Corrigé de l'examen du 15 mai 2017 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. L'exercice 4 est proposé en deux variantes 4A et 4B pour les étudiants des amphis A et B respectivement. Dans chaque exercice, on pourra admettre le résultat d'une question pour faire les questions suivantes. Cet examen est noté sur **75**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 75 seront comptées comme 75.

Exercice 1 (5 pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(x)^{2n}$.

1. (2 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

   Correction. Si $x \notin \mathbb{Z}\pi$, on a $|\cos(x)| < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Par contre, si $x \in \mathbb{Z}\pi$ on a $\cos(x) = \pm 1$ et donc $f_n(x) = 1$ pour tout n. Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement (i.e. ponctuellement) vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z}\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   $\square$

2. (3 pts) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f ? Justifier votre réponse.

   Correction. La fonction f n'est pas continue aux points $x \in \mathbb{Z}\pi$; par conséquent la convergence ne peut pas être uniforme. $\square$

Exercice 2 (18 pts)**.** On considère la série entière $S(z) = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)}$.

1. (2 pts) Déterminer son rayon de convergence r.

   Correction. Pour $n \geqslant 2$, posons $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n-1}{n+1}$ et ceci tend vers $\ell = 1$ quand n tend vers $+\infty$. Donc le rayon de convergence de S est $1/\ell = 1$. $\square$

2. (3 pts) Quel est le rayon de convergence de la série entière $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$? Quel lien y a-t-il entre S et T ?

   Correction. Pour $n \geqslant 1$, posons $b_n = \dfrac{1}{n}$. On a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n}{n+1}$ et ceci tend vers $L = 1$ quand n tend vers $+\infty$. Donc le rayon de convergence de T est $1/L = 1$. D'autre part, S est dérivable sur $D(0,1)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, et sa dérivée, obtenue en dérivant terme à terme, est égale à T. En d'autres termes, S est la primitive de T sur $D(0,1)$ nulle en 0.

   On pouvait aussi commencer par observer que T est la dérivée de S donc, d'après un résultat du cours, T a même rayon de convergence que S. $\square$

3. (3 pts) Quel est le rayon de convergence de la série entière $U(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n$? Quel lien y a-t-il entre T et U ?

   Correction. U est une série entière géométrique ; son rayon de convergence est 1. D'autre part, T est dérivable sur le disque ouvert $D(0,1)$ et sa dérivée, obtenue en dérivant terme à terme, est U. En d'autres termes, T est la primitive de U sur $D(0,1)$ nulle en 0. $\square$

4. (2 pts) Calculer la dérivée de la fonction $]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)\log(1-x)$ puis déterminer une primitive sur $]-\infty, 1[$ de la fonction $x \mapsto -\log(1-x)$.

   Correction. La dérivée de $(1-x)\log(1-x)$ est $-\log(1-x) - 1$. On en déduit qu'une primitive sur $]-\infty, 1[$ de la fonction $x \mapsto -\log(1-x)$ est $(1-x)\log(1-x) + x$. C'est l'unique primitive qui s'annule en $x = 0$. $\square$

5. (3 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < r$, exprimer $U(x)$, $T(x)$ et $S(x)$ au moyen de fonctions usuelles d'une variable réelle.

   Correction. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $U(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $T(x) = -\log(1-x)$. De plus, S est la primitive de T sur $]-1, 1[$ nulle en 0 donc, d'après la question précédente, on a : $S(x) = (1-x)\log(1-x) + x$. $\square$

6. (2 pts) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge. On note σ sa somme.

   Correction. C'est une série alternée dont le terme général décroît vers 0, elle est donc convergente. Rappelons la démonstration : posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$, la suite des sommes partielles de rang pair $P_n = \sum_{k=2}^{2n} u_k$ (resp. de rang impair $I_n = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k$) est décroissante (resp. croissante) et les suites $(P_n)_{n\geqslant 1}$ et $(I_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Notant σ leur limite commune, on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge vers σ. $\square$

7. (3 pts) En utilisant les questions précédentes et un théorème du cours, déterminer σ.

