CHAPITRE 3

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

[(1)] La terminologie « intégrales dépendant d'un paramètre » désigne en fait la situation suivante : on a une fonction $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ de plusieurs variables réelles $t, x_1, \ldots, x_n$, telle que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la fonction $t \mapsto f(t, x) = f(t, x_1, \ldots, x_n)$ soit intégrable sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On peut alors considérer la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

et étudier ses propriétés de continuité et dérivabilité lorsque f possède de telles propriétés. Dans l'intégrale ci-dessus, on intègre par rapport à la variable $t \in [a, b]$ et la variable x joue un rôle de « paramètre », i.e. on a une « famille » d'intégrales $F(x)$ dépendant de x, d'où la terminologie.

De telles intégrales apparaissent, en particulier, dans le calcul des intégrales multiples. Pour simplifier l'étude, on se placera sous l'hypothèse que la fonction $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est **continue**, une notion sur laquelle on revient dans la section suivante.

12. Rappels sur les fonctions de plusieurs variables

Dans cette section, on rappelle des notions et résultats vus dans l'UE 2M216.

Définition 12.1 **(Normes)**. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application $E \to \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \|u\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) (*Séparation*) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(2) (*Homogénéité*) $\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|$ pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, où $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ.

(3) (*Inégalité triangulaire*) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pour tout $u, v \in E$.

Procédant par récurrence on en déduit facilement que, pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, on a :

$$(*) \qquad \|u_1 + \cdots + u_n\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|.$$

[(1)] V. du 15/2/17 : 13.1 et 13.2 énoncés pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On fera référence à cette inégalité plus générale en l'appelant encore « inégalité triangulaire ».

Notation 12.2. — Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. C'est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée « norme du sup » ou « norme ∞ ».

***Définition 12.3* (Fonctions continues).** — Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition.

(i) Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que f est **continue** en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $\|f(x) - f(a)\|_\infty < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $\|x - a\|_\infty < \delta$.

(ii) Si A est un sous-ensemble de $\mathscr{D}_f$, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

$\big($Si $n = 1 = p$, on retrouve la définition connue pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.$\big)$

Terminologie 12.4. — Lorsqu'on dira « f est continue en a » ou « f est continue sur A » ou « f est une fonction continue de A dans $\mathbb{R}^p$ », ceci sous-entendra toujours que $a \in \mathscr{D}_f$ et $A \subset \mathscr{D}_f$.

On peut aussi définir la notion de suite convergente :

***Définition 12.5* (Limite d'une suite).** — Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.[(2)] On dit que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^n$, et on note $x^k \to a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\|x^k - a\|_\infty < \varepsilon$.

Proposition 12.6. — *Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$.*

(i) *$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour $i = 1, \dots, n$, la suite $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des i-èmes coordonnées converge vers un réel a_i. Dans ce cas, $a = (a_1, \dots, a_n)$.*

(ii) *Par conséquent, si elle existe, la limite de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est* unique.

Démonstration. — Supposons $x^k \to a$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\|x^k - a\|_\infty < \varepsilon$. Comme $|x_i^k - a_i| \leq \|x^k - a\|_\infty$ pour tout i, on obtient $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui montre que $x_i^k \to a_i$ dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que $x_i^k \to a_i$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_i$, on ait $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$. Posons $k_0 = \max(k_1, \dots, k_n)$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$. Alors pour tout $k \geq k_0$, on a $|x_i^k - a_i| < \varepsilon$ et donc $\|x^k - a\|_\infty < \varepsilon$, ce qui montre que $x^k \to a$.

Ceci prouve (i), et (ii) en découle (par l'unicité déjà connue des limites dans $\mathbb{R}$). $\square$

On vérifie facilement qu'on a les propriétés suivantes, comme dans le cas des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

---

(2) Les termes de la suite sont notés x^k, avec k en exposant, afin de pouvoir noter $x_1^k, \dots, x_n^k$ les coordonnées du vecteur x^k.

Proposition 12.7. — *Considérons deux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Proposition 12.8. — *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathscr{D}_f$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en a.*

(ii) *Pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers a, la suite $\big(f(x^k)\big)$ de $\mathbb{R}^p$ converge vers $f(a)$.*

Remarque 12.9. — En général, pour montrer qu'une fonction donnée f est continue, on utilise directement la définition 12.3. Par contre, la caractérisation en termes de suites convergentes est utile pour démontrer des résultats généraux sur les fonctions continues, en se ramenant à des résultats déjà démontrés pour les suites.

