Corrigé de l'examen du 6 janvier 2017 (durée 2h)

Les cinq exercices sont indépendants. Cet examen est noté sur **70**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 70 seront comptées comme 70. **Ce corrigé a été tapé avant l'examen, mais certains points spécifiques ont été ajoutés, en gras, après la correction des copies**.

Exercice 1. — (environ 18 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y$.

(1) (2 pts) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution : f est un polynôme en deux variables donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (6 pts) Déterminer les points critiques de f.

Solution : Pour abréger, on écrit ∂_x au lieu de $\partial/\partial x$, et de même pour ∂_y. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_x f = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), \qquad \partial_y f = 2(y - 1).$$

Donc p est un point critique si et seulement si $y = 1$ et $x = 0, 1$ ou -1. Donc les points critiques sont $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (-1, 1)$ et $p_3 = (1, 1)$.

(3) (4 pts) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

Solution : Comme f est C^2 on sait, d'après le théorème de Schwarz, que $\partial^2_{yx} f = \partial^2_{xy} f$, donc il suffit de calculer l'un des deux. Pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial^2_{xx} f = 12x^2 - 4, \qquad \partial^2_{xy} f = 0, \qquad \partial^2_{yy} f = 2$$

et la matrice hessienne est $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) (6 pts) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

Solution : **La fonction f a été choisie pour obtenir des matrices diagonales, afin que les valeurs propres soient lisibles, sans calcul, sur la matrice. On attendait donc, au lieu du calcul mécanique du déterminant et de la trace de la matrice, l'observation que les valeurs propres étaient les coefficients diagonaux de la matrice**. Pour $p_1 = (0, 0)$, on obtient $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres : -4 et 2, sont non nulles et de signe opposé, donc p_1 est un point selle.

Pour $p_2 = (-1, 1)$ et $p_3 = (1, 1)$ on obtient $D^2 f(-1, 1) = D^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres : 8 et 2, sont > 0, donc p_2 et p_3 sont des minima locaux de f.

Exercice 2. — (environ 20 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = \cos(\pi\sqrt{x^2 + y^2})$.

(1) (4 pts) Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Montrer que f est de classe C^1 sur U et, pour tout $(x, y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Puis déterminer l'ensemble E^* des $(x, y) \in U$ pour lesquels $df(x, y) = 0$.

Solution : La fonction $h : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe C^∞ et envoie U dans $\mathbb{R}_+^*$. Puis la fonction $t \mapsto \pi\sqrt{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que la fonction cos. Par conséquent la composée est de classe C^∞ sur U, donc a fortiori C^1. La dérivée de $g : t \mapsto \cos(\pi\sqrt{t})$ est

$$g'(t) = -\sin(\pi\sqrt{t})\frac{\pi}{2\sqrt{t}}$$

et par conséquent on a :

$$(\dagger) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x^2+y^2)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\frac{\pi x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(\ddagger) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(x^2+y^2)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\frac{\pi y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On obtient donc qu'un point $(x,y) \in U$ est un point critique de f si et seulement si $\sqrt{x^2+y^2}$ est un entier $k \geq 1$.

(2) (2 pts) Montrer que E^* s'écrit de façon naturelle comme la réunion de sous-ensembles disjoints E_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et précisez en quels points f admet des maxima ou minima.

Solution : Notant E_k le cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon $k \in \mathbb{N}^*$, on voit donc que E^* est la réunion disjointe des E_k. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $-1 \leq f(x,y) \leq 1$ et la valeur 1 est atteinte sur les cercles E_{2k} (y compris sur le cercle de rayon nul $E_0 = \{(0,0)\}$), tandis que la valeur -1 est atteinte sur les cercles E_{2k+1}. Ces points sont donc, respectivement, des maxima et des minima (globaux) de f.

(3) (4 pts) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent 0.

Solution : On a $f(0,0) = \cos(0) = 1$. Pour $x \neq 0$, notant ε_x le signe de x on a

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \varepsilon_x \pi \frac{\cos(\pi|x|)-1}{\pi|x|}$$

et ceci tend vers 0 quand x tend vers 0, puisque $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. Ceci montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, et le calcul est analogue pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. **Ici, il fallait revenir à la définition : $(\partial f/\partial x)(0,0)$ existe si et seulement si le taux d'accroissement plus haut admet une limite quand x tend vers 0. Le fait que $(\partial f/\partial x)(x,y)$ tende vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ était attendu dans la question suivante, pour montrer que $(\partial f/\partial x)$ est continue en $(0,0)$. Pour en déduire** l'existence **de $(\partial f/\partial x)(0,0)$ il aurait fallu invoquer la règle de L'Hôpital ou simplement la formule des accroissements finis : pour tout $x \neq 0$ il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $f(x,0)-f(0,0) = x\,(\partial f/\partial x)(\theta x, 0)$, donc si $(\partial f/\partial x)(x,0)$ admet une limite ℓ quand x tend vers 0, alors $(\partial f/\partial x)(0,0)$ existe et vaut ℓ.**

(4) (4 pts) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puis que $(0,0)$ est un point critique de f. Est-ce un maximum ou minimum de f ?

