CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES

9. Continuité, dérivation et primitivation sur le disque de convergence

[(1)] Provisoirement, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 9.1. — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. La **série entière** (centrée en 0) ayant les a_n pour coefficients est la série de fonctions $S(z)$ définie par

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que le membre de droite converge. Remarquons que même si les a_n sont réels, on peut considérer la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Ceci explique notre choix de désigner la variable par z, même si les a_n sont réels. Il est donc naturel d'étudier les séries entières d'une variable complexe et dans la suite on se place sur $\mathbb{C}$.

Remarque 9.2. — Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la série entière *centrée en* z_0 ayant les a_n pour coefficients est la série de fonctions $T(z)$ définie par $T(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que le membre de droite converge. En posant $z = z_0 + h$ et $S(h) = T(z_0 + h) = \sum_{n\geq 0} a_n h^n$ on est ramené au cas où $z_0 = 0$.

Les séries entières centrées en 0 sont donc les séries de fonctions où $f_n(z) = a_n z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va voir qu'elles jouissent de propriétés très particulières. On rappelle (cf. 5.1) que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\overline{D}(z_0, r)$, resp. $D(z_0, r)$, le disque fermé, resp. ouvert, de centre z_0 et de rayon r, i.e.

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}, \qquad D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Lorsque $z_0 = 0$, on les notera simplement $\overline{D}(r)$ et $D(r)$.

Théorème et définition 9.3 **(Rayon de convergence)**. — *On suppose que la série entière* $S(z) = \sum a_n z^n$ *converge pour un certain* $c \neq 0$.

[(1)] Amphi B, v. du 15/2/17 : précisions ajoutées concernant les règles d'Abel et de Dirichlet uniformes (10.1 et 10.5), remarque 10.4 ajoutée en réponse à une question de Massil Hihat, théorème 11.4 augmenté. **Le 10/2 :** autre démo de 11.4 ajoutée. **Le 15/2 :** corrections de deux coquilles à la fin de 9.14, signalées par Amine Rezgui.

(1) *Alors, pour tout $r < |c|$, elle converge* **normalement** *dans le disque fermé $\overline{D}(r)$.*

(2) *On pose $\rho(S) = \sup\{|z| \mid S(z)$ converge$\}$*[2] *et on l'appelle le* **rayon de convergence** *de S.*

(3) *Pour tout $r < \rho(S)$, la série $S(z)$ converge* **normalement** *dans le disque fermé $\overline{D}(r)$.*

(4) *Pour tout z tel que $|z| > \rho(S)$, la série $S(z)$ diverge.*

(5) *On ne peut rien dire en général si $|z| = \rho(S)$.*

Démonstration. — Comme $\sum a_n c^n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n c^n| = 0$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n c^n| \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < |c|$, posons $\delta = \dfrac{r}{|c|}$. Alors $0 < \delta < 1$ et, pour tout $z \in \overline{D}(r)$ et $n \geq N$, on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n = |a_n c^n|\, \delta^n \leq \delta^n.$$

Comme la série géométrique $\sum_{n\geq N} \delta^n$ converge, on obtient que la série $S(z)$ converge normalement sur $\overline{D}(r)$. Ceci prouve 1.

Prouvons 3. Notons $\mathscr{C}(S)$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $S(z)$ converge. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < \rho(S)$. Par définition du sup, il existe $z_0 \in \mathscr{C}(S)$ tel que $|z_0| > r$. Alors, d'après le point 1, la série $S(z)$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}(r)$.

Prouvons 4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \rho(S)$. Si $S(z)$ convergeait alors, d'après le point 1, la série $S(r)$ serait convergente pour tout réel r tel que $\rho(S) < r < |z|$, ce qui contredirait la définition de $\rho(S)$.

Enfin, on verra plus bas que si $\rho(S) < +\infty$, alors en un point z du bord du disque de convergence, i.e. en un point z du cercle de centre 0 et de rayon $\rho(S)$, la série $S(z)$ peut, selon les cas, diverger ou converger. ☐

Terminologie 9.4 **(Disque de convergence)**. — On dira qu'une série entière S est *convergente* si son rayon de convergence $\rho = \rho(S)$ est > 0. Dans ce cas, $D(\rho)$ est appelé le *disque de convergence* de S. (C'est un vrai disque si $\rho < +\infty$ et sinon c'est $\mathbb{C}$ tout entier.)

Remarque 9.5. — Une conséquence immédiate du théorème 9.3 est la suivante : Si $R \in \mathbb{R}_+$ est tel que, pour tout réel positif r, la série à termes positifs $\sum |a_n|\, r^n$ converge pour $r < R$ mais diverge pour $r > R$, alors R est le rayon de convergence de S.

Exemple 9.6. — La série entière $\sum_n n!\, z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$. En effet, soit $z \neq 0$. Pour tout n tel que $n + 1 \geq |1/z|$ on a $|(n+1)!\, z^{n+1}| \geq |n!\, z^n|$, donc le terme général ne tend pas vers 0.

