Corrigé de l'examen du 31 mai 2016 (UE 2M216 printemps)

(durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les cinq exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. L'examen est noté sur **100**.

Exercice 1. — (environ 18 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + 4x^2 + 2y^2 - 2y(x^2 + 2x) + 1$.

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution : f est un polynôme donc est de classe C^∞, a fortiori C^2, sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f.

Solution : Pour abréger, on écrit ∂_x au lieu de $\partial/\partial x$. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_x f = 4x^3 + 8x - 4y(x + 1), \qquad \partial_y f = 4y - 2(x^2 + 2x).$$

Donc p est un point critique si et seulement si $y = \dfrac{x^2 + 2x}{2}$ et

$$\begin{aligned} 0 = 2x^3 + 4x - (x^2 + 2x)(x + 1) &= 2x^3 + 4x - (x^3 + 3x^2 + 2x) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Donc les points critiques sont $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, \frac{3}{2})$ et $p_3 = (2, 4)$.

(3) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

Solution : Comme f est C^2 on sait, d'après le théorème de Schwarz, que $\partial^2_{yx} f = \partial^2_{xy} f$, donc il suffit de calculer l'un des deux. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial^2_{xx} f = 12x^2 + 8 - 4y, \qquad \partial^2_{xy} f = -4x - 4, \qquad \partial^2_{yy} f = 4$$

et la matrice hessienne est $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 8 - 4y & -4x - 4 \\ -4x - 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Pour $p_1 = (0, 0)$, on obtient $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $32 - 16 = 16 > 0$ et la trace vaut $12 > 0$, donc les deux valeurs propres sont > 0. Donc p_1 est un minimum local.

Pour $p_2 = (1, 3/2)$, on obtient $D^2 f(1, 3/2) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $56 - 64 = -8 < 0$ donc les deux valeurs propres sont de signe opposé. Donc p_2 est un point-selle.

Pour $p_3 = (2, 4)$, on obtient $D^2 f(2, 4) = \begin{pmatrix} 40 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut $160 - 144 = 16 > 0$ et la trace vaut $44 > 0$, donc les deux valeurs propres sont > 0. Donc p_3 est un minimum local.

***Exercice 2* (Questions de cours)**. — (environ 30 pts) Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ une application continue.

(1) Écrire la formule de changement de variables (reliant $\int \cdots \int_V f(y)dy$ à une intégrale sur U), en introduisant clairement les termes qui y figurent.

Solution : On a

$$\int \cdots \int_V f(y)dy = \int \cdots \int_U f(\phi(x)) \, |\text{dét}\, D\phi(x)| \, dx,$$

où $D\phi(x)$ désigne la matrice jacobienne de ϕ au point x et $|\text{dét}\, D\phi(x)|$ est la valeur absolue de son déterminant.

Dans la suite de cet exercice, on prend $n = 3$.

(2) Introduire les coordonnées cylindriques et calculer le déterminant jacobien correspondant.

Solution : Rappelons d'abord que les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$ sont le difféomorphisme $\mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 - \Delta^-$, où Δ^- est la demi-droite $\{(x, 0) \mid x \leq 0\}$, donné par $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Les coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$ sont le difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 - \mathscr{P}^-$, où $\mathscr{P}^-$ est le demi-plan $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$, donné par $(r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. La 1ère (resp. 2ème, resp. 3ème) ligne de la matrice jacobienne est donnée par les dérivées partielles de $r\cos\theta$ (resp. $r\sin\theta$, resp. z) par rapport à r, θ et z ; c'est donc la matrice

$$D\phi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est donc $r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$, qui est > 0.

(3) Soient $R, h \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume du cylindre $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, \ 0 \leq z \leq h\}$.

Solution : $C - \mathscr{P}^-$ est l'image de $]0, R] \times \,]-\pi, \pi[\times [0, h]$ par le difféomorphisme ϕ et l'on a $\text{vol}(C) = \text{vol}(C - \mathscr{P}^-)$. D'après la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, on a donc

$$\text{vol}(C) = \iiint_C dx\, dy\, dz = \iiint_{[0,R]\times[-\pi,\pi]\times[0,h]} r dr\, d\theta\, dz = 2\pi h \frac{R^2}{2} = h\pi R^2.$$

On obtient ainsi que le volume du cylindre C est le produit de sa hauteur (ici h) par l'aire de sa base (ici πR^2).