Solution : Comme $\lim_{r\to 0} \dfrac{\sin(r)}{r} = \sin'(0) = 1$, il résulte de $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ que $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ tendent vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Par conséquent, f admet des dérivées partielles qui sont continues au voisinage de $(0,0)$, donc f est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Comme f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle y est nulle, $(0,0)$ est un point critique de f. Et puisque f y prend la valeur 1, c'est un maximum de f.

Remarque. On pouvait aussi utiliser le développement limité à l'ordre 1 de la fonction cos au point 0 :

$$\cos(r) = 1 + o(r)$$

pour écrire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = 1 + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

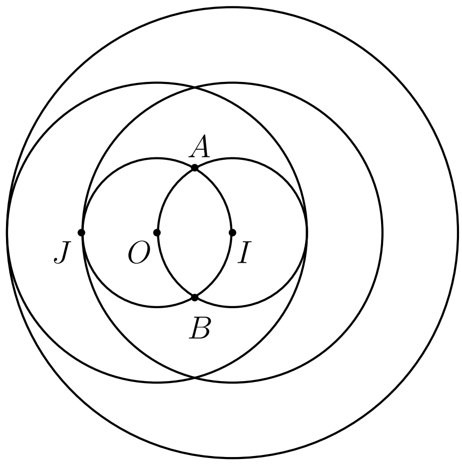
ce qui montre directement que f est différentiable en $(0, 0)$, de différentielle l'application nulle.

(5) (4 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, y) = f(x - 1, y)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'ensemble F des points critiques de g.

Solution : Comme $T : (x, y) \mapsto (x - 1, y)$ est de classe C^∞ et comme f est de classe C^1, alors $g = f \circ T$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Comme la différentielle de T en tout point est l'application identique de $\mathbb{R}^2$, on a $dg(x, y) = df(x - 1, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques de g sont donc les points (x, y) tels que $(x - 1)^2 + y^2 = k^2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, donc F est la réunion des cercles F_k de centre $(1, 0)$ et de rayon k, pour $k \in \mathbb{N}$.

(6) (2 pts) On pose $E_0 = \{(0, 0)\}$ et $E = E^* \cup E_0$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 2. Montrer que $D \cap E \cap F$ est formé de cinq points, que l'on déterminera. (Il pourra être utile de faire un dessin représentant les points critiques de f et de g dans le disque D.)

Solution : On a deux familles de cercles, de rayons entiers et de centres respectifs $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$, et l'on cherche les points d'intersection qui sont à distance < 2 de O :



On voit que les cercles F_k ne rencontrent pas D pour $k \geq 3$, et que les points cherchés sont O (qui appartient à E_0 et F_1) et les points d'intersection de E_1 avec F_0, F_1, F_2. Bien sûr, $E_1 \cap F_0$ est le point I. L'intersection de E_1 et F_1 est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \end{cases}$$

d'où on tire $x = 1/2$, puis $y = \pm\sqrt{3}/2$: ceci donne les points A et B. De même, l'intersection de E_1 et F_2 est donnée par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \end{cases}$$

d'où on tire $x = -1$, puis $y = 0$: ceci donne le point $J = (-1, 0)$.

Exercice 3. — (environ 20 pts) Soient $a, b, h \in \mathbb{R}_+^*$ et $E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \leq 1\right\}$ (i.e. E est l'intérieur d'une ellipse).

(1) (2 pts) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Montrer que l'application linéaire $L : (x,y) \mapsto (ax, by)$ établit une bijection de D sur E.

Solution : Cette application linéaire a pour matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, elle est donc bijective. Si $(x,y) \in D$, il est clair que $(u,v) = (ax, by)$ appartient à E. Réciproquement, pour tout $(u,v) \in E$, le point $(x,y) = L^{-1}(u,v) = (u/a, v/b)$ appartient à D. Ceci montre que L établit une bijection de D sur E.

(2) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, calculer l'aire de E, qu'on notera $\mathrm{vol}_2(E)$.

