Sorbonne Université
Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261)
Janvier–Mai 2019.

Examen final – 21 Mai 2019

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'examen est noté sur 50. Le total des points fait 60 et les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie de l'examen.

Exercice 1. (10 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et chaque $x > 1$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1 + n\log(x))}$. Montrer que $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout $x \in]1, +\infty[$ et que la fonction ainsi obtenue $F :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

Exercice 2. (10 pts) Répondre aux questions suivantes.

1. (4 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   Déterminer le rayon de convergence ρ de $F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, puis exprimer la fonction F comme une fonction rationnelle (=quotient de polynômes) sur $]-\rho, +\rho[$.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y''(x) + y(x) = 0. \tag{E}$$

   (a) (3pts) En *admettant* que (E) possède comme solution une série entière $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\rho > 0$, déduire une relation de récurrence entre les coefficients a_n.

   (b) (3 pts) Soit φ comme dans la question précédente. On suppose de plus que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$. Déterminer ρ.

Exercice 3. (14 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction de période 2π définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0, & \text{si } \pi \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

1. (6 pts) Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, déterminer le n-ième coefficient de Fourier exponentiel $c_n(f)$.
2. (8 pts) En utilisant la question précédente et l'égalité $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, déterminer explicitement la valeur de la série

$$\sigma = \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 4. (14 pts) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1 + t + \cos^2(t))}\, dt$.

1. (2 pts) Montrer que l'intégrale $F(x)$ converge pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2. (12 pts) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $F'(x)$ comme intégrale dépendant d'un paramètre.

Exercice 5. (12 pts) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\psi(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}$ pour tout t. Dans la suite, $\mathcal{L}$ désigne la transformée de Laplace.

1. (2 pts) Soit $f \in \mathcal{E}_\alpha$ telle que f est dérivable et $f' \in \mathcal{E}_\alpha$. Montrer que pour $s \in]\alpha, +\infty[$ on a $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.
2. (10 pts) En utilisant la transformée de Laplace, trouver une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' + y' - 20y = 0 \tag{E}$$
telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$. (À toutes fins utiles : $\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \dfrac{1}{s-k}$, $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ et $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$.)