Examen partiel du 3 novembre 2016 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les cinq exercices sont indépendants. Ce partiel est noté sur **20**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 20 seront comptées comme 20.

Exercice 1. — (environ 6 pts) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

(1) Démontrer les quatre inégalités suivantes : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\ \|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$.

(2) [(1)] On pose $S_\infty(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x \in S_\infty(1)$, montrer que $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_1$. A-t-on égalité pour certains x ? Si oui lesquels ? En déduire, en le justifiant, la valeur de

$$|||a||| = \max_{x \in S_\infty(1)} |\sum_{i=1}^n a_i x_i|.$$

Exercice 2. — (environ 4 pts) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \mapsto g(y_1, y_2)$ deux applications différentiables et soit $h = g \circ f$, i.e.

$$h(x_1, x_2) = g\big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big).$$

(1) Pour tout (x_1, x_2), donner la formule exprimant $(\partial h/\partial x_1)(x_1, x_2)$ en fonction des dérivées partielles de g et de f.

(2) Appliquer ce qui précède au cas où $f_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$, $f_2(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \sin(x_2)$ et $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$.

Exercice 3. — (environ 6 pts) Soient U (resp. V) un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ des applications différentiables, et $h = g \circ f$.

(1) Pour tout $a \in U$, exprimer la matrice jacobienne $Dh(a)$ comme produit des matrices jacobiennes $Dg(b)$ et $Df(a)$ pour le point b approprié.

(2) Soient $I =]-\pi, \pi[$, $U = \mathbb{R}_+^* \times I$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. Pour tout $(r, \theta) \in U$, écrire la matrice jacobienne $Df(r, \theta)$, puis montrer qu'elle est inversible et calculer son inverse.

(3) Soit D la demi-droite $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. On rappelle que f est un C^1-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 - D$ et l'on note $g = f^{-1} : V \to U$, $(x, y) \mapsto \big(r(x, y), \theta(x, y)\big)$ le difféomorphisme inverse. En utilisant ce qui précède, déterminer pour tout $(x, y) \in V$ la matrice jacobienne $Dg(x, y)$.

(4) En déduire la valeur de $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}(x, y)$.

Exercice 4. — (environ 6 pts) On pose $f(x, y) = 2x^4 - 6x^2 + 5y^2 + 2y(x^2 - 6)$.

(1) En citant des résultats du cours justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x, y), on exprimera y en fonction de x puis l'on résoudra l'équation $xP(x) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

[(1)] Cette question est indépendante de la précédente.

(4) Pour chaque point critique p, écrire la matrice hessienne de f en p et déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f.

***Exercice 5* (Questions de cours)**. — (environ 7 pts)

(1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Donnez la définition de : « N_1 et N_2 sont équivalentes ».

(2) Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. Donnez la définition de : « C est convexe ».

(3) Soient N une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $B = B(x_0, r) = \{x \in E \mid N(x - x_0) < r\}$. Montrer que B est convexe.

(4) Soit I un intervalle (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Donnez la définition de : « f est uniformément continue sur I ».

(5) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$. Pouvez-vous démontrer que f est uniformément continue ou bien ne l'est pas ?