Examen du 6 janvier 2017 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les cinq exercices sont indépendants. Cet examen est noté sur **70**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 70 seront comptées comme 70.

Exercice 1. — (environ 18 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y$.

(1) (2 pts) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (6 pts) Déterminer les points critiques de f.

(3) (4 pts) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

(4) (6 pts) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

Exercice 2. — (environ 20 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = \cos(\pi\sqrt{x^2 + y^2})$.

(1) (4 pts) Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Montrer que f est de classe C^1 sur U et, pour tout $(x, y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Puis déterminer l'ensemble E^* des $(x, y) \in U$ pour lesquels $df(x, y) = 0$.

(2) (2 pts) Montrer que E^* s'écrit de façon naturelle comme la réunion de sous-ensembles disjoints E_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et précisez en quels points f admet des maxima ou minima.

(3) (4 pts) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent et valent 0.

(4) (4 pts) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, puis que $(0, 0)$ est un point critique de f. Est-ce un maximum ou minimum de f ?

(5) (4 pts) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, y) = f(x - 1, y)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'ensemble F des points critiques de g.

(6) (2 pts) On pose $E_0 = \{(0, 0)\}$ et $E = E^* \cup E_0$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$. Montrer que $D \cap E \cap F$ est formé de cinq points, que l'on déterminera. (Il pourra être utile de faire un dessin représentant les points critiques de f et de g dans le disque D.)

Exercice 3. — (environ 20 pts) Soient $a, b, h \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $E = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \leq 1\right\}$ (i.e. E est l'intérieur d'une ellipse).

(1) (2 pts) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Montrer que l'application linéaire $L : (x, y) \mapsto (ax, by)$ établit une bijection de D sur E.

(2) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, calculer l'aire de E, qu'on notera $\mathrm{vol}_2(E)$.

(3) (4 pts) Soit A le centre d'inertie de E.[(1)] Calculer les coordonnées u_A, v_A de A. (Il ne suffit pas de donner la réponse ; celle-ci doit reposer sur un calcul correct ou un raisonnement précis.)

On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$. Soient I le point $(0, 0, h)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cône de base E et de sommet I, i.e. $\mathscr{C}$ est la réunion, pour $p = (u, v)$ variant dans E, des segments

$$[p, I] = \{tp + (1 - t)I = (tu, tv, (1 - t)h) \mid t \in [0, 1]\}$$

i.e. $\mathscr{C}$ est l'image de $E \times [0, 1]$ par l'application

$$\phi : (u, v, t) \mapsto \big(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)\big) = \big(tu, tv, (1 - t)h\big).$$

[(1)] E étant considéré comme une plaque de densité constante.

(4) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, exprimer le volume $\mathrm{vol}_3(\mathscr{C})$ en fonction de h et de $\mathrm{vol}_2(E)$.

(5) (6 pts) On considère $\mathscr{C}$ comme un solide de densité volumique constante et l'on note G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées x_G, y_G, z_G de G.

Exercice 4. — (environ 12 pts)

(1) (2 pts) Introduire les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, **en faisant un dessin** pour expliquer à quoi correspondent les angles θ et φ introduits.

Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

(2) (4 pts) En utilisant la formule de changement de variables, calculer le volume $\mathrm{vol}(B)$. (Il ne suffit pas de donner la réponse ; celle-ci doit être justifiée par un calcul correct.)

(3) (6 pts) Soit $C = \{(x, y, z) \in B \mid z \geq 0\}$, considéré comme un solide de densité constante, et soit G son centre d'inertie. Déterminer les coordonnées x_G, y_G, z_G de G.

Exercice 5. — (environ 14 pts) Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ la forme différentielle de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ définie par

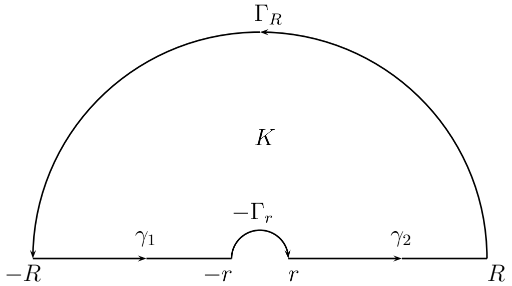
$$P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(x \sin(x) - y \cos(x)\big), \qquad Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\big(x \cos(x) + y \sin(x)\big).$$

(1) (4 pts) Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ on note Γ_R le chemin $[0, \pi] \to U$ défini par $\Gamma_R(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et l'on pose $f(R) = \displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$. Alors, on peut montrer (on ne demande pas la démonstration) qu'on a :

$$(\star) \qquad f(R) = \int_0^\pi e^{-R\sin(\theta)} \cos(R\cos(\theta))\, d\theta.$$

Soient r, R des réels tels que $0 < r < 1 < R$ et soit K le compact de U représenté sur la figure suivante :



i.e. le bord orienté de K est la somme des chemins orientés γ_1, γ_2, Γ_R et $-\Gamma_r$, où $\gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [-R, -r]$ et $\gamma_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [r, R]$.

(2) (4 pts) Montrer que $\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_r} \omega - \int_{\Gamma_R} \omega$.

(3) (2 pts) Montrer que $\int_{\gamma_2} \omega = \int_a^b g(x)\, dx$ pour des réels $a < b$ et une fonction g qu'on précisera.

(4) (4 pts) En utilisant la formule $(\star)$ et en citant un théorème du cours qu'on précisera, montrer que $\lim_{r \to 0^+} f(r) = \pi$.

FIN