(4) Introduire les coordonnées sphériques (ne pas hésiter à faire un dessin !), puis calculer le déterminant jacobien correspondant.

Solution : Prenons l'exemple de la Terre : soit O son centre, R son rayon et $\mathscr{C}$ le cercle équatorial, dans le plan Oxy. Un méridien est un demi-cercle joignant le pôle Nord et le pôle Sud, et chacun est paramétré par son point d'intersection avec le cercle équatorial $\mathscr{C}$. Le méridien de référence (Greenwich) correspond au point $P_0 = (R, 0, 0)$ et à l'angle $\theta = 0$. Les méridiens sont paramétrés par θ (longitude) qui varie dans $]-\pi, \pi]$ (ou entre -180 et 180 degrés). On peut paramétrer les points de chaque méridien de l'une des façons suivantes :

(1) En géographie, on prend un angle ϕ (latitude) qui varie de -90 à 90 degrés et vaut 0 sur l'équateur.

(2) En mathématiques, on prend un angle ϕ (colatitude) qui varie dans $[0, \pi]$ et vaut 0 (resp. π) au pôle Nord (resp. Sud) et $\pi/2$ à l'équateur.

Notons comme plus haut $\mathscr{P}^-$ le demi-plan $\{(x,0,z) \mid x \leq 0\}$. Si M est un point de $\mathbb{R}^3 - \mathscr{P}^-$ et M' (resp. M'') son projeté sur le plan Oxy (resp. sur la droite Oz), on a donc $OM' = OM\sin\phi = r\sin\phi$ et $OM'' = OM\cos\phi = r\cos\phi$. Puis les coordonnées $(x,y,0)$ de M' sont données par

$$x = OM'\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = OM'\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta.$$

On obtient ainsi les coordonnées sphériques : c'est le difféomorphisme

$$\Psi : \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[\, \times \,]0,\pi[\, \to \mathbb{R}^3 - \mathscr{P}^-, \qquad (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi).$$

On obtient ainsi la matrice jacobienne ci-dessous (où la 1ère ligne donne les dérivées partielles de $x = r\sin\phi\cos\theta$ par rapport à r,θ,ϕ) :

$$Df(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient que son déterminant vaut :

$$-r\sin\phi\, r\sin^2\phi + \cos\phi\, r^2\sin\phi\cos\phi\,(-1) = -r^2\sin\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = -r^2\sin\phi.$$

(Bien sûr, si on prend les dérivées partielles dans l'ordre r,ϕ,θ ceci permute les colonnes 2 et 3 et multiplie le déterminant jacobien par -1.) Sa valeur absolue est $r^2\sin\phi$, puisque ϕ varie dans $]0,\pi[$.

(5) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume de la boule euclidienne $\overline{B}(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

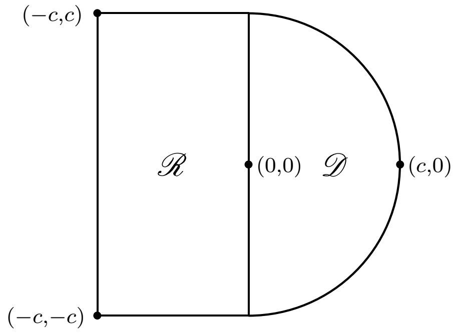
Solution : $\overline{B}(R)$ a même volume que $\overline{B}(R) - \mathscr{P}^-$ qui est l'image de $]0,R] \times \,]-\pi,\pi[\, \times \,]0,\pi[$ par le difféomorphisme Ψ. D'après la formule de changement de variable et le théorème de Fubini, on a donc

$$\operatorname{vol}(\overline{B}(R)) = \iiint_{\overline{B}(R)} dx\,dy\,dz = \iiint_{[0,R]\times[-\pi,\pi]\times[0,\pi]} r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi = 2\pi\frac{R^3}{3}[-\cos\phi]_0^\pi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Exercice 3. — (environ 14 pts) Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{P} = \mathscr{R} \cup \mathscr{D}$, où $\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -c \leq x \leq 0,\ -c \leq y \leq c\}$ et $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq c^2,\ x \geq 0\}$.

(1) Faire soigneusement un dessin représentant $\mathscr{P}$.

