CHAPITRE 1

SÉRIES NORMALEMENT CONVERGENTES ET EXPONENTIELLE COMPLEXE

5. Fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continues ou dérivables

[(1)] Pour l'étude des séries entières $S(x) = \sum_n a_n x^n$, il est intéressant de considérer aussi le cas où la variable x est dans $\mathbb{C}$. Pour cette raison, nous donnons ici la définition de continuité et dérivabilité en un point z_0 d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Notation 5.1. — Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\overline{D}(z_0, r)$, resp. $D(z_0, r)$, le disque fermé, resp. ouvert, de centre z_0 et de rayon r, i.e.

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}, \qquad D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Lorsque $z_0 = 0$, on les notera simplement $\overline{D}(r)$ et $D(r)$.

***Définition 5.2* (Continuité d'une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)**. — Soit f une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition.

(1) On dit que f est **continue** en un point $z_0 \in \mathscr{D}_f$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pour tout $z \in \mathscr{D}_f$ tel que $|z - z_0| < \delta$. Ceci équivaut à dire que pour tout disque ouvert $D(f(z_0), \varepsilon)$ centré en $f(z_0)$, il existe un disque ouvert $D(z_0, \delta)$ centré en z_0 tel que $f\big(D(z_0, \delta) \cap \mathscr{D}_f\big) \subset D(f(z_0), \varepsilon)$.

(2) On dit que f est *continue sur* $\mathscr{D}_f$ si elle est continue en tout point de $\mathscr{D}_f$.

Remarque 5.3. — Comme dit en 2M260 et dans la remarque 4.9, la continuité de f en un point z_0 est une propriété **locale**, c.-à-d. pour que f soit continue en z_0 il faut et il suffit qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction $f : \mathscr{D}_f \cap D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ soit continue en z_0. On utilisera ceci plus loin, pour montrer la continuité de la fonction exponentielle en tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exemples 5.4. — 1) La fonction $z \mapsto \overline{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$, de même que toute application polynomiale $z \mapsto P(z)$. Si l'on écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, les applications $z \mapsto x$ et $z \mapsto y$ sont continues, ainsi que toute application de la forme $z \mapsto P(x, y) + iQ(x, y)$, où P et Q sont deux polynômes.

2) La fonction qui envoie $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) sur $\sqrt{x + y}$ a pour domaine de définition $\mathscr{D}_f$ le demi-plan de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ d'équation $x + y \geq 0$. Elle est continue sur $\mathscr{D}_f$.

[(1)] Amphi B, v. du 5/5/17 : coquille corrigée dans 7.3.

Remarque 5.5. — Dans le cas d'une variable réelle x, on définit la dérivée d'une application f en un point x_0 d'un intervalle **ouvert** I comme la limite :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si elle existe. Noter que comme I est un intervalle ouvert, il contient un intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$ avec $r > 0$, et donc x peut prendre toute valeur suffisamment proche de x_0 et $\neq x_0$. Si $I = [a, b]$, la structure d'ordre de $\mathbb{R}$ permet de définir la dérivée de f à droite en a (resp. à gauche en b) comme la limite

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

si elle existe : dans ce cas, x peut prendre toute valeur suffisamment proche de a et $> a$ (resp. toute valeur suffisamment proche de b et $< b$). Dans le cas d'une variable complexe, si l'on veut considérer la dérivabilité en un point z_0 comme la limite du taux d'accroissement

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

il faut que le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f contienne tous les z suffisamment proches de z et $\neq z_0$, i.e. il faut que $\mathscr{D}_f$ contienne un certain disque ouvert $D(z_0, r)$ centré en z_0. Ceci conduit aux définitions suivantes.

***Définition 5.6* (Ouverts de $\mathbb{C}$)**. — On dit qu'une partie U de $\mathbb{C}$ est un **ouvert** si pour tout $z_0 \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $D(z_0, r) \subset U$. Noter que $\mathbb{C}$ est ouvert et que $\varnothing$ l'est aussi.

Exercice 5.7. — Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le disque ouvert $D(\alpha, R)$ est un ouvert. Indication : soit $z_0 \in D(\alpha, R)$, considérer $r = R - |z_0|$ et utiliser l'inégalité triangulaire.

***Définitions 5.8* (Dérivabilité d'une fonction $U \to \mathbb{C}$)**. — Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application $U \to \mathbb{C}$.

(1) On dit que f est **dérivable** en un point $z_0 \in U$ si le rapport $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite ℓ lorsque z tend z_0, c.-à-d. si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $D(z_0, \delta) \subset U$ et

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \right| < \varepsilon$$

pour tout $z \in D(z_0, \delta) - \{z_0\}$. Dans ce cas, on pose $\ell = f'(z_0)$. Bien entendu, si f est dérivable en z_0 elle est continue en z_0.

