CHAPITRE 4

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

[1] Le but de cette section est d'étudier des intégrales dépendant d'un paramètre $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas fermé borné. Par exemple, étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2y\sqrt{t}) e^{-y^2} \, dy$$

vérifie l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)$$

ainsi que la « condition initiale » $F(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

15. Intégrales uniformément convergentes

***Rappels 15.1* (Intégrales généralisées).** — Soit $I = \,]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert non vide, où α (resp. β) peut être $-\infty$ (resp. $+\infty$).

(1) On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **localement intégrable** sur I si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ contenu dans I. Ceci est le cas, en particulier, si f est *continue* sur I.

(2) On dit que f est **intégrable** sur I si elle est localement intégrable et si, pour un $t_0 \in I$ fixé, les limites

$$\lim_{a \to \alpha} \int_a^{t_0} f(t) \, dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{b \to \beta} \int_{t_0}^b f(t) \, dt$$

[1] Version du 13/4/17 : ajout du Th. 15.10 (intégration sous le signe $\int$) puis d'une version améliorée 15.11 du Th. 15.8 pour le rendre analogue au Th. 4.7, puis du Th. 15.12 qui combine le résultat précédent avec le théorème de convergence normale 15.9.

existent.[2] Dans ce cas, elles sont notées $\displaystyle\int_\alpha^{t_0} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{t_0}^{\beta} f(t)\,dt$ et l'on pose

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^{t_0} f(t)\,dt + \int_{t_0}^\beta f(t)\,dt.$$

Noter que l'existence des limites, et la valeur de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, ne dépendent pas du choix de $t_0 \in I$.

(3) On dit que f est **absolument intégrable** sur I si elle est localement intégrable et si $|f|$ est intégrable sur I. Ceci entraîne que f est intégrable sur I, cf. [**Chem16**], Chap. 6, Th. 70.

Remarques 15.2. — [3] Soit f localement intégrable sur I.

(a) Supposons l'intervalle I borné, i.e. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) Si f est bornée sur I, elle est absolument intégrable. En effet, fixons $t_0 \in I$ et soit $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $c \geq b$ dans $[\beta - \dfrac{\varepsilon}{C}, \beta[$, on a :

$$\left| \int_{t_0}^c f(t)\,dt - \int_{t_0}^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_b^c f(t)\,dt \right| \leq (c-b)C \leq \varepsilon.$$

Donc, d'après le « critère de Cauchy » pour les fonctions, cf. [**Chem16**], Chap. 4, Th. 40, la fonction $x \mapsto \int_{t_0}^x f(t)\,dt$ admet une limite lorsque x tend vers β, i.e.

$$\int_{t_0}^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta^-} \int_{t_0}^x f(t)\,dt$$

existe. Le même argument s'applique pour $\int_\alpha^{t_0} f(t)\,dt$.

(2) Si f n'est pas bornée, il faut étudier l'existence des limites ci-dessus. Par exemple, si $I =]0,1]$ et $f(t) = 1/t$ alors $\int_x^1 f(t)\,dt = -\log(x)$ tend $+\infty$ quand $x \to 0^+$. Par contre, pour $g(t) = 1/2\sqrt{t}$ on a $\int_x^1 g(t)\,dt = 1 - \sqrt{x}$ et ceci tend vers 1 quand $x \to 0^+$.

(b) Supposons maintenant I non borné, disons $I = [a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

(1) Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et si f admet une limite ℓ en $+\infty$, on a nécessairement $\ell = 0$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > 0$ (le cas $\ell < 0$ est analogue). Alors il existe $A \geq a$ tel que $f(t) \geq \ell/2$ pour tout $t \geq A$, d'où, pour tout $x \geq A$:

$$\int_A^x f(t)\,dt \geq (x-A)\frac{\ell}{2}$$

et ceci tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

(2) Bien sûr, le fait que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ n'entraîne pas que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ existe ! Par exemple si $I = [1, +\infty[$ et $f(t) = 1/t$ alors $\int_1^x f(t)\,dt = \log(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

---

[2] Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\int_{-a}^b 2t\,dt = b^2 - a^2$ n'a pas de limite quand a et b tendent *séparément* vers $+\infty$; par contre, on a $\int_{-a}^a 2t\,dt = 0$. Ceci explique pourquoi il faut considérer les deux limites, pour a tendant vers α et b tendant vers β.

[3] Ces remarques remplacent le point (4) de 15.1 qui était erroné, comme signalé par Albert Cohen. Merci à lui !

(3) L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ peut exister même si f n'est pas bornée. Par exemple, soit f la fonction continue dont le graphe est donné par la réunion pour $n \geq 1$ des triangles de base centrée au point $(n,0)$ et de longueur $1/n^3$, et de sommet le point $(n,2n)$, f valant 0 hors de ces « pics ». Alors

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

(La somme de cette série vaut $\pi^2/6$.)