Solution :



(2) Déterminer, en détaillant le calcul, l'aire A de $\mathscr{P}$.

Solution : $\mathscr{R}$ et $\mathscr{D}$ sont d'intérieurs disjoints, donc l'aire de $\mathscr{P}$ est la somme des aires de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{D}$. De plus, $\mathscr{R}$ est un rectangle de côtés c et $2c$, donc son aire est $2c^2$. Et $\mathscr{D}$ est un demi-disque de rayon c, donc son aire est $\pi c^2/2$. Donc $A = c^2(4+\pi)/2$.

(3) On considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$ et l'on note G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) de G.

Solution : Comme $\mathscr{P}$ est homogène de densité $\rho = 1$, sa « masse » est égale à $\iint_{\mathscr{P}} 1\, dx\, dy = A > 0$. Par définition, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{A} \iint_{\mathscr{P}} \overrightarrow{OM}\, dM = \frac{1}{A} \iint_{\mathscr{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx\, dy$$

et donc $x_G = \dfrac{1}{A} \iint_{\mathscr{P}} x dx\, dy$ et $y_G = \dfrac{1}{A} \iint_{\mathscr{P}} y dx\, dy$. On a $y_G = 0$ car la plaque $\mathscr{P}$ est homogène et symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 0$, donc G est situé sur cette droite. Calculons x_G. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\iint_{\mathscr{R}} x\, dx\, dy = \int_{-c}^{0} x\, dx \int_{-c}^{c} dy = 2c \left[\frac{c^2}{2}\right]_{-c}^{0} = -c^3.$$

De même, on a

$$\iint_{\mathscr{D}} x\, dx\, dy = \int_0^c x \left(\int_{-\sqrt{c^2-x^2}}^{\sqrt{c^2-x^2}} dy \right) dx = \int_0^c \sqrt{c^2-x^2}\, 2x\, dx = \left[\frac{-2}{3}(c^2-x^2)^{3/2} \right]_0^c = \frac{2c^3}{3}.$$

Donc $Ax_G = \dfrac{-c^3}{3}$ d'où $x_G = \dfrac{-c^3}{3A} = \dfrac{-2c}{3(4+\pi)}$. *Remarque.* Pour le calcul de la 2ème intégrale on aurait pu passer en coordonnées polaires : le demi-disque $\mathscr{D}$ est l'image de $[0, c] \times [-\pi/2, \pi/2]$ par le difféomorphisme ϕ des coordonnées polaires, donc d'après la formule de changement de variables et Fubini, on a

$$\iint_{\mathscr{R}} x\, dx\, dy = \iint_{[0,c]\times[-\pi/2,\pi/2]} r \cos\theta\, |\text{dét}\, D\phi(r,\theta)|\, dr\, d\theta = \iint_{[0,c]\times[-\pi/2,\pi/2]} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta$$
$$= \frac{c^3}{3} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2c^3}{3}.$$

***Exercice 4* (Théorème de Guldin).** — (environ 12 pts) Dans le plan Oxz de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{P}$ une plaque quarrable située dans le demi-plan donné par $x \geq 0$. Soit $\mathscr{V}$ le solide de révolution obtenu en faisant tourner $\mathscr{P}$ autour de l'axe Oz, i.e. $\mathscr{V}$ est l'ensembles des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(r, 0, z) \in \mathscr{P}$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On considère $\mathscr{P}$ comme une plaque homogène de densité constante $\rho = 1$ et l'on note $G = (a, 0, c)$ son centre d'inertie. On note A l'aire de $\mathscr{P}$.

(1) En utilisant des coordonnées cylindriques et le théorème de Fubini, démontrer que $\operatorname{vol}(\mathscr{V}) = 2\pi A a$.

Solution : $\mathscr{V}$ est l'ensemble des points (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $(r, 0, z) \in \mathscr{P}$. Donc, d'après le calcul du déterminant jacobien pour les coordonnées cylindriques et le théorème de Fubini, on a :

$$\operatorname{vol}(\mathscr{V}) = \iiint_{\mathscr{V}} dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathscr{P}\times[-\pi,\pi]} r dr\, d\theta\, dz = 2\pi \iint_{\mathscr{P}} r dr\, dz.$$

D'autre part, comme $\mathscr{P}$ est homogène, on a par définition du centre d'inertie :

$$\iint_{\mathscr{P}} r dr\, dz = \iint_{\mathscr{P}} x dx\, dz = Ax_G = Aa,$$

d'où $\operatorname{vol}(\mathscr{V}) = 2\pi A a$.