   Correction. Comme la série précédente converge alors, d'après le théorème d'Abel, la fonction $x \mapsto S(x)$ est continue sur le segment $[-1, 0]$ et l'on a donc

   $$\sigma = S(-1) = \lim_{x\to -1} (1-x)\log(1-x) + x = 2\log(2) - 1.$$

   $\square$

Exercice 3 (14 pts)**.** On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3n(3n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.[1]

1. (2 pts) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

1. Ceci corrige une erreur dans l'énoncé (qui était sans conséquence pour la suite).

Correction. On a $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{1}{3n(3n-1)}$ pour tout $n \geqslant 1$, et ceci tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc le rayon de convergence de f est $+\infty$. $\square$

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) = xy(x)$.

2. (6 pts) Soit $h(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En le justifiant soigneusement, montrer que h est solution de (E) si et seulement si les coefficients c_n vérifient des relations de récurrence que l'on précisera.

   Correction. Pour tout $x \in \,]-R, R[$, on a $h'(x) = \sum_{k\geqslant 1} kc_k x^{k-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}x^n$ et
   $$h''(x) = \sum_{k\geqslant 1}(k+1)kc_{k+1}x^{k-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n.$$
   Par conséquent, on a :
   $$h''(x) - xh(x) = 2c_2 + \sum_{n\geqslant 1}\Big((n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1}\Big)x^n$$
   et cette série entière est identiquement nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On en déduit que h est solution de (E) si et seulement si l'on a $c_2 = 0$ et $c_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}c_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ (c_0 et c_1 étant arbitraires). $\square$

3. (6 pts) Trouver une série entière $\phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ vérifiant $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$ et solution de l'équation (E), et montrer que son rayon de convergence est $+\infty$.

   Correction. Cherchons la solution sous la forme d'une série entière $\phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ avec $c_0 = 1$ et $c_1 = 0 = c_2$. Les relations de récurrence donnent alors $c_3 = \dfrac{1}{3\cdot 2}c_0$, $c_4 = 0 = c_5$, puis $c_6 = \dfrac{1}{6\cdot 5}c_3$, etc. On obtient ainsi $c_k = 0$ pour k non multiple de 3 et
   $$c_{3n} = \frac{1}{3n(3n-1)}c_{3n-3}$$
   pour tout $n \geqslant 1$. Comparant avec la suite (a_n) de la question 1, comme $c_0 = 1 = a_0$, on obtient $c_{3n} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme le rayon de convergence de f est $+\infty$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geqslant 0} c_{3n}x^{3n}$ converge vers $f(x^3)$, et donc la série entière $\phi(x) = \sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ est de rayon de convergence $+\infty$ et est solution de (E). $\square$

Exercice 4A. Uniquement pour les étudiants de l'amphi A ■ TD 1,2,3,4,13 (12 pts)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note E_a le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $f \in E_a$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f) :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$ par
$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

1. (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ soit e_k la fonction $t \mapsto e^{kt}$. Pour tout $s > k$ calculer $\mathscr{L}(e_k)(s)$.

Correction. Une primitive de $t \mapsto e^{(k-s)t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{(k-s)t}}{k-s}$. On en déduit que pour $s > k$, on a $\mathscr{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s-k}$. □

2. (2 pts) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in E_a$. Montrer que pour tout $s \in]a, +\infty[$ on a $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$.

   Correction. Pour tout $T > 0$ et $s > a$, une intégration par parties donne

   $$\int_0^T f'(t)e^{-st}\,dt = f(T)e^{-sT} - f(0) + s\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt.$$

   Comme $\lim_{T\to+\infty} f(T)e^{-sT} = 0$ pour $s > a$, on obtient que

   $$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

   ce qui est la formule cherchée. □

3. (1 pt) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et f' appartiennent à E_a. Pour tout $s \in]a, +\infty[$, déterminer alors $\mathscr{L}(f'')(s)$.