Exemple 9.7. — On a vu en 7.2 que la série entière $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

Exemple 9.8 **(Séries entières « géométriques »)**. — Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ et soit $S_q(z)$ la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{q^n}$. Posant $u = z/q$, chaque somme partielle $\sum_{k=0}^n u^k$ vaut $\dfrac{1 - u^{n+1}}{1 - u}$.

[2] C'est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Posant $R = |q|$, on en déduit que pour tout $z \in D(R)$ la série $S_q(z)$ est convergente, de somme

$$\frac{1}{1-u} = \frac{q}{q-z}.$$

De plus, pour tout $r < R$ la convergence est normale sur le disque fermé $\overline{D}(r)$, car pour tout $z \in \overline{D}(r)$ on a $|z/q| \leq r/R < 1$. Par contre, pour tout z tel que $|z| \geq R$, le terme général z^n/q^n est de valeur absolue ≥ 1 donc la série diverge. Ceci montre que le rayon de convergence de S_q est $R = |q|$ et, dans ce cas, $S_q(z)$ diverge en tout point du cercle de centre 0 et de rayon R.

Avant de donner un résultat de Cauchy (redécouvert par Hadamard) donnant une expression pour le rayon de convergence, démontrons le théorème fondamental suivant.

Théorème 9.9. — *Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors la fonction $S(z)$ jouit des propriétés suivantes :*

(1) *Elle est continue sur le disque $D(\rho)$.*

(2) *Elle est dérivable sur le disque $D(\rho)$, de dérivée la série $S'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, qui converge normalement sur tout disque $\overline{D}(r)$ avec $r < \rho$. De plus, $\rho(S') = \rho$.*

(3) *La série entière $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence ρ et vérifie $F(0) = 0$ et $F'(z) = S(z)$. C'est l'unique primitive de $S(z)$ sur $D(\rho)$ telle que $F(0) = 0$.*

Autrement dit, si S est une série entière convergente il est possible de la dériver (et d'en prendre une primitive) **terme à terme**.

Démonstration. — Soit $z_0 \in D(\rho)$ et soit r un réel tel que $|z_0| < r < \rho$. Comme la convergence de $S(z)$ est normale, donc uniforme, sur le disque $\overline{D}(r)$, la continuité en z_0 en découle.

Pour prouver le point 2, notons provisoirement $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ et montrons d'abord que $\rho(T) = \rho$. Soit r un réel positif tel que $r < \rho$. On choisit un réel $\theta > 1$ tel que $\theta r < \rho$, alors la série

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|\, \theta^n\, r^n$$

converge. Mais comme $\theta > 1$ on a $\theta^n \geq n$ pour n assez grand (car $n\log(\theta) > \log(n)$ pour n assez grand) ; on en déduit que $\sum_{n\geq 0} |a_n|\, n\, r^n$ converge et donc $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n\, r^{n-1}$ converge aussi. D'après la remarque 9.5, ceci entraîne que $\rho(T) \geq \rho$.

Supposons maintenant $r > \rho$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$ diverge, donc $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, n\, r^n$ diverge aussi, ainsi que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n\, r^{n-1}$. D'après la remarque 9.5, à nouveau, ceci montre que $\rho(T) \leq \rho$, d'où $\rho(T) = \rho$. Le même argument, appliqué à la série entière F du point 3, montre que $\rho(F) = \rho(S) = \rho$.

Montrons maintenant que l'application $S : D(\rho) \to \mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée $S'(z) = T(z)$. Soient $z_0 \in D(\rho)$ et R un réel positif tel que $|z_0| < R < \rho$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $T(R) = \sum_{n\geq 1} |a_n|\, n\, R^{n-1}$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(1) \qquad \sum_{n\geq N} |a_n|\, n\, R^{n-1} < \varepsilon/2.$$

Pour tout $n \geq 1$ et $z \in D(R) - \{z_0\}$, on a

$$(2) \qquad \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} - (n-1)z_0^{n-1}.$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1}\right| \leq 2(n-1)R^{n-1} \leq 2nR^{n-1}$$

et donc, d'après (1), on a :

$$(3) \qquad \left|\sum_{n\geq N}\left(\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1}\right)\right| < \varepsilon.$$

Ceci, combiné avec (2), entraîne que pour tout $z \in D(R) - \{z_0\}$ on a :

$$(4) \qquad \left|\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - T(z_0)\right| \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{N-1} \left|z^{n-1} + \cdots + zz_0^{n-2} - (n-1)z_0^{n-1}\right|.$$

Notons que $D(z_0, \delta) \subset D(R)$ pour tout $\delta > 0$ assez petit, i.e. pour $\delta \leq \delta_0 = R - |z_0|$. Comme le terme de droite de (4) est un polynôme $P(z)$ qui s'annule pour $z = z_0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \delta_0$ et $|P(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in D(z_0, \delta)$. Alors pour tout $z \in D(z_0, \delta) - \{z_0\}$ on a

$$\left|\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - T(z_0)\right| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que la fonction S est dérivable en z_0, de dérivée $S'(z_0) = T(z_0)$. Ceci achève la preuve du point 2, et aussi du point 3, à l'exception de *l'unicité* de F. □

