Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261)
Janvier–Mai 2018.

Examen final – 30 Mai 2018

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'examen a un total de 90 points. Les notes $\geqslant 75$ seront considérées comme 75.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.

Exercice 1. Pour chaque entier $n \geqslant 1$ et chaque $x \geqslant 0$, on écrit $f_n(x) = \dfrac{x}{n + n^3 x}$.

1. (2pts) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, la série $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

   Correction. Clairement $f_n(0) = 0$ et donc $F(0) = 0$. Si $x > 0$, alors
   $$f_n(x) = \frac{1}{\frac{n}{x} + n^3} \sim \frac{1}{n^3}.$$
   Or, $f_n(x) \geqslant 0$ et $n^{-3} \geqslant 0$, alors on peut appliquer le critère des séries équivalentes pour montrer que $\sum f_n(x)$ converge.

   Autre façon : Pour tout $x \geqslant 0$ on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ donc par majoration $\sum f_n(x)$ converge puisque $\sum_{n>0} \dfrac{1}{n^3}$ converge. □

2. (9pts) Montrer que $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

   Correction. On montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $]a, +\infty[$ pour tout $0 < a$. Ceci montrera que F est C^1 sur $]a, +\infty[$ et donc que F est C^1 sur $]0, +\infty[$.
   On a
   $$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{(n + n^3 x) - x n^3}{(n + n^3 x)^2} \\ &= \frac{n}{(n + n^3 x)^2}. \end{aligned}$$
   On note que si $x > a$, alors
   $$|f_n'(x)| < \frac{n}{(n + n^3 a)^2}.$$
   Or,
   $$\begin{aligned} \frac{n}{(n + n^3 a)^2} &= \frac{n}{n^6 (n^{-2} + a)^2} \\ &= \frac{1}{n^5 (n^{-2} + a)^2} \\ &\sim \frac{1}{a^2 n^5}. \end{aligned}$$
   D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + n^3 a)^2}$ converge, et $\sum f_n'$ converge normalement. □

Exercice 2. Répondre aux items suivants :

1. (9pts) On suppose que $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $z = -4$ et diverge pour $z = 6i$. En justifiant avec un théorème du cours, déterminer si les séries suivantes

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 7^n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 3^n, \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

sont convergentes ou divergentes.

Correction. Comme $S(-4)$ converge, on sait que $\sum |a_n z^n|$ converge pour tout $|z| < 4$. Il suit que $A = S(1)$ converge, que $C = S(-3)$ converge, et que $D = S\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ converge parce que $\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1+3}{4} = 1$. Par contre, comme $S(6i)$ diverge, alors $S(7)$ ne peut pas converger : autrement le théorème dirait que $S(6i)$ converge aussi car $|6i| < 7$.

Autre façon : Si l'on note ρ le rayon de convergence, alors on a $4 \leqslant \rho \leqslant 6$ et la série converge pour $|z| < \rho$ et diverge pour $|z| > \rho$. □

2. (8pts) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}, \quad T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \log n}, \quad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n/3}}{\cos(1)^n \cdot (n^2+1)} x^{4n}.$$

Correction. On applique le critère de d'Alembert à S. On a

$$\frac{2^n\sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Le rayon est ainsi 2.

On applique le critère de Cauchy à U. On a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\log n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}.$$

Or,

$$\log(n)^{1/n} = \exp\frac{\log(\log n)}{n} \longrightarrow 1.$$

Le rayon est ainsi 3.

Autre façon : On peut aussi appliquer le critère de d'Alembert : posant $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n \log(n)}$ on a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\log(n)}{3\log(n+1)}.$$

Or $n+1 = n(1+\frac{1}{n})$ donc $\log(n+1) = \log(n) + \log(1+\frac{1}{n})$ donc le rapport ci-dessus tend vers $1/3$ quand $n \to +\infty$. Le rayon de convergence est donc 3.