On se place désormais dans le cadre suivant. Soient I comme ci-dessus, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times U \to \mathbb{C}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction telle que, pour tout $x \in U$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I, ce qui définit une fonction

$$F(x) = \int_\alpha^\beta f(t,x)\,dt.$$

Pour étudier les propriétés de continuité ou dérivabilité de $F(x)$, il s'agit d'étudier, pour un $t_0 \in I$ fixé, les fonctions E et D définies par

$$E(x) = \lim_{b\to\beta} \int_{t_0}^b f(t,x)\,dt \qquad \text{et} \qquad D(x) = \lim_{a\to\alpha} \int_a^{t_0} f(t,x)\,dt,$$

dont F est la somme. Évidemment, les deux cas sont similaires. On traitera uniquement le premier cas ; les résultats obtenus valent aussi dans le second cas.

Notation. — Pour toute la suite de cette section, on fixe $a \in I$, on suppose que, pour tout $x \in U$, la limite

$$\int_a^\beta f(t,x)\,dt = \lim_{b\to\beta} \int_a^b f(t,x)\,dt$$

existe, et on la note $F(x)$. On va étudier les propriétés de la fonction $F : U \to \mathbb{C}$.

Définitions 15.3. — (1) On dit que les intégrales $F(x)$ convergent **uniformément** sur U si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in [a,\beta[$ tel que pour tout $c \in [b,\beta[$ et $x \in U$ on ait

$$\left| F(x) - \int_a^c f(t,x)\,dt \right| < \varepsilon.$$

(2) On dit que les intégrales $F(x)$ convergent **localement uniformément** sur U si pour tout $u \in U$ il existe un réel $r > 0$ tel que la boule $B = B_\infty(u,r)$ soit contenue dans U et que les intégrales $F(x)$ convergent uniformément sur B. Cette notion, plus faible que la convergence uniforme sur U tout entier, sera utile plus loin.

Remarque. — Ces définitions sont parallèles à celles de convergence uniforme ou localement uniforme d'une suite de fonctions. En effet, si au lieu de f, on considère une fonction $\phi : \mathbb{N} \times U \to \mathbb{C}$ et, à la place de l'intégrale, on considère la suite de fonctions Φ_N définie par $\Phi_N(x) = \sum_{n=0}^N \phi(n,x)$ pour tout $x \in U$, alors les définitions précédentes correspondent à la convergence uniforme ou localement uniforme de la suite Φ_N.

En fait, on peut démontrer tous les résultats qui vont suivre dans ce chapitre en se ramenant au cas des suites de fonctions, grâce aux deux lemmes ci-dessous. Toutefois, ceci consiste à rajouter la démonstration de ces lemmes au-dessus des démonstrations déjà données pour les suites de fonctions. Pour cette raison nous préférons, dans l'exposé oral et dans ces notes, démontrer directement chaque théorème, pour faire voir que c'est toujours la même idée qui est utilisée.

Lemme 15.4. — *Soit g une application $[a,\beta[\,\to \mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to\beta} g(x)$ *existe.*
(ii) *Pour toute suite (b_n) de $[a,\beta[$ tendant vers β, la suite $(g(b_n))$ est convergente.*

Démonstration. — Si $\ell = \lim_{x\to\beta} g(x)$ existe, on voit facilement que pour toute suite (b_n) tendant vers β, la suite $(g(b_n))$ converge vers ℓ.

Réciproquement, supposons (ii) vérifié. Montrons d'abord que la limite ne dépend pas de la suite (b_n). Soient (b_n) et (c_n) deux suites tendant vers β ; par hypothèse la suite $(g(b_n))$, resp. $(g(c_n))$, converge vers une limite ℓ, resp. ℓ'. Soit (d_n) la suite définie par $d_{2n} = a_n$ et $d_{2n+1} = b_n$; par hypothèse la suite $(g(d_n))$ converge vers une limite ℓ''. Alors, comme $(g(a_n))$ est une suite extraite de la suite $(g(d_n))$, on a $\ell = \ell''$, et de même $\ell' = \ell''$, d'où $\ell = \ell'$. Ceci montre que la limite est indépendante de la suite ; notons-la ℓ.

