Amphi B, feuille d'exercices n° 2 bis : logarithme complexe, transformation d'Abel

Exercice 1 (Logarithme complexe)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

1. Dans cette question, on suppose que f est une bijection de U sur son image $f(U)$ et l'on note ϕ la bijection réciproque. Soit $z \in U$. Pour tout $v \in f(U)$ tel que $v \neq f(z)$, on a
$$\frac{\phi(v) - \phi(f(z))}{v - f(z)} \, \frac{f(\phi(v)) - f(z)}{\phi(v) - z} = 1.$$
En déduire que si ϕ est continue au point $f(z)$ et si $f'(z) \neq 0$,[1] alors ϕ est dérivable en $f(z)$, de dérivée $\phi'(f(z)) = 1/f'(z)$.

Soient $\Omega = \{x + i\theta \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R},\ \theta \in \,]-\pi, \pi[\}$ et $\Omega' = \mathbb{C} - \mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R}_-\}$. On rappelle (cf. feuille n°1) que l'application $\exp : \Omega \to \Omega'$, $z = x + i\theta \mapsto \exp(z) = e^x e^{i\theta}$ est une bijection de Ω sur Ω'. On note Log la bijection réciproque, i.e. tout $v \in \Omega'$ s'écrit de façon unique $v = re^{i\theta}$ avec $r = |v|$ et $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, et l'on pose $\operatorname{Log}(v) = \log(r) + i\theta$.

2. Dans cette question, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer alors que l'application $\operatorname{Log} : \Omega' \to \Omega$ est continue.
3. Montrer que pour tout $v \in \Omega'$, Log est dérivable en v, de dérivée $\operatorname{Log}'(v) = 1/v$.
4. Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - z \in \Omega'\}$ et $L : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - z)$. Montrer que L est dérivable sur U, de dérivée $L'(z) = \dfrac{-1}{1 - z}$.
5. On pose $D(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Montrer que pour tout $z \in D(1)$ on a $\operatorname{Log}(1 - z) = -\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$.

Exercice 2 (Optionnel)**.** Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables.

1. Soit $z \in U$. Montrer que $g \circ f$ est dérivable en z, de dérivée $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$. *Indication :* écrire $f(z + h) = f(z) + f'(z)h + \varepsilon(h)h$ et $g(f(z) + k) = g(f(z)) + g'(f(z))k + \eta(k)k$, où les limites en 0 de ε et η sont nulles, puis appliquer la deuxième égalité à $k = f'(z)h + \varepsilon(h)h$.
2. Soit $z \in U$ tel que $f(z) \neq 0$. Montrer que la fonction $a = 1/f$ est dérivable en z, de dérivée $a'(z) = -f'(z)/f(z)^2$.

Exercice 3 (Transformation d'Abel et conséquences)**.** Soit $S(z)$ la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$. Pour tout $\delta \in \,]0, 1]$ on pose $K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1, \quad |z - 1| \geqslant \delta\}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de S.

1. On peut montrer que si $f'(z) \neq 0$ alors ϕ est continue au point $f(z)$; c'est une conséquence du théorème d'inversion locale, cf. 2M216.

2. Faire une figure soignée représentant K_δ.

3. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ z \neq 1\}$. Pour tout $z \in \Gamma$ et $m, p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$(*) \qquad |z^m + \cdots + z^{m+p}| \leqslant \frac{2}{|z-1|}.$$

4. Soit $\delta \in \,]0,1]$. En utilisant la transformation d'Abel, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ converge uniformément sur K_δ. En déduire que la fonction $z \mapsto S(z)$ est continue sur K_δ.

5. Pour tout $\theta \in \,]0, 2\pi[$, montrer que $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2} = 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta+\pi)/2}$.

Désormais, on fixe $\theta \in \,]0, 2\pi[$ et l'on pose $c_\theta = 2\sin(\theta/2)$. On rappelle que le segment $[1, e^{i\theta}]$ est l'ensemble des $1 + t(e^{i\theta} - 1)$, pour $t \in [0,1]$; d'après la question précédente, c'est aussi l'ensemble des $1 + te^{i(\theta+\pi)/2}$, pour $t \in [0, c_\theta]$. On rappelle aussi que le disque fermé $\overline{D}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ est *convexe*. Enfin, on fixe $\delta > 0$ tel que $\delta < c_\theta$.

6. En utilisant la question (4), montrer que l'application $f : [\delta, c_\theta] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto S\big(1 + te^{i(\theta+\pi)/2}\big)$ est continue.

7. En utilisant l'exercice 1 et la question (5), déterminer $f(t)$ pour tout $t \in [\delta, c_\theta[$.

8. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $S(e^{i\theta})$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n l'unique élément de $\{1, -1, 0\}$ tel que $n \equiv a_n \mod 3$. En appliquant ce qui précède à $\theta = 2\pi/3$, déterminer la somme σ de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$