***Exemple 12.10* (utile).** — L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_\infty$ est **continue**. En effet, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|u\|_\infty = \|u - v + v\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|u - v\|_\infty$$

et donc $\|u\|_\infty - \|v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$, et de même en échangeant u et v. Il en résulte que

$$|f(u) - f(v)| \leq \|u - v\|_\infty$$

ce qui entraîne que $f = \|\cdot\|_\infty$ est continue. Par conséquent, si une suite (x^k) de $\mathbb{R}^n$ converge vers une limite ℓ, alors la suite $\big(\|x^k\|_\infty\big)$ converge vers $\|\ell\|_\infty$.

***Définitions 12.11* (Boules et pavés ouverts ou fermés de $\mathbb{R}^n$)**

(1) Pour $i = 1, \dots, n$, soient $a_i < b_i$ des réels. L'ensemble des $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_i < x_i < b_i$ pour $i = 1, \dots, n$ s'appelle un **pavé ouvert** de $\mathbb{R}^n$. De même, l'ensemble des $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_i \leq x_i \leq b_i$ pour $i = 1, \dots, n$ s'appelle un **pavé fermé** de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si $n = 2$, un pavé (ouvert ou fermé) est un rectangle (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}^2$. Si $n = 3$, un pavé (ouvert ou fermé) est un « parallélépipède rectangle » (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}^3$.

(3) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty < r\}$$

et l'on dit que c'est la « **boule ouverte** » de centre a et de rayon r. (Si $n = 2$ (resp. si $n = 3$), c'est le carré (resp. cube) ouvert de centre a et de côté de longueur $2r$.) On définit de même la « **boule fermée** » :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty \leq r\}.$$

Noter que si $a = (a_1, \dots, a_n)$ alors la boule fermée de centre a et de rayon r n'est autre que le pavé fermé défini par les intervalles $[a_i - r, a_i + r]$ pour $i = 1, \dots, n$, et de même dans le cas de la boule ouverte.

***Définition 12.12* (Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$).** — (1) On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^n$ est un **ouvert** si pour tout $a \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que U contienne la boule ouverte $B(a, r)$. On peut montrer (exercice !) que tout pavé ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(2) On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un **fermé** si son complémentaire $\mathbb{R}^n - F$ est ouvert. On peut montrer (exercice !) que tout pavé fermé est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 12.13. — Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{D}_f$. Pour étudier l'existence des dérivées partielles $(\partial f/\partial x_i)$ en a, pour $i = 1, \dots, n$, on a besoin que $f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n)$ soit défini pour tout réel h « assez petit » disons pour $|h| < r_i$. Prenant $r = \min(r_1, \dots, r_n)$, ceci signifie que $\mathscr{D}_f$ doit contenir la boule ouverte $B(a, r)$, donc que $\mathscr{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont « les bonnes parties » de $\mathbb{R}^n$ à considérer pour parler des dérivées partielles (et de la différentiabilité) d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

***Définition 12.14* (Dérivées partielles et applications $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1)**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application $U \to \mathbb{R}$.

(1) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. On dit que f admet en a une dérivée partielle par rapport à la variable x_i, si la limite ci-dessous existe :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}$$

Dans ce cas, cette limite est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$. (Noter que U étant ouvert il contient la boule ouverte $B(a, r)$ pour un certain $r > 0$ et donc le rapport ci-dessus est bien défini pour tout réel $h \neq 0$ tel que $|h| < r$.)

(2) On dit que f admet une dérivée partielle $\partial_i f$ *sur* U si $\partial_i f(a)$ existe pour tout $a \in U$.

(3) On dit que f est de classe C^1 sur U si toutes les dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existent et sont **continues** sur U. (Dans ce cas, f est différentiable sur U et l'application $U \to M_{1,n}(\mathbb{R})$, $a \mapsto df(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)\, dx_i$ est continue, cf. 2M216.)

Terminons cette section avec la notion très importante de *compacité*, et ses conséquences.

***Définition 12.15* (Compacité).** — Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite **compacte** si elle vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, c.-à-d. : de toute suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément a de K.

Rappel 12.16. — On rappelle que, pour tout $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[a, b]$ est compact.