   Correction. Appliquant la question précédente à f', on obtient :

   $$\mathscr{L}(f'')(s) = s\mathscr{L}(f')(s) - f'(0).$$

   Remplaçant $\mathscr{L}(f')$ par $s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$, ceci donne :

   $$\mathscr{L}(f'')(s) = s^2\mathscr{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

   □

On considère l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$(E) \qquad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

On admet l'existence d'une solution f de (E) telle que f et f' appartiennent à E_a (pour un certain a). On écrit $F(s) = \mathscr{L}(f)(s)$ dans la suite.

4. (7 pts) Transformer l'équation (E) en utilisant la transformation de Laplace, puis déterminer F et ensuite f.

   Correction. On sait que $\mathscr{L}(f')(s) = sF(s) - 2$ et $\mathscr{L}(f'') = s^2F(s) - 2s - 3$. Donc,

   $$0 = s^2F(s) - 2s - 3 - 3\cdot[sF(s) - 2] + 2F(s) = F(s)(s^2 - 3s + 2) - 2s + 3.$$

   Par conséquent,

   $$\boxed{F(s) = \frac{2s-3}{s^2-3s+2}}.$$

La décomposition en éléments simples de F est

$$\frac{2s-3}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}.$$

Par conséquent, $F(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction

$$\boxed{t \mapsto e^t + e^{2t}.}$$

Il est facile de voir que cette fonction est bien solution de (E). □

Exercice 4B. **<u>Uniquement</u> pour les étudiants de l'amphi B ● TD 5,6,7,11,12** (12 pts)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note V_a le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $f \in V_a$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f) :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt.$$

1. (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ soit e_k la fonction $t \mapsto e^{kt}$. Pour tout $s > k$ calculer $\mathscr{L}(e_k)(s)$.

   Correction. Une primitive de $t \mapsto e^{(k-s)t}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{(k-s)t}}{k-s}$. On en déduit que pour $s > k$, on a $\mathscr{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s-k}$. □

2. (2 pts) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in V_a$. Montrer que pour tout $s \in]a, +\infty[$ on a $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$.

   Correction. Pour tout $T > 0$ et $s > a$, une intégration par parties donne

   $$\int_0^T f'(t)e^{-st}\, dt = f(T)e^{-sT} - f(0) + s\int_0^T f(t)e^{-st}\, dt.$$

   Comme $\lim_{T\to+\infty} f(T)e^{-sT} = 0$ pour $s > a$, on obtient que

   $$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\, dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt,$$

   ce qui est la formule cherchée. □

On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Un théorème général, que l'on admet, assure qu'il existe une unique solution $x = f$ et $y = g$ de ce système telle que $f(0) = 0$ et $g(0) = 2$, et que f et g appartiennent à V_a pour un certain a donc possèdent des transformées de Laplace $F = \mathscr{L}(f)$ et $G = \mathscr{L}(g)$.

3. (8 pts) Transformer le système (S) en utilisant la transformation de Laplace, puis déterminer F ou G, et ensuite f et g.

Correction. En appliquant la transformation de Laplace, on obtient le système

$$\begin{cases} sF(s) = 2F(s) + G(s) \\ sG(s) - 2 = F(s) + 2G(s) \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} (s-2)F(s) - G(s) = 0 \\ -F(s) + (s-2)G(s) = 2. \end{cases}$$

En ajoutant $(s-2)L_1$ à L_2 et en utilisant que $(s-2)^2 - 1 = (s-3)(s-1)$, on obtient :

$$F(s) = \frac{2}{(s-3)(s-1)} = \frac{\alpha}{s-3} + \frac{\beta}{s-1}$$

avec $\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha - 3\beta = 2$. On en déduit $-2\beta = 2$, d'où $\beta = -1$, puis $\alpha = 1$. Donc

$$F(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-1}$$

et ceci est la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{3t} - e^t$, qui est donc $f(t)$. En remplaçant dans la 1ère équation de (S), on obtient

$$g(t) = f'(t) - 2f(t) = e^{3t} + e^t.$$

À titre de vérification, on vérifie que la 2ème équation de (S) est bien satisfaite :

$$f(t) + 2g(t) = 3e^{3t} + e^t = g'(t).$$

□

Exercice 5 (24 pts)**.** On fixe $\alpha \in\,]0,1[$ et pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on pose $f(t,x) = e^{-t}t^{\alpha-1}e^{ixt}$. On veut étudier les intégrales $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$.