Prouvons l'unicité de F, grâce à la définition et proposition suivante.(3)

Définition et proposition 9.10. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.*

(1) *On dit que U est* **étoilé** *(par rapport à un point $z_0 \in U$) si pour tout $z \in U$ le segment*

$$[z_0, z] = \{z_0 + t(z - z_0) \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans U. Ceci est le cas, en particulier, si U est un disque ouvert de centre z_0 ou si $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ et $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ (par exemple $z_0 = 1$).

(2) *Si U est étoilé et si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors f est constante sur U.*

(3) Ceci est un peu hors du programme de 2M216, mais c'est un cas particulier de résultats de 2M216 (il suffit en fait que l'ouvert U soit connexe).

Démonstration. — Fixons $z \in U$ et considérons les fonctions $u : [0,1] \to U$, $t \mapsto z_0 + t(z - z_0)$ et $g = f \circ u$. Alors g est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée :

$$g'(t) = f'(u(t))u'(t) = (z - z_0)f'(u(t))$$

et ceci est nul puisque f' est nulle sur U. Donc g est constante, d'où $f(z) = g(1) = g(0) = f(z_0)$. Ceci montre que f est constante sur U. □

Évidemment, l'unicité de F dans le théorème en découle, car si G est une autre primitive de $S(z)$ sur $D(\rho)$ telle que $G(0) = 0$ alors $f = F - G$ vérifie $f' = 0$ donc est constante sur $D(\rho)$, et comme $f(0) = 0$ on a $f = 0$ d'où $G = F$.

***Corollaire 9.11* (du théorème 9.9).** — *Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$.*

(1) *Pour tout entier $k \geq 1$, la fonction $S : D(\rho) \to \mathbb{C}$ est k fois dérivable, de dérivée*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

et cette série a un rayon de convergence égal à ρ. (*En particulier, si l'on se limite au cas où la variable $z = x$ est réelle, on peut dire que la fonction $S :]-\rho, +\rho[\to \mathbb{C}$ est de classe C^∞*).

(2) *Par conséquent, pour tout n, le n-ième coefficient a_n vaut $\dfrac{f^{(n)(0)}}{n!}$. En particulier, les coefficients sont déterminés par la fonction $z \mapsto S(z)$.*

Remarques 9.12. — (1) Le corollaire précédent montre que **si** $S(z) = \sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence $\rho > 0$, **alors** les a_n sont les coefficients de la série de Taylor de S en 0 et donc S coïncide sur $D(\rho)$ avec la somme de sa série de Taylor en 0.

(2) **Attention** pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il n'est en général **pas vrai** que f coïncide avec sa série de Taylor en 0, même si celle-ci converge sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, on peut montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et que la fonction ainsi prolongée est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent la série de Taylor en 0 est la fonction nulle, c.-à-d. il n'y a « aucun rapport » entre la série de Taylor de f en 0 et les valeurs de f en un point $x \neq 0$.

(3) Par contre, une spécificité des fonctions d'une variable complexe est que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dérivable sur un disque ouvert $D(R)$ alors elle coïncide sur $D(R)$ avec sa série de Taylor en 0. Ceci dépasse le cadre de ce cours ; le lecteur intéressé pourra consulter [**Cartan**]. Signalons simplement que le contre-exemple précédent « n'existe pas » dans $\mathbb{C}$ car la fonction $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(-1/z^2)$ ne se prolonge pas par continuité en 0 puisque, par exemple,

$$\lim_{t \to 0} g(it) = \lim_{t \to 0} \exp(1/t^2) = +\infty.$$

On admet les points 1 et 2 du théorème suivant, qui sont hors du programme du cours (voir [**Cartan**]).

Théorème 9.13. — (1) *Il existe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ une unique fonction dérivable $F : U \to \mathbb{C}$ telle que $F(1) = 0$ et $F'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Cette fonction est notée* Log *et s'appelle la «* **détermination principale du logarithme complexe** *».*

(2) *Pour tous* $z_1, z_2 \in U$ *et toute application* $\gamma : [a,b] \to U$ *de classe* C^1 *telle que* $\gamma(a) = z_1$ *et* $\gamma(b) = z_2$, *on a*

$$\mathrm{Log}(z_2) - \mathrm{Log}(z_1) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

(3) *Par conséquent, si l'on écrit* $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$ *alors* $\mathrm{Log}(z) = \log(\rho) + i\theta$.