Rappelons aussi la démonstration vue en 2M260 : soit (u_n) une suite d'éléments de $[a, b]$; pour tout n, notons s_n la borne supérieure du sous-ensemble $A_n = \{u_p \mid p \geq n\}$ de $[a, b]$. Comme $A_{n+1} \subset A_n$ on a $s_{n+1} \leq s_n$, i.e. la suite (s_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a, elle converge vers une limite ℓ, notée $\limsup u_n$ (cf. 9.14).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; supposons avoir défini, pour $i = 1, \dots, k-1$, des entiers positifs $\varphi(1) < \cdots < \varphi(k-1)$ tels que $|\ell - u_{\varphi(i)}| < 1/i$. Comme (s_n) converge en décroissant vers ℓ, il existe un entier $N > \varphi(k-1)$ tel que

pour tout $n \geq N$ on ait
$$\ell \leq s_n < \ell + \frac{1}{k}.$$
Alors, comme $s_N = \sup A_N$ on a $s_N \geq u_p$ pour tout $p \geq N$ et il existe au moins un $p \geq N$ tel que
$$u_p \geq s_n - \frac{1}{k} \geq \ell - \frac{1}{k}.$$
Notant $\varphi(k)$ le plus petit tel p, on obtient donc $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ et $|\ell - u_{\varphi(k)}| < \dfrac{1}{k}$. On construit ainsi, par récurrence, une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ qui converge vers ℓ. Ceci prouve que l'intervalle $[a, b]$ est compact.

Théorème 12.17. — *Pour $j = 1, \ldots, n$, soient $a_j \leq b_j$ dans $\mathbb{R}$ et $I_j = [a_j, b_j]$. Alors le pavé fermé*
$$\mathscr{P} = I_1 \times \cdots \times I_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j \ \text{ pour } j = 1, \ldots, n\}$$
est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}$. Alors, pour $j = 1, \ldots, n$, chaque suite (x_j^k) est à valeurs dans l'intervalle $I_j = [a_j, b_j]$. D'après 12.16, on peut extraire une sous-suite $\left(x^{\varphi_1(k)}\right)$ dont la première coordonnée converge vers un réel $a_1 \in I_1$, i.e. telle que la suite $\left(x_1^{\varphi_1(k)}\right)$ converge vers a_1.

Puis on peut extraire de cette suite une sous-suite $\left(x^{\varphi_2(k)}\right)$ (i.e. $\varphi_2(k) = \varphi_1(\psi(k))$ pour une certaine fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) dont la seconde coordonnée converge vers un réel $a_2 \in I_2$. Après n extractions, on obtient une suite de terme général $y^k = x^{\varphi_n(k)}$ dont la j-ème coordonnée converge vers un réel $a_j \in I_j$, pour $j = 1, \ldots, n$. Alors la suite (y^k) converge vers $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{P}$. Ceci prouve que $\mathscr{P}$ est compact. □

Une propriété importante des parties compactes, qui sera très utile pour étudier les intégrales dépendant d'un paramètre, est donnée par la définition et le théorème qui suivent.

***Définition 12.18* (Continuité uniforme)**. — Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite **uniformément continue** sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,
$$\|x - y\|_\infty < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty < \varepsilon.$$

***Remarque 12.19* (Importante)**. — Cette propriété est *plus forte* que la continuité en tout point x de A. En effet, dans la définition de la continuité en un point x, le δ dépend à la fois de ε et de x. Par contre, ε étant donné, la définition plus haut exige l'existence d'un δ qui donne la majoration $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ de façon « uniforme » en x, i.e. pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$ tels que $\|x - y\| < \delta$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$ est continue mais **pas** uniformément continue. En effet, supposons qu'elle le soit : alors, prenant $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$(*) \qquad 0 < \frac{1}{y} - \frac{1}{x} < 1$$
pour tous $y < x$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x - y < \delta$. Prenant $x < \delta$ et $y = x/2$, l'inégalité $(*)$ donne $1/x < 1$ pour tout $x < \delta$, ce qui est absurde puisque $1/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+.