1. (1 pt) Soit $\varepsilon \in\,]0,1]$. Calculer $g(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{\alpha-1}\,dt$. Est-ce que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g(\varepsilon)$ existe ?

   Correction. Pour tout $\varepsilon \in\,]0,1]$, on a : $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\big[t^\alpha\big]_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^\alpha}{\alpha}$ et comme $\alpha > 0$ ceci tend vers $1/\alpha$ quand $\varepsilon \to 0^+$. □

2. (3 pts) Montrer que les intégrales $I_1(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

   Correction. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in\,]0,1]$, on a $|f(t,x)| \leqslant t^{\alpha-1}$. Donc, d'après la question précédente, les intégrales $I_1(x)$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$. □

3. (3 pts) Montrer que les intégrales $I_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Comme $\alpha < 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 1$:

$$|f(t,x)| = t^{\alpha-1}e^{-t} \leqslant e^{-t}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, on en déduit que les intégrales $I_2(x)$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$. □

4. (1 pt) La fonction $x \mapsto \phi(x)$ est-elle continue ? Justifier votre réponse.

Correction. Comme les intégrales $I_1(x)$ et $I_2(x)$ convergent uniformément, les fonctions I_1 et I_2 sont continues, donc leur somme ϕ l'est aussi. □

5. (2 pts) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et déterminer sa valeur. (On pourra procéder par intégration par parties.)

Correction. Pour tout $A \geqslant 1$ on a :

$$\int_1^A te^{-t}\,dt = \big[-te^{-t}\big]_1^A + \int_1^A e^{-t}\,dt = \big[-(t+1)e^{-t}\big]_1^A$$

et lorsque $A \to +\infty$ ceci tend vers $2/e$. □

6. (4 pts) Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, que vaut $h(t,x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$? En procédant comme ci-dessus, montrer que les intégrales $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = itf(t,x) = ie^{-t}t^{\alpha}e^{ixt}$. Comme $\alpha > 0$, on a $|h(t,x)| \leqslant e^{-t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1]$ donc les intégrales $J_1(x) = \displaystyle\int_0^1 h(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 1$, on a $|h(t,x)| = t^{\alpha}e^{-t} \leqslant te^{-t}$. Puisque, d'après la question précédente, la fonction $t \mapsto te^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en résulte que les intégrales $J_2(x) = \displaystyle\int_0^1 h(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
Remarque. Au lieu du calcul fait dans la question précédente, on pouvait dire que, comme $\lim_{t\to+\infty} te^{-t/2} = 0$, il existe $A > 0$ tel que $te^{-t} \leqslant e^{-t/2}$ pour tout $t \geqslant A$, d'où la convergence uniforme des intégrales $J_2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. □

7. (1 pts) En justifiant votre réponse, déterminer $\phi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Comme les intégrales $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ convergent uniformément alors, d'après un théorème du cours, ϕ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = i\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha}e^{ixt}\,dt.$$

□

8. (3 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto e^{t(ix-1)}$ puis, en utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(E) \qquad \phi'(x) = \frac{-\alpha}{x+i}\phi(x) = \frac{-\alpha(x-i)}{x^2+1}\phi(x).$$

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, une primitive de $t \mapsto e^{t(ix-1)}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}$. Alors, pour tout $A > 0$, on a

$$\int_0^A e^{-t}t^\alpha e^{ixt}\,dt = \left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\,t^\alpha\right]_0^A - \alpha\int_0^A \frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}t^{\alpha-1}\,dt$$

Quand A tend vers $+\infty$, le terme tout intégré tend vers 0 ; ceci donne $\dfrac{1}{i}\phi'(x) = \dfrac{-\alpha}{ix-1}\phi(x)$ d'où :

$$\phi'(x) = \frac{-\alpha}{x+i}\phi(x) = \frac{-\alpha(x-i)}{x^2+1}\phi(x).$$

□

9. (3 pts) On définit les fonctions u, v, w par $u(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$, $v(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ et $w = -\alpha u + i\alpha v$. Déterminer la primitive U (resp. V, resp. W) de u (resp. v, resp. w) qui s'annule en 0.

