Corrigé du partiel du 3 novembre 2016 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les cinq exercices sont indépendants. Ce partiel est noté sur **20**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes >20 seront comptées comme 20.

Exercice 1. — (environ 6 pts) Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$, $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$ et $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}$.

(1) Démontrer les quatre inégalités suivantes : $\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\ \|x\|_\infty$ et $\|x\|_2\le\sqrt{n}\ \|x\|_\infty$.

Solution : Pour tout i on a $\sqrt{\sum_{j=1}^n|x_j|^2}\ge\sqrt{|x_i|^2}=|x_i|$, d'où $\|x\|_2\ge\|x\|_\infty$. D'autre part,

$$\big(\|x\|_2\big)^2=\sum_{i=1}^n x_i^2\le\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sum_{i<j}|x_i|\ |x_j|=\big(\|x\|_1\big)^2$$

d'où $\|x\|_2\le\|x\|_1$. Et, posant $C=\|x\|_\infty$ on a $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|\le nC$ et

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}\le\sqrt{nC^2}=\sqrt{n}\,C.$$

(2) [1] On pose $S_\infty(1)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|_\infty=1\}$. Pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $x\in S_\infty(1)$, montrer que $|\sum_{i=1}^n a_ix_i|\le\|a\|_1$. A-t-on égalité pour certains x ? Si oui lesquels ? En déduire, en le justifiant, la valeur de

$$|\!|\!|a|\!|\!|=\max_{x\in S_\infty(1)}|\sum_{i=1}^n a_ix_i|.$$

Solution : On a

$$|\sum_{i=1}^n a_ix_i|\le\sum_{i=1}^n|a_i|\ |x_i|\le\sum_{i=1}^n|a_i|=\|a\|_1,$$

la seconde inégalité résultant de l'hypothèse $|x_i|\le1$. Cette inégalité est une égalité si et seulement si $|x_i|=1$ pour tout i tel que $a_i\neq0$. Dans ce cas, la première inégalité est une égalité si et seulement si tous les a_ix_i avec $a_i\neq0$ sont de même signe $\varepsilon=\pm1$, i.e. si et seulement si $x_i=\varepsilon a_i/|a_i|$ pour tout a_i non nul.

Ceci montre que, pour tout $x\in S_\infty(1)$, on a $|\sum_{i=1}^n a_ix_i|\le\|a\|_1$, avec égalité pour certains x. On a donc $|\!|\!|a|\!|\!|=\|a\|_1$.

Exercice 2. — (environ 4 pts) Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2)\mapsto\big(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)\big)$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(y_1,y_2)\mapsto g(y_1,y_2)$ deux applications différentiables et soit $h=g\circ f$, i.e.

$$h(x_1,x_2)=g\big(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)\big).$$

[1] Cette question est indépendante de la précédente.

(1) Pour tout (x_1, x_2), donner la formule exprimant $(\partial h/\partial x_1)(x_1, x_2)$ en fonction des dérivées partielles de g et de f.

Solution : On a

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)\big)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2).$$

(2) Appliquer ce qui précède au cas où $f_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$, $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \sin(x_2)$ et $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$.

Solution : Comme $(\partial g/\partial y_1)(y_1, y_2) = y_2$ et $(\partial g/\partial y_2)(y_1, y_2) = y_1$, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \big(\cos(x_1) + \sin(x_2)\big)e^{x_1} - \big(e^{x_1} + e^{x_2}\big)\sin(x_1).$$

Exercice 3. — (environ 6 pts) Soient U (resp. V) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ des applications différentiables, et $h = g \circ f$.

(1) Pour tout $a \in U$, exprimer la matrice jacobienne $Dh(a)$ comme produit des matrices jacobiennes $Dg(b)$ et $Df(a)$ pour le point b approprié.

Solution : On a $Dh(a) = Dg(f(a))Df(a)$.

(2) Soient $I =]-\pi, \pi[$, $U = \mathbb{R}_+^* \times I$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. Pour tout $(r, \theta) \in U$, écrire la matrice jacobienne $Df(r, \theta)$, puis montrer qu'elle est inversible et calculer son inverse.

Solution : On a $Df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Son déterminant est $r \neq 0$, donc elle est inversible et son inverse est

$$Df(r,\theta)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(3) Soit D la demi-droite $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. On rappelle que f est un C^1-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 - D$ et l'on note $g = f^{-1} : V \to U$, $(x, y) \mapsto \big(r(x, y), \theta(x, y)\big)$ le difféomorphisme inverse. En utilisant ce qui précède, déterminer pour tout $(x, y) \in V$ la matrice jacobienne $Dg(x, y)$.