On applique le critère de d'Alembert à U :

$$\left|\frac{e^{2\pi i(n+1)/3}x^{4n+4}}{\cos(1)^{n+1}(n^2+2n+2)}\right| \div \left|\frac{e^{2\pi i n/3}x^{4n}}{\cos(1)^n(n^2+1)}\right| = \frac{1}{\cos(1)} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \cdot |x|^4.$$

Comme la limite de cette suite vaut $\frac{|x|^4}{\cos(1)}$, il suit que la série diverge pour $|x|^4 > \cos(1)$ et converge pour $|x|^4 < \cos(1)$. Donc, le rayon est $\sqrt[4]{\cos(1)}$. □

3. (4pts) En utilisant que la dérivée de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $x \in \mathbb{R}$ vaut $\dfrac{1}{x^2+1}$, déterminer le développement de $\arctan(x)$ en série entière centrée à l'origine. (Vous devez faire attention aux domaines d'application des théorèmes du cours.)

Correction. On sait que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et cette série géométrique converge si $|x^2| < 1$, c.-à-d. si $|x| < 1$. Il suit que, pour tout $|X| < 1$, on peut intégrer terme à terme :

$$\forall X \in \,]-1,1[, \qquad \arctan(X) - \arctan(0) = \int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^X x^{2n}\,dx$$

et comme $\arctan(0) = 0$ on obtient $\arctan(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|X| < 1$. □

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de période 2π définie par

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } t \in [-\pi, 0[, \\ 0, & \text{si } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

1. (5pts) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le n-ème coefficient de Fourier exponentiel $c_n = \hat{f}(n)$ de f.

Correction. On a pour $n \neq 0$ que

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{0} -te^{-int}\,dt \\ &= \int_0^{\pi} se^{ins}\,ds \\ &= \left[s\frac{e^{ins}}{in}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{ins}}{in}\,ds \\ &= \pi\frac{(-1)^n}{in} - \left[\frac{e^{ins}}{-n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \pi\frac{(-1)^n}{in} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{c_n = \frac{(-1)^n}{2in} + \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}.}$$

Puis,

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{0} -t\,dt = \int_0^{\pi} s\,ds = \frac{\pi^2}{2}$$

donc $c_0 = \dfrac{\pi}{4}$. □

2. (6pts) Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on écrit $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{int}$. Relier $S(t) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(t)$ et $f(t)$. Ensuite, montrer que (S_N) *ne converge pas* uniformément sur $\mathbb{R}$.

Correction. f est C^1 par morceaux donc, d'après le théorème de Dirichlet, la suite $(S_N(x))$ converge pour tout x vers

$$g(x) = \frac{f(x-) + f(x^+)}{2}$$

et ceci vaut $f(x)$ en tout point où f est continue, c.-à-d. pour tout $x \notin -\pi + 2\mathbb{Z}\pi$. Par contre pour $x = -\pi$ on a $f(x^+) = \pi$ et $f(x-) = 0$ donc $(S_N(-\pi))$ converge vers $\pi/2$.

Par conséquent, ni f ni g ne sont continues en les points de $-\pi + 2\mathbb{Z}\pi$. Si on avait convergence uniforme, la fonction limite g serait continue. Donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. □

3. (4pts) Montrer, à l'aide des formules précédentes que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(À toutes fins utiles : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les coefficients trigonométriques sont déduits des coefficients exponentiels par $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i \cdot [c_n - c_{-n}]$.)

Correction. On voit que pour $n > 0$,

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.}$$

Comme $\cos(n0) = 1$ et $\sin(n0) = 0$, on déduit de la question précédente appliquée à $x = 0$ que

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} -\frac{2}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Une manipulation facile donne alors la formule souhaitée.

Autre façon : Il est possible aussi d'appliquer la question précédente à $x = \pm\pi$ car comme $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$, on trouvera

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}} -\frac{2}{\pi n^2}.$$

□

Exercice 4. On souhaite calculer la valeur de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$. On introduit ainsi $f(t,x) = \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$, et $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,dt$.

1. (2pt) Montrer que $F(x)$ converge pour tout $x \geqslant 0$.

Correction. On voit que $0 \leqslant f(t,x) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, et donc la convergence de $F(x)$ suit de la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$. De plus, comme arctan est une primitive de $\dfrac{1}{1+t^2}$, cette dernière intégrale vaut π. □

2. (4pts) Montrer que $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Correction. On montre que F converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Or, pour tout $x \geqslant 0$, on voit que $0 \leqslant f(t,x) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Il suit que la convergence est normale, donc uniforme, et donc F est continue car f est continue comme fonction de deux variables. □

3. (3pt) Prouver que $F(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$.

   Correction. Pour $x \geqslant 0$, alors $0 \leqslant f(t,x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{1+t^2}$ et donc $F(x) \leqslant e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi e^{-x}$. □

4. (9pts) Montrer que $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer $F'(x)$ comme une intégrale à paramètre.