On obtient alors que $\lim_{x\to\beta} g(x) = \ell$ de la façon habituelle, en raisonnant par l'absurde : fixons une suite (u_n) convergeant vers β (par exemple $u_n = \beta - 1/n$ si β est un réel, et $u_n = n$ si $\beta = +\infty$). La négation de l'affirmation « $\lim_{x\to\beta} g(x) = \ell$ » signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel c_n tel que $b_n \le c_n < \beta$ et $|g(c_n) - \ell| > \varepsilon$. Alors la suite (c_n) tend vers β mais $(g(c_n))$ ne converge pas vers ℓ, contredisant l'hypothèse. □

Lemme 15.5. — *On conserve les notations de* 15.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les intégrales $F(x)$ convergent uniformément sur U.*
(ii) *Pour toute suite (b_n) de $[a,\beta[$ tendant vers β, la suite (F_n) définie par $F_n(x) = \displaystyle\int_a^{b_n} f(t,x)\,dt$ converge uniformément sur U.*

Démonstration. — Supposons (i) vérifié et soit (b_n) une suite comme dans l'énoncé. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $b \in [a,\beta[$ tel que

$$\left|\int_a^b f(t,x)\,dt - F(x)\right| < \varepsilon, \qquad \forall c \ge b,\ \forall x \in U.$$

Comme (b_n) tend vers β, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b \le b_n < \beta$ pour tout $n \ge N$. Il suit que

$$\left|\int_a^{b_n} f(t,x)\,dt - F(x)\right| < \varepsilon$$

pour tout $x \in U$ pourvu que $n \ge N$. Ceci montre que la suite de fonctions $F_n(x)$ de l'énoncé convergence uniformément sur U vers F.

Supposons (ii) vérifié. Pour tout $x \in U$ le lemme précédent, appliqué à la fonction $g(b) = \int_a^b f(t,x)\,dt$, montre alors que l'intégrale $F(x) = \int_a^\beta f(t,x)\,dt$ existe. Il reste à montrer que l'intégrale $F(x)$ « converge uniformément sur U ». Or la négation de cette affirmation signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $b \in [a,\beta[$, il existe $c \ge b$ et $x \in U$ tels que

$$\left|\int_a^c f(t,x)\,dt - F(x)\right| \ge \varepsilon.$$

On choisit alors une suite (b_n) de $[a,\beta[$ qui tend vers β. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $c_n \in [b_n,\beta[$ et $x_n \in U$ tels que

$$(\#) \qquad \left|\int_a^{c_n} f(t,x_n)\,dt - F(x_n)\right| \ge \varepsilon.$$

Alors la suite (c_n) tend vers β donc, par hypothèse, la suite de fonctions

$$F_n : x \mapsto \int_a^{c_n} f(t,x)\,dt$$

converge uniformément sur U vers sa limite $F(x)$. Pour notre ε plus haut, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in U$. Or, pour $N = n$ et $x = x_N$, ceci contredit (#). □

***Remarque 15.6* (Importante).** — Dans la suite, on utilisera de façon répétée l'argument suivant. Supposons que les intégrales $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ convergent uniformément sur U. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $b \in [a, \beta[$ tel que pour tout $c \in [b, \beta[$ et $x \in U$ on ait :

$$\left| F(x) - \int_a^c f(t,x)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tous $c, c' \in [b, \beta[$ on a :

$$(\clubsuit) \qquad \left| \int_{c'}^c f(t,x)\,dt \right| = \left| \int_a^c f(t,x)\,dt - F(x) + F(x) - \int_a^{c'} f(t,x)\,dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci est analogue à la démonstration du fait que toute suite convergente est de Cauchy. Noter en particulier que ($\clubsuit$) est vrai pour $c' = b$, qui est la forme sous laquelle on utilisera ce résultat.

***Théorème 15.7* (Continuité des intégrales uniformément convergentes)**
On suppose que $f : [a, \beta[\times U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et que les intégrales $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ convergent **localement uniformément** *sur U. Alors $F : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.5. Posons $I = [a, \beta[$. Soit $x_0 \in U$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les intégrales $F(x)$ convergent uniformément sur la boule $B = B_\infty(x_0, r)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $b \in I$ tel que pour tout $c \in [b, \beta[$ et $x \in B$ on ait

$$(\dagger) \qquad \left| F(x) - \int_a^c f(t,x)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, d'après la proposition 13.1, l'application $\phi_b : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ est continue en x_0, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B$ tel que $\|x - x_0\| < \delta$ on ait

$$(\ddagger) \qquad \left| \int_a^b f(t,x)\,dt - \int_a^b f(t,x_0)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout tel x, on a donc, d'après (†) appliqué à $c = b$ et (‡) :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq |F(x) - \phi_b(x)| + |\phi_b(x) - \phi_b(x_0)| + |\phi_b(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon$$

ce qui prouve que F est continue en x_0. □

Théorème 15.8 **(Dérivabilité des intégrales uniformément convergentes)**
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : [a, \beta[\times U \to \mathbb{C}$ une application telle que pour chaque $x \in U$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ soit localement intégrable sur $[a, \beta[$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose que :

(a) *f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continue sur $[a, \beta[\times U$*

(b) *Pour tout $x \in U$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta f(t, x)\, dt$ existe.*

(c) *Les intégrales $G_i(x) = \displaystyle\int_a^\beta \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)\, dt$ convergent* **localement uniformément**.