(4) *Pour tout* z *tel que* $|z| < 1$, *on a*

$$(\star) \qquad \mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \qquad \mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

Démonstration. — Prouvons (3). Considérons le chemin $\gamma_1(x) = x$, pour x variant entre 1 et ρ. Alors $\gamma_1'(x) = 1$ et, comme $\mathrm{Log}(1) = 0$, on obtient

$$\mathrm{Log}(\rho) = \mathrm{Log}(\rho) - \mathrm{Log}(1) = \int_1^\rho \frac{dt}{t} = \log(\rho),$$

donc Log coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction logarithme usuelle. Considérons ensuite l'arc de cercle joignant ρ à $\rho e^{i\theta}$, i.e. $\gamma_2(t) = \rho e^{it}$ pour t variant entre 0 et θ. On a $\gamma_2'(t) = i\rho e^{it}$ et donc

$$\mathrm{Log}(z) - \mathrm{Log}(\rho) = \int_0^\theta i\, dt = i\theta.$$

On obtient donc que $\mathrm{Log}(\rho e^{i\theta}) = \log(\rho) + i\theta$, pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

Prouvons (4). Sur le disque ouvert $D(1)$ la série entière $S(z) = \sum_{k\geq 0}(-z)^k$ est convergente, de somme $\dfrac{1}{1+z}$. D'après le théorème 9.9, la série

$$F(z) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

est l'unique primitive de S sur $D(1)$ telle que $F(0) = 0$. Or la fonction $G : z \mapsto \mathrm{Log}(1+z)$ vérifie $G(0) = \mathrm{Log}(1) = 0$ et est dérivable sur $D(1)$, de dérivée $G'(z) = \dfrac{1}{1+z}$. La première égalité en résulte, et la seconde en découle en changeant z en $-z$. □

Terminons cette section avec la règle de Cauchy-Hadamard, qui donne une expression du rayon de convergence. Commençons par la définition suivante, déjà vue en 2M260 avec une formulation différente (mais équivalente).

Définition 9.14. — Soit (u_n) une suite réelle. On définit sa **limite supérieure**, notée $\limsup u_n$, comme suit :

(1) Si (u_n) n'est pas bornée supérieurement, i.e. s'il existe une suite extraite qui tend vers $+\infty$, on pose $\limsup u_n = +\infty$.

(2) Si (u_n) est bornée supérieurement, i.e. s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n, alors l'ensemble

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R} \mid\ a_n \leq x, \text{ sauf pour un nombre fini d'indices } n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid\ \text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \leq x \text{ pour tout } n \geq N\} \end{aligned}$$

est non vide (car il contient M) ; on note alors $\limsup u_n$ sa borne inférieure. Dans ce cas, posant $\alpha = \limsup u_n$ on a ce qui suit :

(a) Pour tout réel $c > \alpha$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < c$ pour tout $n \geq N$.
(b) Pour tout réel $c < \alpha$, il existe une infinité d'indices n tels que $u_n > c$.

En effet, supposons $c > \alpha$. Comme α est la borne inférieure de X, il existe $x \in X$ tel que $x < c$ et alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \leq x < c$, d'où (a). Supposons au contraire $c < \alpha$. Alors $c \notin X$ donc il existe une infinité d'indices n tels que $u_n > c$.

Lemme 9.15. — *Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\limsup u_n = \ell$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on a $u_n \in \,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n. Définissant X comme plus haut, ceci prouve que $\ell+\varepsilon \in X$ et $\ell-\varepsilon \notin X$. Comme ε est arbitraire, ceci entraîne que la borne inférieure de X est ℓ. □

Remarque 9.16. — D'après le lemme précédent, si la suite (u_n) converge alors sa limite supérieure n'est autre que sa limite. L'intérêt de la limite supérieure est qu'elle existe pour toute suite bornée supérieurement. Par exemple, la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

ne converge pas, mais sa limite supérieure est 1. Noter que 1 n'est pas un majorant de (u_n), mais pour tout $c > 1$ il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $u_n > c$.

***Théorème 9.17* (Règle de Cauchy-Hadamard)**. — *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Posons $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors le rayon de convergence ρ de la série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ est égal à 0 si $\alpha = +\infty$, à $+\infty$ si $\alpha = 0$, et à $1/\alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. — Comme les $|a_n|$ sont ≥ 0, il est clair que $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Supposons d'abord $\alpha \neq +\infty$. Soient $c > \alpha$ et $\delta \in \,]0,1[$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|a_n| < c^n$ et donc $|a_n z^n| \leq \delta^n$ pour tout $z \in \overline{D}(\delta/c)$. Il en résulte que S converge normalement sur $\overline{D}(\delta/c)$ pour tout $\delta \in \,]0,1[$ et $c > \alpha$, et donc $\rho \geq 1/c$ pour tout $c > \alpha$. Ceci prouve déjà que $\rho = +\infty$ si $\alpha = 0$, et $\rho \geq 1/\alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Supposons maintenant $\alpha \neq 0$ et soit $c \in \,]0, \alpha[$. Alors il existe une infinité d'indices n tels que $|a_n| > c^n$ et donc $|a_n z^n| > 1$ pour tout z tel que $|z| = 1/c$. Par conséquent la série $S(z)$ diverge pour un tel z et l'on a donc $\rho \leq 1/c$ pour tout $c \in \,]0, \alpha[$. Combiné avec ce qui précède, ceci montre que $\rho = 1/\alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\rho = 0$ si $\alpha = +\infty$. □

Corollaire 9.18. — *On conserve les notations précédentes.*

(1) *Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, alors $\rho = 1/\alpha$.*

(2) *Si* $a_n \neq 0$ *pour* n *assez grand et* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha$, *alors* $\rho = 1/\alpha$.