Solution : L est une application linéaire bijective, donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne en tout point est L, donc le déterminant jacobien est constant et vaut $ab > 0$. D'après la formule de changement de variable, on a donc

$$\iint_E dxdy = \int_D ab\, dudv = ab\pi.$$

En fait, dans le polycopié la formule de changement de variables n'est énoncée que dans le cas où la source est un pavé.[1] Pour se ramener à ce cas, reprenons le calcul de l'aire du disque : l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ est de classe C^∞, elle envoie le pavé $[0,1] \times [0, 2\pi]$ sur D et sa restriction au pavé ouvert est un difféomorphisme de pavé ouvert sur son image. Il en est de même pour l'application composée $L \circ \Phi$, dont le déterminant jacobien en tout point (r, φ) est $\mathrm{dét}(L) r = abr > 0$. Par le théorème de changement de variables du polycopié, on a donc

$$\iint_E dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr\, dr d\varphi = \frac{1}{2} ab 2\pi = ab\pi.$$

(3) (4 pts) On considère E comme une plaque de densité surfacique constante et l'on note A son centre d'inertie. Calculer les coordonnées u_A, v_A de A. (Il ne suffit pas de donner la réponse ; celle-ci doit reposer sur un calcul correct ou un raisonnement précis.)

Solution : On a $\mathrm{vol}_2(E) u_A = \iint_E u\, dudv$. Utilisant à nouveau la formule de changement de variable et l'égalité $u = ax = ar\cos(\varphi)$, on obtient que cette intégrale vaut

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} ba^2 r^2 \cos(\varphi)\, dr d\varphi = \frac{ba^2}{3} \big[-\sin(\varphi) \big]_0^{2\pi} = 0$$

d'où $u_A = 0$. On obtient de même que $v_A =$, d'où $A = O$. On pouvait aussi dire que pour des « raisons de symétrie », le centre de gravité est sur les droites $u = 0$ et $v = 0$, donc est égal à O. Une justification mathématique de cet argument de symétrie est la suivante : l'application linéaire bijective $S : (u,v) \mapsto (-u, v)$ envoie E sur elle-même et son déterminant jacobien est -1, de valeur absolue 1. D'après la formule de changement de changement de variable, on a donc

$$\iint_E u\, dudv = \iint_E -u\, dudv$$

donc cette intégrale est nulle, d'où $u_A = 0$. On obtient de même que $v_A = 0$.

[1] Ceci sera amélioré l'an prochain.

On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$. Soient I le point $(0, 0, h)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cône de base E et de sommet I, i.e. $\mathscr{C}$ est la réunion, pour $p = (u, v)$ variant dans E, des segments

$$[p, I] = \big\{tp + (1-t)I = (tu, tv, (1-t)h) \mid t \in [0, 1]\big\}$$

i.e. $\mathscr{C}$ est l'image de $E \times [0, 1]$ par l'application

$$\phi : (u, v, t) \mapsto \big(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)\big) = \big(tu, tv, (1-t)h\big).$$

(4) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, exprimer le volume $\mathrm{vol}_3(\mathscr{C})$ en fonction de h et de $\mathrm{vol}_2(E)$.

Solution : L'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie plus haut est de classe C^∞ ; en tout point (u, v, t) sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} t & 0 & u \\ 0 & t & v \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

donc la valeur absolue du jacobien est ht^2. De plus, ϕ est bijective sur l'ouvert défini par $t \neq 0$, car on a alors $u = x/t$, $v = y/t$ et $1 - t = z/h$. Donc, d'après la formule de changement de variables, on a

$$\mathrm{vol}_3(\mathscr{C}) = \iiint_{\mathscr{C}} dxdydz = \int_0^1 \iint_E ht^2\, dudvdt = \frac{h}{3}\mathrm{vol}_2(E).$$

(5) (6 pts) On considère $\mathscr{C}$ comme un solide de densité volumique constante et l'on note G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées x_G, y_G, z_G de G.

Solution : Comme $\mathscr{C}$ est invariant par le changement de x en $-x$ ou de y en $-y$, alors par l'argument de symétrie déjà évoqué on a $x_G = 0 = y_G$. (Ceci peut aussi se voir par un calcul direct analogue à celui qu'on va faire pour z_G.) Utilisant à nouveau la formule de changement de variable et l'égalité $z = (1-t)h$, on a :

$$\mathrm{vol}_3(\mathscr{C})z_G = \iiint_{\mathscr{C}} z\, dxdydz = \int_0^1 \iint_E h^2t^2(1-t)\, dudvdt = h^2\mathrm{vol}_2(E) \int_0^1 (t^2 - t^3)\, dt$$

soit $\mathrm{vol}_3(\mathscr{C})z_G = \dfrac{h^2}{12}\mathrm{vol}_2(E)$. Donc, en divisant par $\mathrm{vol}_3(\mathscr{C})$ on obtient que $z_G = h/4$.

