $V$ est un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, que vaut le vecteur dérivé $(g \circ f)'(t)$ ?

Solution : $(g \circ f)'(t) = dg(f(t))(f'(t))$.

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to U$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ une application de classe $C^1$. On rappelle qu'une *forme différentielle* $\omega$ continue sur $U$ est une application continue de $U$ dans l'espace dual $(\mathbb{R}^2)^* = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = M_{1,2}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\omega : U \to M_{1,2}(\mathbb{R}), \qquad (x, y) \mapsto \omega(x, y) = \Big(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)\Big).$$

Dans ce cas, pour tout $t \in I$ on peut appliquer la forme linéaire $\omega(\gamma(t))$ au vecteur $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$ ce qui donne le réel

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \omega_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \omega_2(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Pour $a < b$ dans $I$, on pose alors $\int_{\gamma([a,b])} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt$.

(3) On suppose que $\omega = dF$ pour une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ (i.e. $\omega(x, y) = dF(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U$). Montrer alors que $\int_{\gamma([a,b])} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Solution : On a $\int_{\gamma([a,b])} \omega = \int_a^b dF(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt$. Comme $g = (F \circ \gamma)'$ est continue sur $I$, la fonction

$$G : I \to \mathbb{R}^2, \qquad x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt$$

est dérivable sur $I$, de dérivée $G' = g = (F \circ \gamma)'$, donc $G(x) = (F \circ \gamma)(x) - c$ pour une certaine constante $c$, et comme $G(a) = 0$ on a $c = (F \circ \gamma)(a)$. Donc $\int_{\gamma([a,x])} \omega = F(\gamma(x)) - F(\gamma(a))$ pour tout $x \in I$, en particulier pour $x = b$.

Noter que ceci implique, en particulier, que $\int_{\gamma([a,b])} \omega = 0$ si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Dans la suite de l'exercice, on prend $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Soit $\omega$ la forme différentielle sur $U$ définie pour tout $(x,y) \in U$ par $\omega(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma_R(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$.

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer $\gamma_R'(t)$ puis $\omega(\gamma_R(t))(\gamma_R'(t))$.

Solution : On a $\gamma_R(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$ et

$$\omega(\gamma_R(t))(\gamma_R'(t)) = \frac{1}{R^2}\Big(-R\sin(t), R\cos(t)\Big)\begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} = 1.$$

(5) Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, calculer $\int_{\gamma_R([a,b])} \omega$. Déterminer, en justifiant votre réponse, s'il existe une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $\omega = dF$.

Solution : D'après ce qui précède, on a $\int_{\gamma_R([a,b])} \omega = \int_a^b dt = b - a$. En particulier, pour $b = a + 2\pi$ on a $\gamma_R(b) = \gamma_R(a)$ mais $\int_{\gamma_R([a,b])} \omega = 2\pi \neq 0$. Donc, d'après la question (3), il n'existe pas de fonction $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $\omega = dF$.

(6) Pour tout $(x,y) \in U$ on pose $f(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Pour tout point $M = (x,y)$ de $U$, exprimer le gradient $\nabla f(M)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (où $O = (0,0)$).

Solution : Pour tout $M = (x,y)$ dans $U$ on a $df(x,y) = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$ et donc

$$\nabla f(M) = \frac{1}{OM^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{OM^3}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{OM^2}\overrightarrow{u}_M$$

où $\overrightarrow{u}_M$ désigne le vecteur unitaire $\dfrac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$.