Amphi B, feuille d'exercices n° 3 : continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note $D(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ le disque fermé de centre $O = (0,0)$ et de rayon R et $\mathscr{C}(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leqslant x, y \leqslant R\}$ le carré fermé de centre O et de côtés de demi-longueur R. Pour toute fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on définit son intégrale double sur $\mathscr{C}(R)$ (resp. $D(R)$) en intégrant sur les « sections verticales », i.e. on pose

$$\iint_{\mathscr{C}(R)} f(x,y)\,dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} f(x,y)\,dy \right) dx, \tag{†}$$

$$\iint_{D(R)} f(x,y)\,dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{b(x)}^{u(x)} f(x,y)\,dy \right) dx, \tag{‡}$$

où $u(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $b(x) = -u(x)$ pour tout $x \in [-R, R]$.

1. En citant un résultat du cours, montrer que ci-dessus les termes de droite sont bien définis.
2. Montrer que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ alors

$$\iint_{D(R)} f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_{\mathscr{C}(R)} f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_{D(\sqrt{2}\,R)} f(x,y)\,dxdy.$$

On admet que le passage en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, avec $r \in [0,R]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, donne la formule de changement de variable suivante :

$$(\star) \qquad \iint_{D(R)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r,\theta)\,r\,drd\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\,d\theta \right) r\,dr.$$

On suppose désormais que $f(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2} = e^{-r^2}$ et l'on pose $I(R) = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$.

3. En utilisant la définition, montrer que $\iint_{\mathscr{C}(R)} f(x,y)\,dxdy = I(R)^2$.
4. En utilisant $(\star)$, montrer que $\iint_{D(R)} f(x,y)\,dxdy = \pi(1 - e^{-R^2})$.
5. Montrer que $\lim_{R\to+\infty} I(R) = \sqrt{\pi}$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 (Théorème de Fubini)**.** Soient $a < c$ dans $\mathbb{R}$, soient $b : [a,c] \to \mathbb{R}$ une application continue[1], Y un réel $\geqslant \max_{x\in[a,c]} b(x)$ et

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant c, \quad b(x) \leqslant y \leqslant Y\}.$$

1. On utilise la lettre b pour « bas ».

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue et M un réel > 0 tel que $|f(x,y)| \leqslant M$ pour tout $(x,y) \in D$. Pour tout $x \in [a,c]$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x \left(\int_{b(t)}^Y f(t,y)\,dy\right) dt$.

1. En utilisant des résultats du cours, montrer que F est dérivable sur $[a,c]$ et $F'(x) = \displaystyle\int_{b(x)}^Y f(x,y)\,dy$. (Pour $x = a$, resp. $x = c$, il s'agit d'une dérivée à droite, resp. à gauche.)

On suppose désormais que b est **strictement monotone** sur $[a,c]$, c.-à-d. strictement croissante ou bien strictement décroissante, et l'on prend $Y = \max_{x\in[a,c]} b(x)$, i.e. $Y = b(c)$ (resp. $b(a)$) si b est croissante (resp. décroissante).

1er cas : b est strictement décroissante sur $[a,c]$. C'est alors une bijection de $[a,c]$ sur $[b(c), b(a)]$; on note b^{-1} la bijection réciproque. Au lieu d'intégrer sur les « sections verticales », on peut aussi intégrer sur les « sections horizontales », i.e. pour tout $x \in [a,c]$ on pose :

$$(*) \qquad G(x) = \int_{b(x)}^{b(a)} \left(\int_{b^{-1}(y)}^x f(t,y)\,dt\right) dy.$$

2. Soit $x \in [a,c[$ et soit $h > 0$ tel que $x + h \leqslant c$. Montrer **en faisant une figure** que

$$G(x+h) - G(x) = \int_{b(x+h)}^{b(x)} \left(\int_{b^{-1}(y)}^{x+h} f(t,y)\,dt\right) dy + \int_{b(x)}^{b(a)} \left(\int_x^{x+h} f(t,y)\,dt\right) dy.$$

   Montrer que pour tout $y \in [b(x+h), b(x)]$ on a $x \leqslant b^{-1}(y) \leqslant x+h$, puis que

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \int_{b(x)}^{b(a)} f(x,y)\,dy\right| \leqslant \big(b(x) - b(x+h)\big)M + \int_{b(x)}^{b(a)} \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t,y)\,dt - f(x,y)\right| dy.$$