Correction. Comme $u(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{g'(t)}{g(t)}$, où $g(t) = t^2+1$, la primitive U cherchée est donnée par

$$U(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

D'autre part, une primitive de v est Arctan, et c'est la primitive V qui s'annule en 0. Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$W(x) = -\alpha U(x) + i\alpha V(x) = \frac{-\alpha}{2}\log(x^2+1) + i\alpha\mathrm{Arctan}(x).$$

□

10. (3 pts) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi(x) = \phi(0)\,\dfrac{e^{i\alpha\mathrm{Arctan}(x)}}{(x^2+1)^{\alpha/2}}$.

Correction. Comme ϕ est solution de l'équation différentielle :

$$\phi'(x) = w(x)\phi(x)$$

alors $\phi(x) = \phi(0)\exp(W(x))$. Rappelons la démonstration : pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $c(x) = \phi(x)\exp(-W(x))$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$c'(x) = \Big(\phi'(x) - w(x)\phi(x)\Big)\exp(-W(x)) = 0$$

donc c est constante, de valeur $c(0) = \phi(0)$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\phi(x) = \phi(0)\exp(W(x))$.

Enfin, comme $W(x) = \dfrac{-\alpha}{2}\log(x^2+1) + i\alpha\mathrm{Arctan}(x)$, on a

$$\exp(W(x)) = \frac{e^{i\alpha\mathrm{Arctan}(x)}}{(x^2+1)^{\alpha/2}},$$

d'où la formule demandée. $\square$

Exercice 6 (15 pts)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$.

1. (4 pts) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ calculer le coefficient de Fourier $c_n(f_\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\alpha - in)}\,dt$.

   Correction. Comme $e^{\pm in\pi} = (-1)^n$, on a :

   $$c_n(f_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(\alpha-in)}}{\alpha - in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\alpha - in}\,\frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi}.$$

   $\square$

2. (4 pts) On admet que l'égalité de Parseval est valable pour la fonction f_α. En utilisant cette égalité, déterminer $T(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{\alpha^2 + n^2}$.

   Correction. On a

   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\alpha t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2\alpha t}}{2\alpha}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi\alpha}(e^{2\alpha\pi} - e^{-2\alpha\pi}).$$

   Et, d'après la question précédente, on a $|c_n(f)|^2 = \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}\dfrac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})^2}{4\pi^2}$ pour tout n. L'égalité de Parseval donne donc

   $$\frac{(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})^2}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\alpha^2+n^2} = \frac{e^{2\alpha\pi} - e^{-2\alpha\pi}}{4\pi\alpha}.$$

   Comme $e^{2\alpha\pi} - e^{-2\alpha\pi} = (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi})$, on en déduit que

   $$T(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}.$$

   $\square$

3. (4 pts) En déduire la valeur de $S(\alpha) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}$ lorsque $\alpha = 1/\pi$.

   Correction. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a $T(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2} + 2S(\alpha)$. D'autre part, on a $T(1/\pi) = \pi^2\dfrac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}}$. On en déduit :

   $$S(1/\pi) = \frac{1}{2}\big(T(1/\pi) - \pi^2\big) = \pi^2\frac{e^{-1}}{e - e^{-1}} = \frac{\pi^2}{e^2 - 1}.$$

   $\square$

4. (bonus 3 pts) Soit $e = \exp(1) = 2,71828...$. En prenant comme valeur approchée $e \simeq 2,7 = 3 - 0,3$ donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $e^2 - 1$, puis comparer la valeur obtenue pour $S(1/\pi)$ avec la valeur de la somme $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, égale à $\pi^2/6$.

   Correction. Pour tout $n \geqslant 1$, $n^2 + \dfrac{1}{\pi^2}$ est (un peu) plus grand que n^2 donc $S(1/\pi)$ est (un peu) plus petit que $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Comme

$$e^2 - 1 \simeq (3 - 0,3)^2 - 1 = 9 - 1,8 + 0,09 - 1 \simeq 6,3$$

   le résultat trouvé est plausible. $\square$