Alors pour tout $x \in U$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ existe et vaut $G_i(x)$.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du théorème 4.7. En considérant la partie réelle (resp. imaginaire) de f, on se ramène au cas où f est à valeurs réelles. Fixons $u \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $r > 0$ tel que les intégrales $G_i(x)$ convergent uniformément sur la boule $B = B_\infty(u, r)$. Posons $I =]-r, r[$.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après (♣), il existe $b \in [a, \beta[$ tel que pour tout $c \in [b, \beta[$ et $x \in B$ on ait

$$\left| \int_b^c \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)\, dt \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Fixons provisoirement $c \in [b, \beta[$ et considérons les applications $g : I \to \mathbb{C}$ et $\phi : I \to \mathbb{C}$ définies par

$$g(h) = \int_b^c f(t, u + he_i)\, dt \qquad \text{et} \qquad \phi(h) = \int_a^b f(t, u + he_i)\, dt$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$; en d'autres termes, si l'on écrit $u = (u_1, \dots, u_n)$ alors

$$u + he_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + h, u_{i+1}, \dots, u_n).$$

D'après l'hypothèse (a) et le théorème 13.2, g et ϕ sont de classe C^1 sur I et pour tout $h \in I$ l'on a :

$$g'(h) = \int_b^c \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u + he_i)\, dt \qquad \text{et} \qquad \phi'(h) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, u + he_i)\, dt.$$

Donc, d'après (1) et l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| \int_b^c \Big(f(t, u + he_i) - f(t, u) \Big) dt \right| = |g(h) - g(0)| \le \varepsilon\, |h|$$

pour tout $h \in I$. Gardant h fixé et faisant tendre c vers β, on obtient l'inégalité :

$$\left| \int_b^\beta \Big(f(t, u + he_i) - f(t, u) \Big) dt \right| \le \varepsilon\, |h|. \tag{2}$$

Comme

$$F(u+he_i)-F(u)-hG_i(u) = \int_b^\beta \Big(f(t,u+he_i)-f(t,u)-h\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,u)\Big)dt+\phi(h)-\phi(0)-h\phi'(0),$$

on déduit de (1), appliqué à $x = u$, et de (2) que

(3) $$\big|F(u + he_i) - F(u) - hG_i(u)\big| \leq 2\varepsilon\,|h| + \big|\phi(h) - \phi(0) - h\phi'(0)\big|.$$

De plus, comme ϕ est dérivable en 0 il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$\big|\phi(h) - \phi(0) - h\phi'(0)\big| \leq \varepsilon\,|h|$$

pour tout h tel que $|h| < \delta$. Pour tout tel h, on a donc

$$\big|F(u + he_i) - F(u) - hG_i(u)\big| \leq 3\varepsilon\,|h|.$$

Ceci prouve que $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(u)$ existe et vaut $G_i(u)$. □

Donnons tout de suite le critère le plus simple de convergence uniforme pour les intégrales, qui est l'analogue de la convergence normale pour les séries de fonctions. (On verra dans une section ultérieure l'analogue du critère d'Abel pour les intégrales.)

Théorème 15.9 **(Convergence « normale » des intégrales)**
Soit $f : [a,\beta[\times U \to \mathbb{C}$ une fonction telle que pour chaque $x \in U$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ soit localement intégrable sur $[a,\beta[$. On suppose qu'il existe une fonction $M : [a,\beta[\to \mathbb{R}_+$ telle que :

(a) *Pour tout $x \in U$ et $t \in [a,\beta[$, on a $|f(t,x)| \leq M(t)$.*
(b) *M est intégrable sur $[a,\beta[$.*

Alors pour tout $x \in U$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $[a,\beta[$ et les intégrales $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ convergent **uniformément** *sur U.*[4]
Par conséquent, si l'on suppose de plus que f est continue alors F l'est aussi.

Démonstration. — Fixons une suite croissante (b_n) d'éléments de $[a,\beta[$ qui tend vers β et posons, pour tout $x \in U$,

$$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(t,x)\,dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la remarque (♣), il existe $B \in [a,\beta[$ tel que pour tous $c \geq b$ dans $[B,\beta[$ on ait :

(1) $$\int_b^c M(t)\,dt < \varepsilon.$$

[4] Ce théorème est similaire au théorème 8.2.1 du polycopié de LM260 [**Delab10**]. Toutefois, nous *démontrons* ici ce théorème grâce au théorème 15.7 qui lui-même repose sur la proposition 13.1, tandis que dans [**Delab10**] la démonstration du théorème 8.2.1 repose sur le « théorème de convergence bornée » 7.1.1 dont la démonstration est omise car son cadre naturel est celui de l'intégrale de Lebesgue (qui est au programme de L3).

