Amphi B, feuille d'exercices n° 4 : intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Exercice 1 (Intégrale de Gauss)**.** Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \int_0^1 h(t,x)\,dt.$$

1. Déterminer $g(0)$. Indication : quelle est la dérivée de Arctan ?
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2} g(0)$. En déduire que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.
3. Déterminer la dérivée partielle $\partial h/\partial x$. Est–elle continue ?
4. En utilisant un théorème du cours, déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

   $$(*) \qquad g'(x) = -2f(x)f'(x)$$

   pour une certaine fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 0$, que l'on déterminera. Indication : pour $x \neq 0$ faire le changement de variable $u = xt$. Vérifier que la formule $(*)$ a aussi lieu pour $x = 0$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{4} - f(x)^2$.
6. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 2 (La fonction Γ)**.** Soit $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$\Gamma_0(x) = \int_0^1 h(t,x)\,dt, \qquad \Gamma_0(x) = \int_1^{+\infty} h(t,x)\,dt, \qquad \Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x).$$

1. Justifier que les intégrales ci-dessus convergent, et montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la fonction $\partial h/\partial x$.
3. Soient $a \in \,]0,1]$ et $\delta > 0$. Calculer $\displaystyle\int_a^1 \log(t)t^{\delta-1}\,dt$. (Faire une intégration par parties, en posant $u(t) = \log(t)$ et $v'(t) = t^{\delta-1}$.)
4. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,dt$, resp. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,dt$, convergent uniformément sur $\mathbb{R}$, resp. sur $[\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$.
5. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Indication : considérer $\displaystyle\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$ pour $A > a > 0$ et faire une intégration par parties en posant $u(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = t^{x-1}$, puis faire tendre a vers 0 et A vers $+\infty$.

7. Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
8. En faisant un changement de variable approprié, montrer que $\Gamma(1/2)$ est égal l'intégrale de Gauss, calculée dans l'exercice précédent. En déduire la valeur de $\Gamma\big(n + \dfrac{1}{2}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.