***Théorème 12.20* (Heine)**. — *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$. Alors f est uniformément continue sur K.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $x^k, y^k \in K$ tels que $\|x^k - y^k\| < 1/k$ et $\|f(x^k) - f(y^k)\| \geq \varepsilon_0$. Comme K est compact, on peut extraire de (x^k) une sous-suite $\big(x^{\varphi_1(k)}\big)$ qui converge vers un élément x de K, puis extraire de la suite $\big(y^{\varphi_1(k)}\big)$ une sous-suite $\big(y^{\varphi_1(\varphi_2(k))}\big)$ qui converge vers un élément y de K. Posant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ et notant $u^k = x^{\varphi(k)}$ et $v^k = y^{\varphi(k)}$, on obtient que $u^k \to x$ et $v^k \to y$.

Comme f est continue, $f(u^k) - f(v^k)$ converge vers $f(x) - f(y)$ et l'on en déduit que $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0$. D'autre part, comme $\|u^k - v^k\| < 1/\varphi(k) \leq 1/k$, on en déduit que $x = y$, d'où $f(x) = f(y)$ ce qui contredit l'inégalité $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0$. $\square$

Rappelons aussi le théorème suivant, pour lequel on renvoie au cours 2M216 :

Théorème 12.21. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}^p$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. En particulier, si $p = 1$ alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $a, b \in K$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in K$.*

Terminons cette section avec la remarque suivante.

***Remarque 12.22* (Norme euclidienne).** — On peut aussi considérer sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne, définie par

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

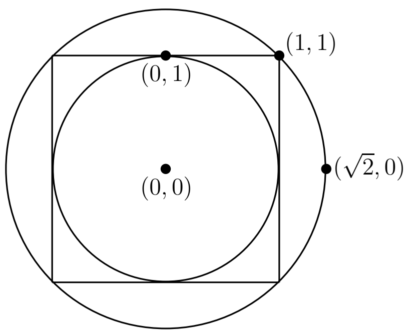
Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, on voit facilement que :

$$(\dagger) \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, désignant par $B_\infty(a, r)$, resp. $B_2(a, r)$, la boule de centre a et rayon r pour la norme ∞, resp. la norme euclidienne, on a :

$$(\ddagger) \qquad B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r) \subset B_2(a, \sqrt{n}\,r)$$

cf. la figure ci-dessous pour le cas de $\mathbb{R}^2$:



On déduit de ($\ddagger$) que l'on obtient les **mêmes** applications continues $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, les **mêmes** suites convergentes de $\mathbb{R}^n$, et les **mêmes** parties ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$, que l'on utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou bien la norme $\|\cdot\|_2$. On traduit la double inégalité de ($\dagger$) en disant que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ sont *équivalentes* (cf. 2M216).

13. Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre

Commençons par les résultats suivants.

Proposition 13.1. — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$, $(s, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(s, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. Alors l'application*

$$F : [a,b]^2 \times U \to \mathbb{C}, \qquad (r, t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_r^t f(s, x_1, \dots, x_n)\, ds$$

est continue.

Démonstration. — Soient $(r_0, t_0, x_0) \in [a,b]^2 \times U$. Comme U est un ouvert, il contient une boule ouverte $B(x_0, \eta)$ avec $\eta > 0$ et donc aussi la boule fermée $\overline{B} = \overline{B}(x_0, \eta/2)$. Alors $K = [a,b] \times \overline{B}$ est un pavé fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ donc est compact.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact K, elle y est uniformément continue (Th. 12.20) donc il existe $\delta > 0$ tel que $|f(s,x) - f(s,x_0)| \leq \varepsilon/(b-a)$ pour tout $(s,x) \in K$ tel que $\|x - x_0\| \leq \delta$. De plus, d'après le théorème 12.21, $|f|$ est bornée sur K par une constante $M > 0$. Comme

$$F(r,t,x) - F(r_0,t_0,x_0) = \int_{t_0}^t f(s,x)ds + \int_r^{r_0} f(s,x)ds + \int_{r_0}^{t_0} \Big(f(s,x) - f(s,x_0)\Big)ds$$

alors si $\|x - x_0\| \leq \delta$ on a

$$|F(r,t,x) - F(r_0,t_0,x_0)| \leq \big(|t-t_0| + |r-r_0|\big)M + |t_0 - r_0| \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \big(|t-t_0| + |r-r_0|\big)M + \varepsilon,$$

et donc $|F(r,t,x) - F(r_0,t_0,x_0)| \leq 2\varepsilon$ si l'on a de plus $|t - t_0| + |r - r_0| \leq \varepsilon/M$. Ceci prouve que F est continue en (r_0, t_0, x_0). □