Alors, pour tout $c \geq b \geq B$ et $x \in U$ on a :

$$\left|\int_b^c f(t,x)\,dt\right| \leq \int_b^c |f(t,x)|\,dt \leq \int_b^c M(t)\,dt < \varepsilon. \tag{2}$$

La suite de la démonstration est analogue à celle du théorème 40 de [**Chem16**], Chap. 4. Comme (b_n) tend vers β, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $b_n \geq B$ et donc, pour tout $p \geq n \geq N$ et $x \in U$:

$$|F_p(x) - F_n(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Ceci montre que la suite de fonctions (F_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme ; en particulier pour tout $x \in U$ la suite $(F_n(x))$ converge vers une limite $F(x)$ et, faisant tendre p vers $+\infty$, l'inégalité précédente donne, pour tout $n \geq N$ et $x \in U$:

$$|F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

Alors, pour tout $c \geq b_N$ on obtient, en combinant (4) et (2) appliquée à $c \geq b_N \geq B$:

$$\left|F(x) - \int_a^c f(x,t)\,dt\right| \leq \left|F(x) - \int_a^{b_N} f(t,x)\,dt\right| + \left|\int_{b_N}^c f(t,x)\,dt\right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre que les intégrales $\displaystyle\int_a^\beta f(t,x)\,dt$ convergent uniformément vers $F(x)$. La dernière assertion découle alors du théorème 15.7. □

---

[5] On conserve la notation $[a,\beta[$ précédente : a est un réel et β est un réel $> a$ ou bien $\beta = +\infty$. Démontrons d'abord le théorème « d'intégration sous le signe $\int$ » suivant.

Théorème 15.10. — *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et*

$$f : [a,\beta[\times I \times U \to \mathbb{C}, \qquad (t,x,u) \mapsto f(t,x,u)$$

une application continue. On suppose que les intégrales $F(x,u) = \displaystyle\int_a^\beta f(t,x,u)\,dt$ convergent uniformément sur $I \times U$. Alors :

(i) *F est continue.*
(ii) *Fixons $c \in I$. Pour tout $x \in I$ on a les égalités :*

$$\int_c^x \left(\int_a^\beta f(t,y,u)\,dt\right) dy = \int_c^x F(y,u)\,dy = \int_a^\beta \left(\int_c^x f(t,y,u)\,dy\right) dt. \tag{$*$}$$

(iii) *L'application $G : I \times U \to \mathbb{C}$, $(x,u) \mapsto \displaystyle\int_a^\beta \left(\int_c^x f(t,y,u)\,dy\right) dt$ admet une dérivée partielle $\partial G/\partial x$, donnée par :*

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,u) = \int_a^\beta f(t,x,u)\,dt.$$

[5] Ce qui suit a été ajouté le 13 avril 2017.

Démonstration. — Le point (i) découle du théorème 15.7. Fixons $x \in I$ tel que $x \neq c$. Comme F est continue, on peut former l'intégrale $\int_c^x F(y,u)\,dy$ qui, par définition, est égale au terme de gauche de $(*)$. Montrons qu'elle est égale au terme de droite.

Comme f est continue, l'application $g : (t,u) \mapsto \int_c^x f(t,y,u)\,dy$ est continue, donc l'intégrale $\int_a^b g(t,u)\,dt$ existe pour tout $b \in [a,\beta[$ et il s'agit de montrer qu'elle tend vers $\int_c^x F(y,u)\,du$ lorsque $b \to \beta$. Par définition, on a :

$$\int_c^x F(y,u)\,dy = \int_c^x \left(\lim_{b\to\beta}\int_a^b f(t,y,u)\,dt\right)dy$$

et comme la convergence est uniforme, on peut intervertir la limite et l'intégration sur $[c,x]$. En effet, soit $\varepsilon > 0$; comme la convergence est uniforme il existe $B \in [a,\beta[$ tel que pour tout $b \in [B,\beta[$ et $(y,u) \in I \times U$ on ait

$$\left|F(y,u) - \int_a^b f(t,y,u)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{|x-c|}$$

et donc

$$(\dagger) \qquad \left|\int_c^x \left(F(y,u) - \int_a^b f(t,y,u)\,dt\right)dy\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que

$$(\ddagger) \qquad \int_c^x F(y,u)\,dy = \lim_{b\to\beta}\int_c^x \left(\int_a^b f(t,y,u)\,dt\right)dy.$$