Démonstration. — Le point 1 découle du lemme 9.15. Et il a été vu en 2M260 que sous l'hypothèse de (2) on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$. □

10. Convergence en un point du bord : théorème d'Abel

Commençons par énoncer une version du critère d'Abel (3.4) pour les séries de fonctions :

***Théorème 10.1* (Règle d'Abel uniforme).** — *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *et soient* (u_n) *et* (f_n) *des suites de fonctions de* D *dans* $\mathbb{C}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(1) *Pour chaque* $x \in D$, *la suite* $(f_n(x))$ *est réelle, positive et décroissante.*
(2) *Il existe un réel* $K > 0$ *tel que* $K \geq f_0(x)$ *pour tout* $x \in D$.
(3) *La série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge* uniformément *sur* D.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n f_n$ *converge uniformément sur* D.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in D$ et $p \geq n \geq N$ on ait

$$(*) \qquad |u_n(x) + \cdots + u_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{K}.$$

Fixons $x \in D$; en appliquant l'inégalité d'Abel aux suites $(u_k(x))$ et $(f_k(x))$, on obtient en tenant compte de $(*)$ l'inégalité suivante :

$$(**) \qquad |u_n(x)f_n(x) + \cdots + u_p(x)f_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{K} f_n(x) \leq \varepsilon,$$

où la dernière inégalité découle de $f_n(x) \leq f_0(x) \leq K$. Comme $(**)$ est vérifié pour tout $p \geq n \geq N$, ceci montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_n f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Elle converge donc uniformément, d'après le lemme 4.4. □

En fait, la démonstration du théorème « général » ci-dessus est modelée sur la démonstration donnée par Abel en 1826 du théorème suivant :

***Théorème 10.2* (Abel (1826)).** — *Soit* (a_n) *une suite complexe. On suppose que la série* $\sum a_n c^n$ *converge pour un certain réel* $c > 0$. *Alors la série de fonctions* $S(x) = \sum a_n x^n$ *converge uniformément sur* $[0, c]$. *Par conséquent, la fonction* $S : [0, c] \to \mathbb{C}$ *est continue.*

Démonstration. — Prenons $D = [0, c]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons, d'une part, la fonction constante $u_n = a_n c^n$ et, d'autre part, la fonction $f_n : x \mapsto (x/c)^n$. Pour chaque $x \in D$, la suite $(f_n(x))$ est réelle, positive et décroissante. D'autre part, la fonction f_0 est majorée par la constante $K = 1$ (qui est la valeur de f_0 en c). Enfin, par hypothèse la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge donc, considérée comme une série de fonctions *constantes*, elle converge uniformément. Le résultat découle donc du théorème précédent. □

Remarques 10.3. — Soit ρ le rayon de convergence de la série entière $S(z) = \sum a_n z^n$. D'après le théorème 9.9, S est continue sur le disque ouvert $D(\rho)$. Le théorème d'Abel permet de dire que si la série $\sum a_n \rho^n$ converge alors la fonction $t \mapsto S(t)$, pour une variable **réelle** $t \in [0, \rho]$, est continue, et donc :

$$\sum a_n \rho^n = \lim_{t \to \rho^-} S(t).$$

Par exemple, la série $S(z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1 et coïncide sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ avec la fonction $x \mapsto \log(1+x)$. Comme la série alternée $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, il résulte du théorème d'Abel que sa somme est égale à $\log(2)$.

Bien entendu, ce qui précède s'étend à un point quelconque $z_0 = \rho e^{i\theta}$ situé sur le bord du disque de convergence : si la série $\sum a_n z_0^n$ converge alors en faisant le changement de variable $T(z) = S(zz_0)$ on en ramené au cas précédent, avec de plus $\rho = 1$, et l'on obtient que

$$\sum a_n z_0^n = \lim_{t \to 1^-} S(tz_0)$$

i.e. le terme de gauche est la limite lorsque $z = tz_0$ tend vers z_0 en restant sur le segment $[0, z_0]$.

Remarque 10.4. — [4] Le théorème d'Abel admet la « réciproque » suivante. Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge *uniformément* sur l'intervalle $I = [0, \rho[$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in I$ et $n \geq N$ on ait $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2$ et donc

$$\forall p \geq n \geq N, \qquad |S_p(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Fixons $p > n \geq N$. Comme la fonction polynôme $\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k$ est continue, alors en faisant tendre x vers ρ on obtient

$$(*) \qquad |S_p(\rho) - S_n(\rho)| \leq \varepsilon.$$

Comme $(*)$ est vraie pour tout $p \geq n \geq N$, ceci montre que la suite $(S_n(\rho))$ est de Cauchy, donc convergente. (Et donc, d'après le théorème d'Abel, la série $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, \rho]$.)

