Examen du 15 mai 2017 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. L'exercice 4 est proposé en deux variantes 4A et 4B pour les étudiants des amphis A et B respectivement. Dans chaque exercice, on pourra admettre le résultat d'une question pour faire les questions suivantes. Cet examen est noté sur **75**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 75 seront comptées comme 75.

Exercice 1 (5 pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(x)^{2n}$.

1. (2 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. (3 pts) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (18 pts)**.** On considère la série entière $S(z) = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)}$.

1. (2 pts) Déterminer son rayon de convergence r.
2. (3 pts) Quel est le rayon de convergence de la série entière $T(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$? Quel lien y a-t-il entre S et T ?
3. (3 pts) Quel est le rayon de convergence de la série entière $U(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n$? Quel lien y a-t-il entre T et U ?
4. (2 pts) Calculer la dérivée de la fonction $]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)\log(1-x)$ puis déterminer une primitive sur $]-\infty, 1[$ de la fonction $x \mapsto -\log(1-x)$.
5. (3 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < r$, exprimer $U(x)$, $T(x)$ et $S(x)$ au moyen de fonctions usuelles d'une variable réelle.
6. (2 pts) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge. On note σ sa somme.
7. (3 pts) En utilisant les questions précédentes et un théorème du cours, déterminer σ.

Exercice 3 (14 pts)**.** On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3n(3n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.[1]

1. (2 pts) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) = xy(x)$.

2. (6 pts) Soit $h(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En le justifiant soigneusement, montrer que h est solution de (E) si et seulement si les coefficients c_n vérifient des relations de récurrence que l'on précisera.
3. (6 pts) Trouver une série entière $\phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ vérifiant $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$ et solution de l'équation (E), et montrer que son rayon de convergence est $+\infty$.

1. Ceci corrige une erreur dans l'énoncé (qui était sans conséquence pour la suite).

Exercice 4A. Uniquement pour les étudiants de l'amphi A ■ TD 1,2,3,4,13 (12 pts)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note E_a le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $f \in E_a$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f) :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt.$$

1. (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ soit e_k la fonction $t \mapsto e^{kt}$. Pour tout $s > k$ calculer $\mathscr{L}(e_k)(s)$.
2. (2 pts) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in E_a$. Montrer que pour tout $s \in]a, +\infty[$ on a $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$.
3. (1 pt) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et f' appartiennent à E_a. Pour tout $s \in]a, +\infty[$, déterminer alors $\mathscr{L}(f'')(s)$.

On considère l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$(E) \qquad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$$

On admet l'existence d'une solution f de (E) telle que f et f' appartiennent à E_a (pour un certain a). On écrit $F(s) = \mathscr{L}(f)(s)$ dans la suite.

4. (7 pts) Transformer l'équation (E) en utilisant la transformation de Laplace, puis déterminer F et ensuite f.

Exercice 4B. Uniquement pour les étudiants de l'amphi B ● TD 5,6,7,11,12 (12 pts)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note V_a le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(t)| \leqslant Ce^{at}$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $f \in V_a$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f) :]a, +\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt.$$

1. (2 pts) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ soit e_k la fonction $t \mapsto e^{kt}$. Pour tout $s > k$ calculer $\mathscr{L}(e_k)(s)$.
2. (2 pts) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in V_a$. Montrer que pour tout $s \in]a, +\infty[$ on a $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)$.

On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Un théorème général, que l'on admet, assure qu'il existe une unique solution $x = f$ et $y = g$ de ce système telle que $f(0) = 0$ et $g(0) = 2$, et que f et g appartiennent à V_a pour un certain a donc possèdent des transformées de Laplace $F = \mathscr{L}(f)$ et $G = \mathscr{L}(g)$.

3. (8 pts) Transformer le système (S) en utilisant la transformation de Laplace, puis déterminer F ou G, et ensuite f et g.

Exercice 5 (24 pts)**.** On fixe $\alpha \in]0,1[$ et pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on pose $f(t,x) = e^{-t}t^{\alpha-1}e^{ixt}$. On veut étudier les intégrales $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$.

1. (1 pt) Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Calculer $g(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{\alpha-1}\,dt$. Est-ce que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g(\varepsilon)$ existe ?
2. (3 pts) Montrer que les intégrales $I_1(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
3. (3 pts) Montrer que les intégrales $I_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
4. (1 pt) La fonction $x \mapsto \phi(x)$ est-elle continue ? Justifier votre réponse.
5. (2 pts) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et déterminer sa valeur. (On pourra procéder par intégration par parties.)
6. (4 pts) Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, que vaut $h(t,x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$? En procédant comme ci-dessus, montrer que les intégrales $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t,x)\,dt$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.
7. (1 pts) En justifiant votre réponse, déterminer $\phi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. (3 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto e^{t(ix-1)}$ puis, en utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(E) \qquad \phi'(x) = \frac{-\alpha}{x+i}\phi(x) = \frac{-\alpha(x-i)}{x^2+1}\phi(x).$$

9. (3 pts) On définit les fonctions u, v, w par $u(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$, $v(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ et $w = -\alpha u + i\alpha v$. Déterminer la primitive U (resp. V, resp. W) de u (resp. v, resp. w) qui s'annule en 0.
10. (3 pts) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi(x) = \phi(0)\,\dfrac{e^{i\alpha \operatorname{Arctan}(x)}}{(x^2+1)^{\alpha/2}}$.

Exercice 6 (15 pts)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ pour tout $t \in [-\pi, \pi[$.

1. (4 pts) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ calculer le coefficient de Fourier $c_n(f_\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\alpha - in)}\,dt$.
2. (4 pts) On admet que l'égalité de Parseval est valable pour la fonction f_α. En utilisant cette égalité, déterminer $T(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}$.
3. (4 pts) En déduire la valeur de $S(\alpha) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\alpha^2+n^2}$ lorsque $\alpha = 1/\pi$.
4. (bonus 3 pts) Soit $e = \exp(1) = 2,71828\ldots$. En prenant comme valeur approchée $e \simeq 2,7 = 3 - 0,3$ donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $e^2 - 1$, puis comparer la valeur obtenue pour $S(1/\pi)$ avec la valeur de la somme $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, égale à $\pi^2/6$.