Théorème 13.2. — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$, $(s, x_1, \dots, x_n) \mapsto g(s, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. On suppose que, pour $i = 1, \dots, n$, la dérivée partielle $\partial g/\partial x_i$ existe et est continue sur $[a,b] \times U$. Alors l'application*

$$G : [a,b] \times U \to \mathbb{C}, \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_a^t g(s, x_1, \dots, x_n) ds$$

est de classe C^1 : on a $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) = g(t, x_1, \dots, x_n)$ et, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_n) = \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x_1, \dots, x_n) ds.$$

Démonstration. — En considérant la partie réelle (resp. imaginaire) de g, on se ramène au cas où g est à valeurs réelles.[3] Fixons $x \in U$. L'application $t \mapsto g(t,x)$ est continue donc l'application $t \mapsto \displaystyle\int_a^t g(s,x)ds$ est dérivable, de dérivée $g(t,x)$. Ceci prouve que $\partial G/\partial t = g$.

[3] On fait ceci pour utiliser le théorème des accroissements finis.

Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon > 0$. Comme U est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $h \in [-r, r]$ on ait $x + he_i \in U$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, écrivant $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a

$$x + he_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

et ceci appartient à U si $|h| \leq r$.

L'application $\phi : (s, h) \mapsto (\partial g/\partial x_i)(s, x + he_i)$ est continue sur le compact $[a, b] \times [-r, r]$ donc y est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $|\phi(s, h) - \phi(s, 0)| < \varepsilon/(b-a)$ si $|h| < \delta$.

Fixons un tel h et $s \in [a, b]$; d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $[-r, r] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto g(s, x + ue_i)$, il existe un réel $\theta = \theta(s, h) \in [0, 1]$ tel que

$$g(s, x + he_i) - g(s, x) = h\frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x + \theta he_i) = h\phi(s, \theta h)$$

et comme $|\theta h| \leq |h| < \delta$, on a $|\phi(s, \theta h) - \phi(s, 0)| < \varepsilon/(b - a)$ et donc

$$\left| \frac{g(s, x + he_i) - g(s, x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

pour $h \neq 0$. Comme

$$\frac{G(t, x + he_i) - G(t, x)}{h} - \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) ds = \int_a^t \left(\frac{g(s, x + he_i) - g(s, x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) \right) ds$$

on en déduit que

$$\left| \frac{G(t, x + he_i) - G(t, x)}{h} - \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) ds \right| \leq |t - a| \frac{\varepsilon}{b - a} \leq \varepsilon$$

et ceci montre que $(\partial G/\partial x_i)(t, x) = \displaystyle\int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x) ds$. Comme $\partial g/\partial x_i$ est continue alors $\partial G/\partial x_i$ l'est aussi, d'après la proposition précédente. Comme $\partial G/\partial t = g$ est aussi continue, il en résulte que G est de classe C^1.. □

***Corollaire 13.3* (Fubini pour un rectangle)**. — *Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : [a, b] \times [c, d] \times U \to \mathbb{C}$, $(s, u, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(s, u, x_1, \dots, x_n)$ une application continue. Alors pour tout $x \in U$ on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s, u, x) du \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s, u, x) ds \right) du.$$

Notant R le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, cette intégrale sera notée $\phi(x) = \displaystyle\iint_R f(s, u, x) ds\, du$.

Démonstration. — Fixons $x \in U$. L'application $s \mapsto F(s, x) = \int_c^d f(s, u, x) du$ est continue, donc l'application $p : t \mapsto \int_a^t F(s, x) ds$ est dérivable, de dérivée $p'(t) = F(t, x) = \int_c^d f(t, u, x) du$.

D'autre part, l'application $(t,u) \mapsto G(t,u,x) = \int_a^t f(s,u,x)ds$ est continue, d'après le lemme 13.1, et elle admet une dérivée partielle $\partial G/\partial t = f$ qui est continue. Donc, d'après le théorème 13.2, l'application $q : t \mapsto \int_c^d G(t,u,x)du$ est dérivable, de dérivée

$$q'(t) = \int_c^d \frac{\partial G}{\partial t}(t,u,x)du = \int_c^d f(t,u,x)du = p'(t).$$

Or $p(a) = 0$ et $G(a,u,x) = 0$ pour tout (u,x), d'où aussi $q(a) = 0$. On en déduit que $p(t) = q(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, en particulier pour $t = b$. $\square$