Par conséquent, si la série $\sum_{n \geq 0} a_n \rho^n$ diverge, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ne peut pas converger uniformément sur $[0, \rho[$.

Avant d'étudier l'exemple de la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n}$, énonçons une version du critère de Dirichlet (3.5) pour les séries de fonctions :

[4] Cette remarque répond à une question de Massil Hihat. Merci à lui !

Théorème 10.5 **(Règle de Dirichlet uniforme)**. — *Soit $D \subset \mathbb{C}$ et soient (u_n) une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que :*

(1) *La suite (f_n) est décroissante, i.e. $f_0 \geq f_1 \geq \cdots$, et tend* uniformément *vers* 0.

(2) *Les sommes partielles $U_n(x) = u_0(x) + \cdots + u_n(x)$ sont majorées en valeur absolue par un réel $K > 0$.*

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n f_n$ converge uniformément sur D.

Démonstration. — On a $|U_{n+p}(x) - U_n(x)| \leq 2K$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, d'après l'hypothèse et l'inégalité triangulaire. L'inégalité d'Abel (3.3) donne alors

$$(*) \qquad |u_n(x)f_n(x) + \cdots + u_{n+p}(x)f_{n+p}(x)| \leq 2Kf_n(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme la suite (f_k) converge uniformément vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x)| < \varepsilon/2K$ pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in D$. L'inégalité $(*)$ donne alors, pour tous $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in D$:

$$|u_n(x)f_n(x) + \cdots + u_{n+p}(x)f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Ceci montre que le critère de Cauchy uniforme est satisfait, d'où le résultat d'après le lemme 4.4. □

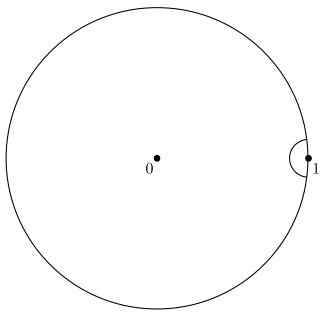
Exemple 10.6. — On considère la série entière $L(z) = -\mathrm{Log}(1-z) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$, qui est de rayon de convergence 1 comme sa série dérivée

$$L'(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Étudions la convergence en un point z du bord. Pour $z = 1$ on obtient la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ qui diverge. Fixons un réel $r \in]0,1[$ et posons

$$K_r = \overline{D}(1) - D(1,r) = \{z \in \overline{D}(1) \mid |z-1| \geq r\}$$

cf. la figure ci-dessous :



Pour tout $z \in K_r$ et $n, p \in \mathbb{N}$, on a

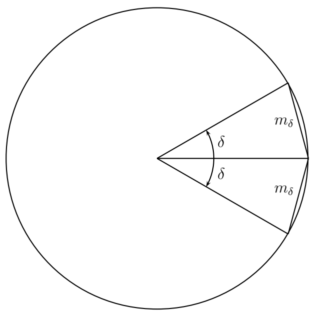
$$|z^n + \cdots + z^{n+p}| = \left| z^n \frac{1 - z^{p+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|} \leq \frac{2}{r}$$

donc ces sommes partielles sont uniformément bornées par $\dfrac{2}{r}$ pour tout $z \in K_r$. Comme la suite réelle $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, l'inégalité d'Abel (théorème 3.3) donne :

$$\left|\frac{z^n}{n} + \cdots + \frac{z^{n+p}}{n+p}\right| \leq \frac{2}{r}\frac{1}{n}$$

et ceci montre que la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur K_r, donc sa somme est une fonction continue sur K_r.

D'autre part, fixons un réel $\delta \in \,]0, \pi[$; d'après la figure ci-dessous :



on voit que pour tout réel $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ on a $|e^{ix} - 1| \geq m_\delta = 2\sin(\delta/2)$. Ceci se vérifie algébriquement comme suit : on a

$$(*) \qquad 1 - e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2}) = -2i\sin(x/2)e^{ix/2} = 2\sin(x/2)e^{i(x-\pi)/2}$$

donc $|1 - e^{ix}| = 2\,|\sin(x/2)| \geq 2\sin(\delta/2)$, la dernière inégalité résultant de ce que la fonction sin est impaire, et croissante sur $[0, \pi/2]$.