3. Montrer alors que G est dérivable à droite en x, de dérivée à droite $G'_d(x)$ égale à $F'(x)$.

2ème cas : b est strictement croissante sur $[a,c]$. C'est alors une bijection de $[a,c]$ sur $[b(a), b(c)]$; on note encore b^{-1} la bijection réciproque. On intègre à nouveau sur les sections horizontales, i.e. pour tout $x \in [a,c]$ on pose :

$$(**) \qquad G(x) = \int_{b(a)}^{b(x)} \left(\int_a^{b^{-1}(y)} f(t,y)\,dt\right) dy + \int_{b(x)}^{b(c)} \left(\int_a^x f(t,y)\,dt\right) dy.$$

4. Soit $x \in [a,c[$ et soit $h > 0$ tel que $x + h \leqslant c$. Montrer **en faisant une figure** que

$$G(x+h) - G(x) = \int_{b(x)}^{b(x+h)} \left(\int_x^{b^{-1}(y)} f(t,y)\,dt\right) dy + \int_{b(x+h)}^{b(c)} \left(\int_x^{x+h} f(t,y)\,dt\right) dy.$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Montrer comme précédemment qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \int_{b(x+h)}^{b(c)} f(x,y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $h \in]0, \delta]$. Puis montrer que

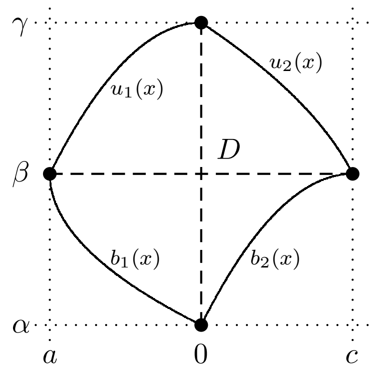
$$\left| \int_{b(x+h)}^{b(c)} f(x,y)\,dy - \int_{b(x)}^{b(c)} f(x,y)\,dy \right| \leqslant \big(b(x+h) - b(x)\big) M.$$

En déduire que G est dérivable à droite en x, de dérivée à droite $G'_d(x)$ égale à $F'(x)$.

De la même façon, on obtient que la dérivée à gauche $G'_g(x)$ égale $F'(x)$ pour tout $x \in]a, c]$, et l'on obtient les mêmes résultats pour tout domaine de la forme

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant c, \quad Y \leqslant y \leqslant u(x)\}$$

où $u : [a,c] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone et $Y = \min_{x \in [a,c]} u(x)$. Considérons maintenant un domaine D de la forme suivante :



i.e. on se donne $a, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0 < c$ et deux fonctions continues $b, u : [a,c] \to \mathbb{R}$ telles que $b(x) \leqslant u(x)$ pour tout x, que b et u prennent en a et c la même valeur β, que la restriction b_1 de b à $[a, 0]$ (resp. u_2 de u à $[0, c]$) soit strictement décroissante, et que la restriction u_1 de u à $[a, 0]$ (resp. b_2 de b à $[0, c]$) soit strictement croissante. Soient $\alpha = b(0) = \min_{x \in [a,c]} b(x)$ et $\gamma = u(0) = \max_{x \in [a,c]} u(x)$. Noter que b_1 est une bijection de $[a, 0]$ sur $[\alpha, \beta]$; on note b_1^{-1} la bijection inverse, qui est également continue. On définit de même u_1^{-1}, b_2^{-1} et u_2^{-1}. Enfin, on définit les fonctions $\ell, r : [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$ par

$$\ell(y) = \begin{cases} b_1^{-1}(y) & \text{si } y \leqslant \beta \\ u_1^{-1}(y) & \text{si } y \geqslant \beta \end{cases} \qquad r(y) = \begin{cases} b_2^{-1}(y) & \text{si } y \leqslant \beta \\ u_2^{-1}(y) & \text{si } y \geqslant \beta. \end{cases}$$

Alors on a

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant c, \ \ b(x) \leqslant y \leqslant u(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leqslant y \leqslant \gamma, \ \ \ell(y) \leqslant x \leqslant r(y)\}.$$

5. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant ce qui précède, montrer que les intégrales doubles définies en prenant des sections verticales ou horizontales coïncident, c.-à-d. que l'on a :

$$\int_a^c \left(\int_{b(x)}^{u(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_\alpha^\gamma \left(\int_{\ell(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exercice 3. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-x\sin(t)}\,dt$.

1. En citant des résultats du cours, montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$f'(x) = -\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-x\sin(t)} \sin(t)\,dt.$$

2. Montrer de même que f est deux fois dérivable et déterminer f''.
3. En utilisant une intégration par parties dans l'intégrale définissant f', montrer que

$$f'(x) = x\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-x\sin(t)} \cos^2(t)\,dt.$$

4. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xf''(x) + f'(x) - xf(x) = 0$.