(2) On dit que f est *dérivable sur* U si elle l'est en tout point de U.

(3) On dit qu'une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ est une **primitive** de f sur U si elle est dérivable sur U, de dérivée $F' = f$.

Exemples 5.9. — (i) Toute fonction monomiale $f(z) = az^n$, avec $a \neq 0$, est dérivable en tout $z_0 \in \mathbb{C}$, de dérivée $f'(z_0) = naz_0^{n-1}$, et la fonction $F(z) = az^{n+1}/(n+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, toute fonction polynomiale $z \mapsto P(z)$, de degré n, est dérivable sur $\mathbb{C}$ et admet une primitive qui est un polynôme de degré $n + 1$.

(ii) Par contre, l'application $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point z_0. En effet, si l'on écrit $z = z_0 + re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors le rapport

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = e^{-2i\theta}$$

n'admet pas de limite quand $r \to 0$.

Proposition 5.10 **(Convergence uniforme et continuité)**

Soient D une partie de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions continues $D \to \mathbb{C}$. Si elle converge uniformément vers une fonction $g : D \to \mathbb{C}$ alors g est continue.

Démonstration. — Identique à celle de 4.5. □

6. Séries absolument convergentes et produit de Cauchy

Proposition et définition 6.1. — *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries numériques* **absolument** *convergentes, de sommes A et B respectivement. Alors la série de terme général*

$$c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell$$

converge vers AB. En d'autres termes, on a l'égalité :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\right) = \left(\sum_{k\geq 0} a_k\right)\left(\sum_{\ell\geq 0} b_\ell\right).$$

La série $\sum_n c_n$ ci-dessus s'appelle le produit de Cauchy *des séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = |a_n|$, $s_n = |b_n|$ et $t_n = \sum_{k+\ell=n} r_k s_\ell$. Notons $R_n = r_0 + \cdots r_n$, $S_n = s_0 + \cdots + s_n$ et

$$T_n = t_0 + \cdots + t_n = \sum_{d=0}^{n} \sum_{k+\ell=d} r_k s_\ell = \sum_{k+\ell\leq n} r_k s_\ell.$$

Les suites R_n et S_n sont croissantes et, par hypothèse, convergent en croissant vers leurs limites R et S. Remarquons que

$$R_n S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} r_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} s_\ell\right) = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} r_k s_\ell$$

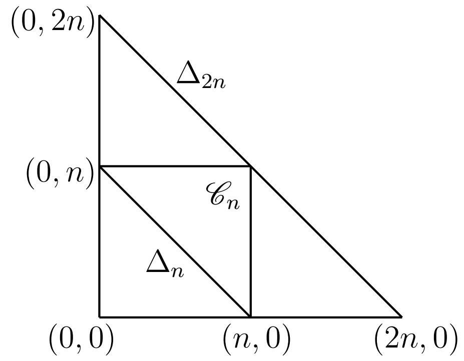
est la somme des termes $r_k s_\ell$ pour tous les couples d'entiers (k,ℓ) appartenant au carré $\mathscr{C}_n = [0,n]\times[0,n]$ de $\mathbb{R}^2$. D'autre part, chaque c_d est la somme de ces mêmes termes pour (k,ℓ) appartenant à la diagonale d'équation $k+\ell = d$, et donc T_n est la somme de ces termes pour (k,l) appartenant au triangle Δ_n délimité par les droites d'équation $\ell = 0$, $k = 0$ et $k+\ell = n$. Comme tous ces termes sont positifs et comme

$$\Delta_n \subset \mathscr{C}_n \subset \Delta_{2n}$$

(cf. la figure plus bas) on a donc

$$(*) \qquad T_n \leq R_n S_n \leq T_{2n}.$$

En particulier, on a $T_n \leq R_n S_n \leq RS$: la suite croissante (T_n) est donc majorée par RS donc converge vers une limite $T \leq RS$. Mais alors, passant à la limite dans les inégalités $(*)$ on a $T \leq RS \leq T$ et donc $T = RS$.