Solution : La composée $g \circ f$ est l'application identique de U donc pour tout point $a = (r, \theta) \in U$ d'image $b = f(a) = (x, y)$, on a $Dg(b)Df(a) = \mathrm{id}$, d'où $Dg(b) = Df(a)^{-1}$. Comme $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, d'où $\cos(\theta) = x/r$ et $\sin(\theta) = y/r$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, on obtient

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta)/r & \cos(\theta)/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y).$$

(4) En déduire la valeur de $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}(x, y)$.

Solution : D'après ce qui précède, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Exercice 4. — (environ 6 pts) On pose $f(x, y) = 2x^4 - 6x^2 + 5y^2 + 2y(x^2 - 6)$.

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution : f est un polynôme donc est de classe C^∞, a fortiori C^2, sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x, y), on exprimera y en fonction de x puis l'on résoudra l'équation $xP(x) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

Solution : Pour abréger, on écrit ∂_x au lieu de $\partial/\partial x$. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_x f = 8x^3 - 12x + 4yx, \qquad \partial_y f = 10y + 2(x^2 - 6).$$

Donc p est un point critique si et seulement si $y = \dfrac{6 - x^2}{5}$ et $0 = 8x^3 - 12x + \dfrac{4}{5}x(6 - x^2)$. En multipliant par 5 on obtient $0 = 36x^3 - 36x = 36x(x^2 - 1)$ d'où $x = 0, -1$ ou 1. Donc les points critiques sont $p_1 = (0, 6/5)$, $p_2 = (-1, 1)$ et $p_3 = (1, 1)$.

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

Solution : Comme f est C^2 on sait, d'après le théorème de Schwarz, que $\partial^2_{yx} f = \partial^2_{xy} f$, donc il suffit de calculer l'un des deux. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial^2_{xx} f = 24x^2 - 12 + 4y, \qquad \partial^2_{xy} f = 4x, \qquad \partial^2_{yy} f = 10$$

et la matrice hessienne est $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 12 + 4y & 4x \\ 4x & 10 \end{pmatrix}$.

(4) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

Solution : Pour $p_1 = (0, 6/5)$, on obtient $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -36/5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont non nulles et de signe opposé, donc p_1 est un point selle.

Pour $p_2 = (-1, 1)$ et $p_3 = (1, 1)$ on obtient les deux matrices suivantes :

$$D^2 f(-1, 1) = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \qquad D^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, le déterminant vaut $160 - 16 = 144 > 0$ et la trace vaut $16 + 10 = 26 > 0$, donc les deux valeurs propres sont > 0 donc p_2 et p_3 sont des minima locaux de f.

***Exercice 5* (Questions de cours).** — (environ 7 pts)

(1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Donnez la définition de : « N_1 et N_2 sont équivalentes ».

Solution : N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels $c, d > 0$ tels que $cN_1(x) \leq N_2(x) \leq dN_1(x)$ pour tout $x \in E$.

(2) Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. Donnez la définition de : « C est convexe ».

Solution : C est convexe si pour tout $x, y \in C$ le segment $[x, y] = \{x + t(y - x) = (1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$ est contenu dans C.

(3) Soient N une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $B = B(x_0, r) = \{x \in E \mid N(x - x_0) < r\}$. Montrer que B est convexe.

Solution : Soient $x, y \in B$ et $t \in [0, 1]$. Comme $(1-t)x + ty - x_0 = (1-t)(x - x_0) + t(y - x_0)$ on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$(*) \quad N\big((1-t)x + ty - x_0\big) \leq N\big((1-t)(x - x_0)\big) + N\big(t(y - x_0)\big) = (1-t)N(x - x_0) + tN(y - x_0).$$

De plus $N(x - x_0) < r$ et $N(y - x_0) < r$ et, comme t et $1 - t$ sont ≥ 0 et non tous deux nuls, on a $(1-t)N(x-x_0) \leq (1-t)r$ et $tN(y-x_0) \leq tr$ et l'une au moins de ces inégalités est stricte. Donc le terme de droite de $(*)$ est $< (1-t)r + tr = r$.

(4) Soit I un intervalle (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Donnez la définition de : « f est uniformément continue sur I ».

Solution : f est uniformément continue sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$ vérifiant $|x - y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(5) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$. Pouvez-vous démontrer que f est uniformément continue ou bien ne l'est pas ?

Solution : Supposons f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y > 0$ tels que $|x - y| < 2\delta$ on ait $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon$. En particulier, prenant $y = x + \varepsilon$ on a :

$$\varepsilon > \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} > \frac{\delta}{x^2}$$

d'où $\delta < \varepsilon x^2$ pour tout $x > 0$, et donc $\delta = 0$, une contradiction.