Remarque. Ceci est un fait général : le centre d'inertie d'un cône de $\mathbb{R}^3$ de sommet I et de base $\mathscr{B}$ est situé sur le segment joignant I au centre d'inertie A de $\mathscr{B}$, aux $3/4$ de la longueur en partant de I (comparer avec le $2/3$ qu'on obtient dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas d'un triangle).

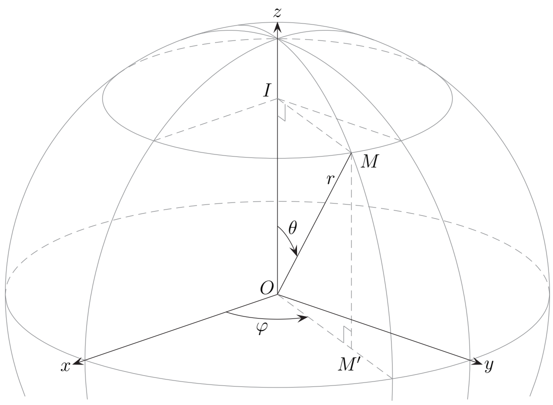
Exercice 4. — (environ 12 pts)

(1) (2 pts) Introduire les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, **en faisant un dessin** pour expliquer à quoi correspondent les angles θ et φ introduits.

Solution : On note $O = (0, 0, 0)$ et N le pôle Nord de la sphère unité, i.e. $N = (0, 0, 1)$. Pour tout point M, on note $r = OM = \|OM\|_2$. Si $M \neq O$, on note $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre les demi-droites $[ON)$ et $[OM)$. La coordonnée z de M est alors égale à $r\cos(\theta)$. Notons M' le projeté de M sur le plan (Oxy), sa longueur est $r' = OM' = r\sin(\theta)$. Si $M' \neq O$, i.e. si $M \notin (Oz)$, on note φ l'angle entre les demi-droites $[Ox)$ et $[OM')$, on a donc $M' = (r'\cos(\varphi), r'\sin(\varphi), 0)$ et donc

$$M = (x, y, z) = \big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big).$$

L'application $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ ainsi définie est C^∞ et surjective. Elle est injective si l'on se restreint à l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ et elle induit un difféomorphisme de U sur son image.



Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

(2) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables, calculer le volume $\mathrm{vol}(B)$. (Il ne suffit pas de donner la réponse ; celle-ci doit être justifiée par un calcul correct.)

Solution : Le déterminant jacobien de Ψ en un point (r, θ, φ) est $r^2 \sin(\theta) > 0$ (cf. le cours). D'après la formule de changement de variables, on a donc

$$\mathrm{vol}(B) = \iiint_B dxdydz = \int_0^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi r^2 \sin(\theta)\, drd\theta d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3}\big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(3) (6 pts) Soit $C = \{(x, y, z) \in B \mid z \geq 0\}$. On considère C comme un solide de densité volumique constante et l'on note G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées x_G, y_G, z_G de G.

Solution : À nouveau, pour des raisons de symétrie on a $x_G = 0 = y_G$. Calculons z_G. Notons d'abord qu'en coordonnées sphériques, C est paramétré par les (r, θ, φ) comme plus haut, sauf que θ varie entre 0 et $\pi/2$. Comme $z = r\cos(\theta)$, la formule de changement de variables donne, en tenant compte de l'égalité $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$:

$$\mathrm{vol}(C) z_G = \iiint_C z\, dxdydz = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^\pi r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\, drd\theta d\varphi = \pi\frac{R^4}{4}\big[-\cos(2\theta)/2\big]_0^{\pi/2}$$

soit $\mathrm{vol}(C) z_G = \dfrac{\pi R^4}{4}$. En divisant par $\mathrm{vol}(C) = \mathrm{vol}(B)/2$, on obtient $z_G = \dfrac{3R}{8}$.