   Correction. On a $\partial_2 f(t,x) = -e^{-x(1+t^2)}$. Fixons $\delta > 0$. Pour $x > \delta$ on a $|\partial_2 f(t,x)| \leqslant e^{-\delta(1+t^2)}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_2 f(t,x)\, dt$ converge normalement pour $x > \delta$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour obtenir $F'(x) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\, dt$ pour tout $x > \delta$, et donc pour tout $x > 0$ puisque $\delta > 0$ était arbitraire. □

5. (2pts) À partir de la question précédente, montrer que $F'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} J$ pour tout $x > 0$.

   Correction. On voit que $F'(x) = -e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2} dt$. Le changement de variable $s = t\sqrt{x}$ donne
   $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}\, dt &= e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2}\, dt \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds. \end{aligned}$$
   □

6. (2pts) Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour chaque $y > 0$, on a
   $$F(y) = J \int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

   Correction. Pour tout $0 < y < y'$ on a
   $$F(y') - F(y) = \int_y^{y'} F'(x)\, dx = -J \int_y^{y'} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx\,;$$
   faisant $y' \to +\infty$ et utilisant que dans ce cas $F(y') \to 0$, on arrive à la formule cherchée. □

7. (2pt) En déduire que pour $y > 0$, on a
   $$F(y) = J \cdot 2 \int_{\sqrt{y}}^{\infty} e^{-u^2}\, du.$$

   Correction. Le changement de variable $x = u^2$ donne
   $$\begin{aligned} F(y) &= J \int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= J \int_{\sqrt{y}}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u\, du \\ &= 2J \int_{\sqrt{y}}^{\infty} e^{-u^2}\, du. \end{aligned}$$
   □

8. (2pts) Obtenir $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

   Correction. On fait $y \downarrow 0$ dans la formule précédente et on emploie la continuité :

$$F(0) = 2J \int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

   Mais $J = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ et donc $F(0) = J^2$. Mais $F(0) = \pi$, car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi/2 - (-\pi/2)$. □

Exercice 5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\psi(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}$ pour tout t.

On fixe maintenant $f \in \mathcal{E}_\alpha$ et on note $\mathcal{L}(f)(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ sa transformée de Laplace.

1. (2pt) On suppose en plus que f est dérivable et que $f' : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ appartient également à $\mathcal{E}_\alpha$. Montrer que pour $s \in]\alpha, +\infty[$ on a $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

   Correction. On peut écrire

$$\int_0^T f'(t)e^{-st}\,dt = f(T)e^{-sT} - f(0) + s\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt.$$

   Prenant $T \to \infty$ et observant que $f(T)e^{-sT} \to 0$ car $f \in \mathcal{E}_\alpha$ et $s > \alpha$, on obtient $\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s)$. □

2. (1pt) On suppose en plus que f' est dérivable et que $f'' : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ appartient également à $\mathcal{E}_\alpha$. Pour $s > \alpha$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(s)$ en termes de $\mathcal{L}(f)$.

   Correction. On a $\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$. □

3. (14pts) À l'aide de la transformée de Laplace, trouver une solution φ de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

   telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = -7$. (À toutes fins utiles : $\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \dfrac{1}{s-k}$, $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$.)

   Correction. On suppose que φ est une solution et on note Φ sa transformée de Laplace. On sait que $\mathcal{L}(\varphi')(s) = s\Phi(s) - 1$ et que $\mathcal{L}(\varphi'')(s) = s^2\Phi(s) - s + 7$. Donc,

$$\begin{aligned} 0 &= s^2\Phi(s) - s + 7 - 4(s\Phi(s) - 1) - 5\Phi(s) \\ &= [s^2 - 4s - 5] \cdot \Phi(s) - s + 11. \end{aligned}$$

   On déduit que

$$\boxed{\Phi(s) = \frac{s-11}{s^2-4s-5}.}$$

   Or, un calcul facile montre que $(s-5)(s+1) = s^2 - 4s - 5$, puis la décomposition en éléments simples donne

$$\boxed{\Phi(s) = \frac{-1}{s-5} + \frac{2}{s+1}.}$$

   Il suit que

$$\boxed{\varphi(t) = -e^{5t} + 2e^{-t}.}$$

   □