(2) Soit $R > 0$, on prend $\mathscr{P} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq R^2,\ x \geq 0\}$; dans ce cas $\mathscr{V}$ est la boule fermée $\overline{B}(R)$ de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon R. En utilisant la formule connue pour $\mathrm{vol}(\overline{B}(R))$ (cf. exercice 2), en déduire la première coordonnée a du centre d'inertie G de $\mathscr{P}$.

Solution : Dans ce cas, $\mathscr{P}$ est un demi-disque de rayon R donc son aire est $A = \pi R^2/2$. D'autre part, on a vu dans l'exercice 2 que $\mathrm{vol}(\overline{B}(R)) = 4\pi R^3/3$. De l'égalité

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2\pi A a = \pi^2 R^2 a$$

on déduit $a = \dfrac{4R}{3\pi}$. (Ceci se déduit aussi de l'exercice précédent : $a = \dfrac{2}{\pi R^2}\dfrac{2R^3}{3}$.)

Exercice 5. — (environ 30 pts) On rappelle que $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to\ ]-\pi/2, \pi/2[$ est dérivable et $\mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \mathrm{Arctan}(y/x)$.

(1) Calculer les dérivées partielles de f et, en citant un résultat du cours, montrer que f est de classe C^1 sur U.

Solution : f admet en tout $(x, y) \in U$ les dérivées partielles suivantes :

$$\partial_x f = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \partial_y f = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Celles-ci sont continues sur U (car la fonction $x^2 + y^2$ est continue et ne s'annule pas sur U), donc f est de classe C^1 sur U.

Pour tout $(x, y) \in U$ on note $\nabla f(x, y)$ le gradient de f en (x, y). D'autre part, on pose $V = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 > 1\}$.

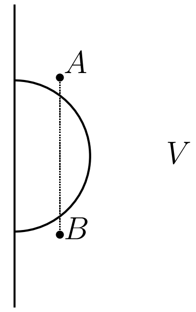
(2) Pour tout $(x, y) \in V$, montrer que $\|\nabla f(x, y)\|_2 < 1$ (où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

Solution : D'après la question précédente, on a $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ donc $\|\nabla f(x, y)\|_2 = \dfrac{1}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et pour $(x, y) \in V$ ceci est < 1 car $x^2 + y^2 > 1$ et donc $\sqrt{x^2+y^2} > 1$.

Soient $A = (\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda\sqrt{3}}{2})$ et $B = (\frac{\lambda}{2}, \frac{-\lambda\sqrt{3}}{2})$, où λ est un réel tel que $1 < \lambda < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(3) Faire un dessin représentant approximativement V et les points A, B.

Solution :



(4) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$ puis montrer que $f(A) - f(B) > \|\overrightarrow{AB}\|_2$.

Solution : On a $A = \lambda(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ donc $f(A) = \mathrm{Arctan}(y_A/x_A) = \pi/3$. De même, $f(B) = -\pi/3$ et donc $f(B) - f(A) = 2\pi/3 > 2$. D'autre part, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est de norme $\lambda\sqrt{3}$ et par hypothèse ceci est < 2. On a donc $f(A) - f(B) > 2 > \|\overrightarrow{AB}\|_2$.

(5) L'ouvert V est-il convexe ? Justifier votre réponse.

Solution : V n'est pas convexe car le segment $[A, B]$ n'est pas contenu dans V.

(6) Cet exercice montre que dans un théorème vu en cours on ne peut omettre une certaine hypothèse. Pouvez-vous dire quels sont le théorème et l'hypothèse en question ?

Solution : L'inégalité des accroissement finis dit que si U est un ouvert **convexe** et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $\|\nabla f(p)\|_2 \leq C$ pour tout $p \in U$, alors $|f(p) - f(q)| \leq C\,\|p - q\|_2$ pour tout $p, q \in U$. Ici, $f : V \to \mathbb{R}$ vérifie $\|\nabla f(p)\|_2 \leq 1$ pour tout $p \in V$ mais l'ouvert V n'est pas convexe et l'on voit que l'inégalité des accroissements finis est en défaut puisque $f(A) - f(B) > \|\overrightarrow{AB}\|_2$.