Exercice 5. — (environ 14 pts) Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ la forme différentielle de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ définie par

$$P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big), \qquad Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big).$$

(1) (4 pts) Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Solution : On a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(-x\sin(x) + y\cos(x) - \cos(x)\big) - \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big)2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(y\cos(x) - x\sin(x) + \cos(x)\big) - \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big)2x$$

d'où par soustraction et réduction au même dénominateur :

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\Big(-2(x^2+y^2)\cos(x)+\cos(x)(2y^2+2x^2)\Big)=0.$$

Pour tout $R\in\mathbb{R}_+^*$ on note Γ_R le chemin $[0,\pi]\to U$ défini par $\Gamma_R(\theta)=\begin{pmatrix}R\cos(\theta)\\R\sin(\theta)\end{pmatrix}$ et l'on pose $f(R)=\displaystyle\int_{\Gamma_R}\omega$. Alors, on peut montrer (on ne demande pas la démonstration) qu'on a :

$$(\star)\qquad f(R)=\int_0^\pi e^{-R\sin(\theta)}\cos(R\cos(\theta))\,d\theta.$$

Solution : Pour prouver ceci, on peut dire que ω est la partie imaginaire de la forme différentielle à valeurs complexes :

$$\frac{e^{iz}}{z}dz=e^{-y}\big(\cos(x)+i\sin(x)\big)\frac{x-iy}{x^2+y^2}(dx+idy)$$

i.e. pour tout chemin $\gamma(t)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$, écrivant $\gamma(t)=a(t)+ib(t)$ avec $a(t)$ et $b(t)$ dans $\mathbb{R}$, $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$ est la partie imaginaire de :

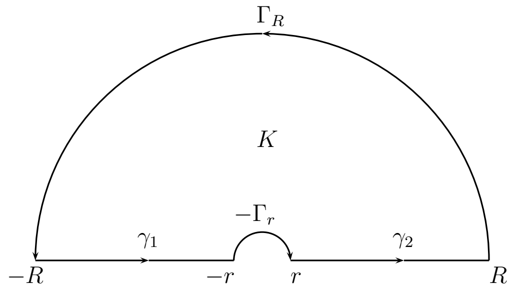
$$\frac{e^{i\gamma(t)}}{\gamma(t)}\gamma'(t)=e^{-b(t)}\Big(\cos(a(t))+i\sin(a(t))\Big).\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)},$$

Pour le chemin $\Gamma_R(t)=Re^{it}=R(\cos(t)+i\sin(t))$, on a $\Gamma_R'(t)=i\Gamma_R(t)$ et donc $\omega(\Gamma_R(t))(\Gamma_R'(t))$ est la partie imaginaire de :

$$ie^{-R\sin(t)}\big(\cos(R\cos(t))+i\sin(R\cos(t))\big),$$

à savoir $e^{-R\sin(t)}\cos(R\cos(t))$.

Soient r,R des réels tels que $0<r<1<R$ et soit K le compact de U représenté sur la figure suivante :



i.e. le bord orienté de K est la somme des chemins orientés γ_1, γ_2, Γ_R et $-\Gamma_r$, où $\gamma_1(x)=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ pour $x\in[-R,-r]$ et $\gamma_2(x)=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ pour $x\in[r,R]$.

(2) (4 pts) Montrer que $\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega=\int_{\Gamma_r}\omega-\int_{\Gamma_R}\omega$.

Solution : D'après la formule de Green-Riemann et la question 1, on a

$$\int_{\partial K}\omega=\iint_K d\omega=0$$

d'où l'égalité voulue puisque $\partial K=\gamma_1-\Gamma_r+\gamma_2+\Gamma_R$.

(3) (2 pts) Montrer que $\int_{\gamma_2} \omega = \int_a^b g(x)\, dx$ pour des réels $a < b$ et une fonction g qu'on précisera.

<u>Solution</u> : Sur le chemin γ_2, on a $\gamma_2'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = 0$, d'où

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_r^R \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

On obtient de même que : $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin(x)}{x} dx.$

(4) (4 pts) En utilisant la formule $(\star)$ et en citant un théorème du cours qu'on précisera, montrer que $\lim_{r \to 0^+} f(r) = \pi$.

<u>Solution</u> : La fonction $h(r, \theta) = e^{-r\sin(\theta)} \cos(r\cos(\theta))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ donc, d'après un théorème du cours, la fonction $H : r \mapsto \int_0^\pi h(R, \theta)\, d\theta$ est continue. Comme $f(r) = H(r)$ pour $r > 0$ d'après $(\star)$, on a donc $\lim_{r \to 0^+} f(r) = H(0) = \pi$.

Remarque. Comme la fonction $\sin(x)/x$ se prolonge par continuité en 0, il est facile de voir que

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{-r}^{r} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = 0.$$

En travaillant un peu plus, on peut montrer que $\lim_{R \to +\infty} H(R) = 0$. En faisant tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$, on déduit de ce qui précède que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi.$$