Ceci prouve déjà la proposition dans le cas où les a_n et b_n sont des réels positifs. Le cas général s'y ramène car, notant A_n, B_n et C_n les sommes partielles des séries de termes généraux a_k, b_k et c_k, on a :

$$|A_n B_n - C_n| = \left| \sum_{\substack{0 \leq k,\ell \leq n \\ k+\ell < n}} a_k b_\ell \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq k,\ell \leq n \\ k+\ell < n}} r_k s_\ell = R_n S_n - T_n$$

et l'on a vu plus haut que la suite $R_n S_n - T_n$ tend vers 0. Comme les suites (A_n) et (B_n) convergent vers A et B, il en résulte que la suite (C_n) converge vers AB. □

7. Séries normalement convergentes ; cas de l'exponentielle

Désormais, on utilise la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***Théorème et définition 7.1* (Convergence normale).** — *Soient D une partie de $\mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions $D \to \mathbb{C}$. On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge* **normalement** *sur D s'il existe une suite de réels positifs M_n telle que :*

(a) *$|f_n(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in D$ et tout n.*
(b) *La série $\sum_n M_n$ converge.*

Dans ce cas, on a :

(1) *Pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente.*
(2) *La série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers une fonction f, qui est continue si les f_n le sont.*

Démonstration. — (i) est immédiat. De plus, les hypothèses entraînent que la suite de fonctions $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc converge uniformément vers une limite f (cf. lemme 4.4). Si les f_n sont continues alors f l'est aussi, d'après la proposition 5.10. □

Théorème 7.2. — (1) *Pour tout* $R \in \mathbb{R}_+^*$, *la série* $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ *converge normalement sur le disque fermé* $\overline{D}(0,R)$.

(2) *Par conséquent, sa somme, notée* $\exp(z)$, *est une fonction continue sur* $\mathbb{C}$ *et la série* $\exp(z)$ *est absolument convergente, pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

(3) *On a* $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ *pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Par conséquent, l'application* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ *est un morphisme de groupes.*

(4) *La fonction* $z \mapsto \exp(z)$ *est dérivable sur* $\mathbb{C}$, *de dérivée* $\exp(z)$.

(5) *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. *Par conséquent, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a* $|\exp(it)| = 1$.

Démonstration. — (1) Posons $M_n = R^n/n!$; pour tout $z \in \overline{D}(0,R)$ on a $|z^n/n!| \leq M_n$ donc il suffit de montrer que la série $\sum_n M_n$ converge. Fixons $k \in [0,1[$, par exemple $k = 1/2$. Il suffit de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n = \frac{1}{2}\frac{R^n}{n!}$$

pour tout $n \geq N$. Or cette inégalité équivaut , après simplifications, à $2R < n+1$. Elle est donc satisfaite pour tout $n \geq N = 2R - 1$. Ceci prouve (1).

Prouvons (2). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|z_0| < R$. Alors $\overline{D}(0,R)$ contient le disque ouvert $D(z_0, r)$, où $r = R - |z_0|$, et donc la continuité de $\exp(z)$ sur $\overline{D}(0,R)$ entraine sa continuité en z_0 (cf. remarque 5.3).

Prouvons (3). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la formule du binôme donne :

$$\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} = \sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q=n}} \frac{z_1^p}{p!}\frac{z_2^q}{q!}$$

donc on voit que la série $\exp(z_1+z_2)$ est le produit de Cauchy des séries $\exp(z_1)$ et $\exp(z_2)$. La première assertion en découle, d'après la proposition 6.1. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'égalité $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ entraîne que $\exp(z)$ est non nul, d'inverse $\exp(-z)$. Combiné avec l'égalité $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, ceci prouve la seconde assertion.

Pour prouver (4), montrons d'abord que la fonction $z \mapsto \exp(z)$ est dérivable en $z_0 = 0$. Fixons un réel $R > 0$. Pour tout $z \in \overline{D}(0,R) - \{0\}$, on a

$$(*) \qquad \frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k-1}}{k!}.$$

Posant $v_k = z^{k-1}/k!$, le même calcul que précédemment montre que $|v_{k+1}/v_k| < 1/2$ pour tout $k \geq 2R - 1$, donc la série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{z^{k-1}}{k!}$$

converge normalement sur $\overline{D}(0, R)$ vers une fonction continue $S(z)$. En particulier, S est continue en 0 donc

$$(\dagger) \qquad \lim_{z\to 0} S(z) = S(0) = 1.$$

D'autre part, d'après $(*)$, pour tout $z \in \overline{D}(0, R) - \{0\}$, on a

$$(\ddagger) \qquad \frac{\exp(z) - 1}{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k-1}}{k!} = S(z).$$

En combinant $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ on obtient :

$$(\star) \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = S(0) = 1,$$

ce qui prouve que exp est dérivable en 0, de dérivée $1 = \exp(0)$. Enfin, pour tous $z, h \in \mathbb{C}$ avec $h \neq 0$ on a, d'après (3) :

$$\frac{\exp(z + h) - \exp(z)}{h} = \exp(z)\frac{\exp(h) - 1}{h}$$

et donc, d'après $(\star)$ on obtient que exp est dérivable en z, de dérivée $\exp(z) \cdot 1 = \exp(z)$.