D'autre part, comme f est continue alors, d'après le corollaire 13.3 (Fubini sur un rectangle), on a pour tout $b \in [a,\beta[$:

$$\int_c^x \left(\int_a^b f(t,y,u)\,dt\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^x f(t,y,u)\,dy\right)dt = \int_a^b g(t,u)\,dt.$$

Combiné avec $(\ddagger)$ (lu de droite à gauche), ceci prouve que

$$\lim_{b\to\beta}\int_a^b \left(\int_c^x f(t,y,u)\,dy\right)dt = \int_c^x F(y,u)\,dy,$$

d'où l'égalité désirée :

$$\int_a^\beta g(t,u)\,dt = \int_a^\beta \left(\int_c^x f(t,y,u)\,dy\right)dt = \int_c^x F(y,u)\,dy.$$

De plus, pour tout $b \in [B,\beta[$, $(\dagger)$ donne :

$$\left|\int_c^x F(y,u)\,dy - \int_a^b g(t,u)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que les intégrales $G(u) = \int_a^b g(t,u)\,dt$ convergent uniformément pour $u \in U$.

Enfin, le point (iii) découle du théorème 15.8. □

Grâce au théorème précédent, on peut reformuler le théorème 15.8 sous une forme analogue au théorème 4.7 pour les suites de fonctions :

Corollaire 15.11. — *Soient U un ouvert* connexe *de $\mathbb{R}^n$ et $f : [a,\beta[\times U \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose que :*

(a) *Il existe $c \in U$ tel que l'intégrale $F(c) = \displaystyle\int_a^\beta f(t,c)\,dt$ existe.*

(b) *Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $[a,\beta[\times U$ et les intégrales $G_i(x) = \displaystyle\int_a^\beta \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\,dt$ convergent uniformément sur U.*

Alors, pour tout $x \in U$, l'intégrale $F(x)$ existe et pour tout $i = 1,\dots,n$ et $x \in U$, on a $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x) = G_i(x)$. Par conséquent, F est de classe C^1 sur U.

Démonstration. — Compte tenu du théorème 15.8, il suffit de montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in U$. Fixons $x \in U$. Comme U est supposé connexe, il existe une suite finie $c = p_0, p_1, \dots, p_N = x$ de points de U tels que chaque segment $[p_{i-1}, p_i]$ soit parallèle à un axe de coordonnées, i.e. que les points p_{i-1} et p_i ne diffèrent que par une seule coordonnée (cf. l'UE 2M216, voir par exemple [**Po16**], Chap. 2, Th. 4.18). Il suffit donc de montrer que si $u, x \in U$ ne différent que par une coordonnée et si $F(u)$ existe, alors $F(x)$ existe aussi. Supposons par exemple que x et u ne diffèrent que par la première coordonnée, i.e. $x = (x_1, u_2, \dots, u_n)$. Alors on a

$$f(t,x) - f(t,u) = \int_{u_1}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, u_2, \dots, u_n)\,dy$$

et donc, pour tout $b \in [a,\beta[$:

$$\int_a^b f(t,x)\,dt = \int_a^b f(t,u)\,dt + \int_a^b \left(\int_{u_1}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, u_2, \dots, u_n)\,dy \right) dt.$$

D'après l'hypothèse que $F(u)$ existe et le théorème précédent, il en résulte que $F(x)$ existe et vaut :

$$\int_a^\beta f(t,u)\,dt + \int_a^\beta \left(\int_{u_1}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, u_2, \dots, u_n)\,dy \right) dt.$$

Le corollaire en découle. □

En appliquant le théorème de convergence normale 15.9 aux intégrales $\displaystyle\int_a^\beta \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\,dt$, on obtient le théorème suivant, très utile en pratique.(6)

Théorème 15.12. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : [a,\beta[\times U \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

(a) *Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $[a,\beta[\times U$.*

(6)La suggestion d'insérer ce théorème dans le polycopié est due à Massil Hihat, merci à lui !

(b) *Il existe une application continue* $g : [a,\beta[\to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\int_a^\beta g(t)\,dt$ *converge et* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\right| \leq g(t)$ *pour tout* $t \in [a,\beta[$ *et* $x \in U$.

(c) *Pour tout* $x \in U$, *l'intégrale* $F(x) = \int_a^\beta f(t,x)\,dt$ *existe.*

Ou bien :

(c′) U *est connexe et l'intégrale* $F(c) = \int_a^\beta f(t,c)\,dt$ *existe pour un certain* $c \in U$.

Alors, pour tout $x \in U$, *l'intégrale* $F(x)$ *existe et pour tout* $i = 1,\dots,n$ *et* $x \in U$, *on a* $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x) = G_i(x)$. *Par conséquent,* F *est de classe* C^1 *sur* U.

