Amphi B, feuille d'exercices n° 2 : séries de fonctions, séries entières

Exercice 1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Notons S la fonction somme.
2. En utilisant un résultat du cours, montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant un résultat du cours, montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\mathrm{Arctan}(x/n)$ converge uniformément sur l'intervalle $[-A, A]$, pour tout $A > 0$, et que la fonction F somme de cette série est dérivable, de dérivée S.

Exercice 2. (a) Étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto xe^{-x}$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} x^n e^{-nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. On définit la fonction zêta de Riemann par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge

1. Montrer que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$, mais diverge pour $x \leqslant 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée de l'application $x \mapsto n^{-x} = \exp(-x\log(n))$.
3. En utilisant un résultats du cours, montrer que ζ est de classe C^1, et strictement décroissante, sur $]1, +\infty[$.
4. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une intégrale, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
5. Montrer de même que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Exercice 4 (Séries de Dirichlet)**.** Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes. On pose

$$L(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge. On suppose qu'elle converge pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer alors que L converge uniformément sur $[x_0, +\infty[$. *Indication* : utiliser l'inégalité d'Abel pour les suites $u_n = a_n/n^{x_0}$ et $f_n(x) = n^{x_0-x} = e^{(x_0-x)\log(n)}$.

Exercice 5. Soit (a_n) une suite de nombre complexes. On suppose que $a_n \neq 0$ pour n assez grand et que $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \ell$. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $1/\ell$.

Exercice 6. Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence puis exprimer la fonction somme, sur le disque de convergence, en termes de fonctions élémentaires :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$.

2. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+1}$.
3. $\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^n$. (On pourra écrire $n^2 = n(n-1)+n$.)

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. On pose $\dbinom{\alpha}{0} = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dbinom{\alpha}{n+1}\dbinom{\alpha}{n}^{-1} \right| = 1$, puis en déduire le rayon de convergence ρ de la série entière
$$S(z) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{\alpha}{n} z^n.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\dbinom{\alpha-1}{n-1} + \dbinom{\alpha-1}{n} = \dbinom{\alpha}{n}$.
3. Pour tout $z \in D(\rho)$, montrer que $S'(z) = \alpha \sum\limits_{n\geqslant 1} \dbinom{\alpha-1}{n} z^n$, puis que
$$(*) \qquad (1+z)S'(z) = \alpha S(z).$$
4. Pour tout $z \in D(1)$ on note $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$. Montrer que f est dérivable sur $D(1)$, de dérivée $f'(z) = 1/(1+z)$.

Pour tout $z \in D(1)$ on pose $h(z) = \exp(\alpha f(z))$. Exactement comme dans le cas d'une variable réelle, on montre que h est dérivable sur $D(1)$, de dérivée $h'(z) = \alpha \exp(\alpha f(z)) f'(z)$ et, comme h ne s'annule pas, que $c = S/h$ est dérivable sur $D(1)$, de dérivée :

$$c'(z) = \frac{S'(z)h(z) - S(z)h'(z)}{h(z)^2}.$$

(Exercice : démontrer ces formules !)

5. En utilisant les formules précédentes, montrer que pour tout $z \in D(1)$, on a $(1+z)h'(z) = \alpha h(z)$ et $c'(z) = 0$.
6. En utilisant un résultat du cours, plus le fait que $c(0) = 1$, montrer que $S(z) = h(z)$ pour tout $z \in D(1)$. En particulier, pour tout réel $x \in \left]-1, 1\right[$, on a
$$(1+x)^\alpha = \exp\big(\alpha \log(1+x)\big) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{\alpha}{n} x^n.$$