En particulier, si l'on considère la série de fonctions d'une variable réelle $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ définie par $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{imx}}{n}$, on obtient que cette série converge uniformément sur l'intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Revenant au cas d'une variable complexe, comme les fonctions $L(z) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$ et $-\mathrm{Log}(1 - z)$ coïncident sur $D(1)$ et sont continues sur K_r pour tout $r > 0$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 10.7. — *Pour tout $\theta \in \,]0, 2\pi[$ on a :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\mathrm{Log}(1 - e^{i\theta}) = -\log\big(2\sin(\theta/2)\big) + i\,\frac{\pi - \theta}{2}.$$

En particulier, pour $\theta = \pi/2$ on obtient les égalités $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$ *et*

$$(\spadesuit) \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Démonstration. — La première assertion découle de $(*)$ et du théorème 9.13. Pour $\theta = \pi/2$, on obtient l'égalité

$$\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n} + i\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = -\log(\sqrt{2}) + i\,\frac{\pi}{4}.$$

La comparaison des parties réelles redonne l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$ (déjà obtenue en 10.3 pour $\theta = \pi$), et celle des parties imaginaires donne l'autre égalité. □

11. Séries de Dirichlet et théorème d'Abel

Définition 11.1. — On rappelle (cf. 8.2) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $n^z = \exp(z\log(n))$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes ; la **série de Dirichlet** associée à (a_n) est la série de fonctions définie par :

$$L(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^z}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que le membre de droite converge.

Par exemple, lorsque $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient la fonction ζ de Riemann, pour laquelle on a vu que la série converge normalement dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > a$, pour tout $a > 1$. Les séries de Dirichlet ont une importance capitale en théorie des nombres. Dans sa démonstration du théorème sur les nombres premiers dans une progression arithmétique, Dirichlet considère une série dont les coefficients vérifient $a_{n+N} = a_n$ pour un certain N et où la somme de N termes consécutifs est nulle : dans ce cas, les sommes $a_1 + \cdots + a_n$ restent bornées. Si on se limite au cas d'une variable réelle x, on déduit immédiatement du théorème 10.5 la proposition suivante :

Proposition 11.2. — *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe telle que les sommes partielles $a_1 + \cdots + a_n$ restent bornées. Alors, pour tout $\delta > 0$, la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$. Par conséquent, la fonction*

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. — On pose $u_n = a_n$ et $f_n(x) = n^{-x} = e^{-x\log(n)}$. Par hypothèse, les sommes partielles U_n sont majorées en valeur absolue par un réel $K > 0$. Fixons $\delta > 0$. La suite de fonctions (f_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, décroissante, et pour tout $x \in [\delta, +\infty[$ on a

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-\delta\log n},$$

ce qui assure que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\delta, +\infty[$. Donc, d'après le théorème 10.5, la série $L(x)$ converge uniformément sur $[\delta, +\infty[$, pour tout $\delta > 0$. Elle définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. □

En fait, la « méthode sommatoire d'Abel » (i.e. le lemme 3.1) permet d'étudier les séries de Dirichlet pour une variable complexe z. Commençons par le lemme suivant.

Lemme 11.3. — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\eta \in \mathbb{C}$ tel que $x = \mathrm{Re}(\eta) > 0$, on a*

$$|\exp(a\eta) - \exp(b\eta)| \leq \frac{|\eta|}{x}(e^{bx} - e^{ax}).$$

Démonstration. — Fixons $\eta \in \mathbb{C}$ tel que $x = \mathrm{Re}(\eta) > 0$. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\eta t)$ est dérivable, de dérivée $f'(t) = \eta \exp(\eta t)$. Par conséquent, on a

$$\exp(b\eta) - \exp(a\eta) = \eta \int_a^b \exp(\eta t)\, dt.$$

Comme $|\exp(\eta t)| = e^{xt}$ et $\exp(bx) - \exp(ax) = x \int_a^b e^{xt}\, dt$, on obtient

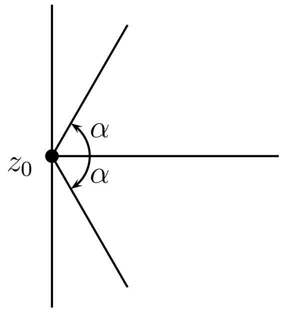
$$|\exp(b\eta) - \exp(a\eta)| \leq |\eta| \int_a^b e^{xt}\, dt = \frac{|\eta|}{x}(e^{bx} - e^{ax}).$$

□

Théorème 11.4. — *Soit $L(z) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n^z}$ une série de Dirichlet.*

(1) *On suppose que $L(z_0)$ converge pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors la série $L(z)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$. De plus, pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, la convergence est uniforme sur le cône :*

$$\Delta(z_0, \alpha) = \big\{ z_0 + re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta \in [-\alpha, \alpha] \big\}.$$



(2) *Si les sommes partielles $a_1 + \cdots + a_n$ restent bornées, alors pour tous réels $\delta, M > 0$ la série $L(z)$ converge uniformément sur la bande*

$$\mathscr{B}(\delta, M) = \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq \delta, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq M \big\}.$$

Démonstration. — (1) On suppose que $L(z_0)$ converge. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$, alors z appartient à un cône comme ci-dessus, en prenant α assez proche de $\pi/2$. Écrivons

$z = z_0 + re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [-\alpha, \alpha]$. Remarquons que la partie réelle $x - x_0$ de $z - z_0$ est alors $r\cos(\theta)$.