Prouvons (5). Comme l'application $z \mapsto \overline{z}$ est continue alors $\overline{\exp(z)}$ est la limite de la suite

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$$

donc égale $\exp(\overline{z})$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le conjugué de $u = \exp(it)$ est $\exp(-it) = u^{-1}$, d'où $u\overline{u} = 1$ et donc $|u| = 1$. □

***Proposition et définition 7.3* (Sinus, cosinus et π).** — (a) *Pour tout réel t on note* $\cos(t)$ (*resp.* $\sin(t)$) *la partie réelle* (*resp. imaginaire*) *de* $\exp(it)$. *Comme $i^{2n} = (-1)^n$, on a donc*

$$\cos(t) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin(t) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\cos'(t) = -\sin(t)$ *et* $\sin'(t) = \cos(t)$.

(b) *Soit t_0 le plus petit réel > 0 tel que $\cos(t_0) = 0$ (un tel t_0 existe) ; on pose $\pi = 2t_0$. Alors* cos *et* sin *sont périodiques, de période 2π.*

(c) *L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \exp(it)$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur*

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

et c'est un morphisme de groupes, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. *Par conséquent, tout* $z \in \mathbb{C}^\times$ *s'écrit de façon unique* $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

(d) *Pour tout* $z = a + ib$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a* $\exp(z) = e^a e^{ib}$ *et l'application* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \exp(z)$ *est un morphisme de groupes surjectif, de noyau* $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Prouvons le point (a). Il résulte du théorème précédent que l'application $g : z \mapsto \exp(iz)$ est dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée $g'(z) = i\exp(iz)$. En effet, pour tous $z, h \in \mathbb{C}$ avec $h \neq 0$, le taux d'accroissement

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = i\frac{\exp(iz + ih) - \exp(iz)}{ih}$$

tend vers $i\exp(iz) = ig(z)$ lorsque h tend vers 0. Se limitant au cas d'une variable réelle $t \in \mathbb{R}$, on obtient que l'application

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$$

(où $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont **définis** par l'égalité précédente) est dérivable, donc ses parties réelle et imaginaire le sont aussi, et l'on a l'égalité :

$$\cos'(t) + i\sin'(t) = g'(t) = i\exp(it) = -\sin(t) + i\cos(t).$$

Il en résulte que $\cos'(t) = -\sin(t)$ et $\sin'(t) = \cos(t)$, d'où (a). Pour la démonstration des autres points de la proposition, on renvoie à [**Rudin**], pages 1-3 ou [**Lerner**], pages 7-12, ou à la feuille de TD n°1. □

8. Autres exemples, fonction ζ

Terminons ce chapitre avec d'autres exemples de convergence normale.

Exemple 8.1. — Soit $0 \leq r < 1$. On considère la série de fonctions d'une variable réelle $S(x) = \sum_{n \geq 0} \sin(nx) r^n$. Comme $|\sin(nx)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(nx) r^n| \leq r^n$ donc la convergence est normale sur $\mathbb{R}$. En particulier, S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 8.2 **(Fonction ζ)**. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\log(n)$ est bien défini et, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$n^{-z} = \frac{1}{n^z} = \exp(-z\log(n)) = \exp(-x\log(n))\exp(-iy\log(n)) = \frac{e^{-iy\log(n)}}{n^x}.$$

On a donc $|n^{-z}| = n^{-x}$. Fixons un réel $a > 1$; pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geq a$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < n^{-x} \leq n^{-a}$. D'autre part, comme la fonction $t \mapsto t^{-a}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^a} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^a} = 1 + \frac{1 - N^{1-a}}{a-1} \leq 1 + \frac{1}{a-1}.$$

Ceci montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^z}$ converge normalement sur le demi-plan défini par $\mathrm{Re}(z) \geq a$. Elle définit donc une fonction notée $\zeta(z)$ et appelée la fonction zêta de Riemann, qui est continue sur le demi-plan ouvert défini par $\mathrm{Re}(z) > 1$.

En particulier, si l'on se restreint au cas d'une variable réelle, la fonction $x \mapsto \zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Références citées dans ce chapitre :

[Lerner] Nicolas Lerner, Fonctions classiques, Cours de M1 à l'UPMC (2016-17), disponible sur la page de l'auteur.

[Rudin] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1980.