Dans la section suivante, on donne des applications importantes des théorèmes précédents.

16. Convolution et équation de la chaleur

***Définition 16.1* (Convolution).** — Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$. On définit leur produit de convolution (ou convolée) $f * g$ par la formule :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

si cette intégrale existe. Dans ce cas, on a

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du. \tag{$\star$}$$

En effet, soient $a < 0 < b$. Le changement de variable $u = x - y$ donne

$$\int_0^b f(x-y)g(y)\,dy = -\int_x^{x-b} f(u)g(x-u)\,du = \int_{x-b}^{x} f(u)g(x-u)\,du$$
$$\int_a^0 f(x-y)g(y)\,dy = -\int_{x-a}^{x} f(u)g(x-u)\,du = \int_x^{x-a} f(u)g(x-u)\,du$$

et, par hypothèse, les membres de gauche convergent lorsque $b \to +\infty$ (resp. $a \to -\infty$), donc les termes de droite convergent aussi et l'on a l'égalité ($\star$). Ceci montre que le produit de convolution est *commutatif*, i.e. $f * g = g * f$ si l'un ou l'autre existe.

Proposition 16.2. — *On suppose* f *continue et bornée et* g *absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$. *Alors :*

(i) *Les intégrales* $(f * g)(x)$ *convergent uniformément pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Si de plus* g *est continue,* $f * g$ *l'est aussi.*

(iii) *Si de plus* g *est de classe* C^1 *et* g' *absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$, *alors les intégrales* $(f * g')(x)$ *convergent uniformément pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Par conséquent, on a* $(f * g)' = f * g'$ *et donc* $f * g$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Soit $C > 0$ tel que $|f(y)| \leq C$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout x, y on a $|f(x-y)g(y)| \leq C\,|g(y)|$. Le théorème 15.9 entraîne donc que les intégrales

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, et que $f * g$ est continue si g l'est puisque dans ce cas l'application $(y, x) \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue. Ceci prouve (i) et (ii).

Supposons maintenant g de classe C^1 et g' absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et introduisons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad (y, x) \mapsto f(y)g(x-y).$$

Noter que la dérivée partielle $\partial\varphi/\partial x$ existe et est continue : pour tout $(y, x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y, x) = f(y)g'(x-y).$$

D'autre part, d'après le point (i), les intégrales

$$(f * g')(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g'(y)\,dy$$

convergent uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $Y \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$(1) \qquad \left|\int_{-\infty}^{-Y} f(x-y)g'(y)\,dy\right| + \left|\int_{Y}^{+\infty} f(x-y)g'(y)\,dy\right| < \varepsilon.$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Posons $A = x_0 - Y - r$ et $B = x_0 + Y + r$. Pour tout $h \in [-r, r]$ on a :

$$\begin{cases} \text{si } u > B \text{ alors } x_0 + h - u < -Y \\ \text{si } u < A \text{ alors } x_0 + h - u > Y. \end{cases}$$

Tenant compte de (1), on en déduit que pour tout $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, on a :

$$(2) \qquad \left|\int_{B}^{+\infty} f(y)g'(x-y)\,dy\right| + \left|\int_{-\infty}^{A} f(y)g'(x-y)\,dy\right| < \varepsilon.$$

Ceci montre que les intégrales

$$(3) \qquad G(x) = (g' * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(y, x)\,dy$$

convergent localement uniformément sur $\mathbb{R}$.[7] Donc, d'après le théorème 15.8, l'application $f * g$ est dérivable, de dérivée $f * g'$; par conséquent elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. □

[7] La « difficulté » de cet argument, i.e. le fait que passer de $f*g'$ à $g'*f$ change la nature de la convergence (on passe de « uniforme » à « localement uniforme »), montre que l'intégrale de Riemann n'est pas le bon cadre pour traiter de la convolution. Le cadre naturel est celui de l'intégrale de Lebesgue, qui sera vue en L3.

On considère maintenant une barre métallique rectiligne « infiniment longue », modélisée par l'axe réel des $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la température de tout point x de la barre est donnée par une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. La température $F(x,t)$ de la barre au temps $t > 0$ doit vérifier *l'équation de la chaleur* :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t), \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,$$

où k est une certaine constante > 0 dépendant de la barre (appelée la diffusivité thermique), et la *condition initiale* :

$$\lim_{t\to 0^+} F(x,t) = v(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Pour simplifier l'écriture, prenons $k = 1$. (On peut s'y ramener par le changement de variable $t \mapsto t/k$.)