Notons $u_n = a_n n^{-z_0}$ et $v_n = v_n(z) = n^{z_0 - z}$ et, pour tout $q \geq p$ posons

$$S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^z}, \qquad U_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n^{z_0}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|U_{q,p}| < \varepsilon$ pour tout $q \geq p \geq N$. D'après le lemme d'Abel (3.1) on a :

$$(*) \qquad u_p v_p + \cdots + u_q v_q = U_{p,p}(v_p - v_{p+1}) + \cdots + U_{p,q-1}(v_{q-1} - v_q) + U_{p,q} v_q$$

et donc, pour $q \geq p \geq N$ on a :

$$|S_{p,q}| \leq \varepsilon\Big(|v_p - v_{p+1}| + \cdots + |v_{q-1} - v_q| + |v_q|\Big).$$

Or, pour $k = p, \ldots, q-1$, le lemme 11.3 appliqué à $a = -\log(k+1)$, $b = -\log(k)$ et $\eta = z - z_0$, donne :

$$|v_k - v_{k+1}| \leq \frac{r}{r\cos\theta}\Big(k^{x_0 - x} - (k+1)^{x_0 - x}\Big)$$

et donc

$$\sum_{k=p}^{q-1} |v_k - v_{k+1}| \leq \frac{1}{\cos\theta}\Big(p^{x_0 - x} - q^{x_0 - x}\Big) \leq \frac{p^{x_0 - x}}{\cos\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}\ .$$

Comme $|v_q| = q^{x_0 - x} \leq 1$ et $\cos(\theta) \geq \cos(\alpha) > 0$, on obtient que

$$|S_{p,q}| \leq \varepsilon\Big(1 + \frac{1}{\cos\theta}\Big) \leq \varepsilon\Big(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\Big).$$

Ceci montre que L converge uniformément sur le cône $\Delta(z_0, \alpha)$.

(2) On suppose maintenant que les sommes partielles $a_1 + \cdots + a_n$ restent bornées en valeur absolue par un réel $K > 0$. Fixons $\delta, M > 0$. D'après la proposition 11.2, la série $L(x_0)$ converge pour $x_0 = \delta/2$. La bande $\mathscr{B}(\delta, M)$ est contenue dans le cône $\Delta(x_0, \alpha)$ pour α assez proche de $\pi/2$ (explicitement, il suffit que $\tan(\alpha) \geq 2M/\delta$), d'où le résultat d'après le point (1).

Donnons aussi une démonstration « directe » du point (2). Pour tout $q \geq p$ posons $U_{p,q} = a_p + \cdots + a_q$ et, pour tout $z \in \mathscr{B}(\delta, M)$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n(z) = n^{-z}$. Alors, d'après l'hypothèse et l'inégalité triangulaire, on a $|U_{p,q}| \leq 2K$.

D'après le lemme d'Abel (3.1), on a comme en $(*)$ plus haut l'égalité suivante :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k v_k(z) = U_{p,p}(v_p(z) - v_{p+1}(z)) + \cdots + U_{p,q-1}(v_{q-1}(z) - v_q(z)) + U_{p,q} v_q(z)$$

d'où, posant $x = \mathrm{Re}(z)$ et tenant compte du lemme précédent,

$$(**) \qquad \left|\sum_{k=p}^{q} a_k v_k(z)\right| \leq 2K\Big(\frac{|z|}{x}(p^{-x} - q^{-x}) + q^{-x}\Big).$$

Or, posant $y = \mathrm{Im}(z)$ on a $|z| = x\sqrt{1+(y/x)^2}$ et $\sqrt{1+(y/x)^2} \leq C = \sqrt{1+(M/\delta)^2}$. De plus, $p^{-x} - q^{-x} \leq p^{-x} \leq p^{-\delta}$ et, de même, $q^{-x} \leq q^{-\delta} \leq p^{-\delta}$. Donc, posant $C' = C + 1$ on obtient :

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k v_k(z) \right| \leq 2KC'p^{-\delta}.$$

Comme $p^{-\delta}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, ceci montre que la série $L(z)$ converge uniformément sur la bande $\mathscr{B}(\delta, M)$. □

Remarque 11.5. — On pourrait tirer de la démonstration ci-dessus une formulation plus générale de la règle d'Abel, lorsque la suite (f_n) est à valeurs complexes et que les valeurs absolues $|f_n - f_{n+1}|$ sont majorées par $g_n - g_{n+1}$ où (g_n) est une suite réelle positive décroissante. Nous ne le ferons pas pour ne pas donner un énoncé trop lourd. L'important à retenir est que la « transformation d'Abel » est un outil très utile.

Références citées dans ce chapitre :

[Cartan] Henri Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961.

[Dirichlet] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, F. Vieweg und Sohn, 1863 (disponible en ligne).