Proposition 16.3. — (i) *La fonction $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $K(x,t) = \dfrac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{t}}$ est solution de l'équation de la chaleur. De plus, pour tout $t > 0$ on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t)\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(ii) *La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)K(x-y,t)\,dy$$

est solution de l'équation de la chaleur et vérifie $\lim_{t\to 0^+} F(x,t) = v(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. — (i) On a $\dfrac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}\,\dfrac{-x}{2t}$ puis

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) = \frac{-1}{4t\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}\frac{x^2}{4t^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t).$$

Ceci prouve que K vérifie l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. D'autre part, pour $t > 0$ fixé et $a, b > 0$, le changement de variable $u = x/2\sqrt{t}$ donne

$$\int_{-a}^{b} K(x,t)\,dx = \int_{-a/2\sqrt{t}}^{b/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$$

et lorsque a et b tendent vers $+\infty$, ceci tend vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$.

Prouvons (ii). Ici, l'ensemble des paramètres est $U = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\}$ et l'on considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \qquad (y,x,t) \mapsto f(y,x,t) = v(y)K(x-y,t).$$

Soit C un réel > 0 tel que $|v(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons des réels $T > \delta > 0$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [\delta, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|K(x,t)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\delta}} e^{-x^2/4T} = M_0(x) \\
\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\right| &\leq \frac{1}{4\delta\sqrt{\delta}}\, x e^{-x^2/4T} = M_1(x) \\
\left|\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\right| &\leq \frac{1}{8\delta^2\sqrt{\delta}}\,(x^2+2\delta) e^{-x^2/4T} = M_2(x)
\end{aligned}$$

où les fonctions M_0, M_1, M_2 sont définies par les égalités précédentes. Ce sont des fonctions continues, absolument intégrables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(y,x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$g_0(y,x,t) = v(x-y)K(y,t), \qquad g_1(y,x,t) = v(x-y)\frac{\partial K}{\partial x}(y,t)$$
$$g_2(y,x,t) = v(x-y)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(y,t) = v(x-y)\frac{\partial K}{\partial t}(y,t).$$

Alors, pour tout $(y,x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [\delta, T]$, on a :

$$|g_0(y,x,t)| \leq CM_0(y), \qquad |g_1(y,x,t)| \leq CM_1(y), \qquad |g_2(y,x,t)| \leq CM_2(y).$$

D'après le théorème 15.9, ceci entraîne déjà que F est continue sur $\mathbb{R} \times [\delta, T]$. De plus, en procédant comme dans la démonstration de 16.2, ceci entraîne que les intégrales

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\frac{\partial K}{\partial x}(x-y,t)\,dy,$$
$$J(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x-y,t)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\frac{\partial K}{\partial t}(x-y,t)\,dy$$

convergent *localement uniformément* sur $\mathbb{R} \times [\delta, T]$. Ceci étant vrai pour tout $T > \delta > 0$, le théorème 15.8 entraîne que F est continue sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et y admet des dérivées partielles continues :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, I(x,t) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, J(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, F vérifie l'équation de la chaleur (et F est de classe C^1 sur U puisque $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial t$ sont continues).

Montrons enfin que F se prolonge en une fonction H continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et telle que $H(x,0) = v(x)$. Le produit de convolution étant commutatif, on a, pour tout $(x,t) \in U$:

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x-u) e^{-u^2/4t}\, \frac{du}{2\sqrt{t}}.$$

En effectuant le changement de variable $y = u/2\sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, on voit que F coïncide sur U avec la fonction H définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par :

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x - 2y\sqrt{t}) e^{-y^2}\, dy.$$

Comme la fonction $h(y,x,t) = v(x - 2y\sqrt{t})e^{-y^2}$ est majorée en valeur absolue par la fonction intégrable Ce^{-y^2}, il résulte du théorème 15.9 que H est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. De plus, pour $t = 0$ on a $h(y,x,0) = v(x)e^{-y^2}$ et donc

$$H(x,0) = \frac{v(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = v(x)$$

puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$. □

17. Transformées de Fourier et de Laplace

Dans cette section, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on notera $D(f)$ sa dérivée (si f est dérivable) et Pf l'application $x \mapsto xf(x)$. De façon précise, on introduit la notation ci-dessous.

Notation 17.1. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit V le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications $f : I \to \mathbb{C}$. Soit W_k le sous-espace vectoriel des applications k fois dérivables.

(a) Pour tout $f \in V$, on note $P(f)$ l'application $x \mapsto xf(x)$, et l'on note $P^2(f)$ l'application $P(P(f))$, i.e. $P^2(f)(x) = xP(f)(x) = x^2 f(x)$. Puis, pour tout entier $k \geq 2$, on pose $P^k(f) = P^{k-1}(P(f))$; alors $P^k(f)(x) = x^k f(x)$.

(b) Pour toute application $f \in W_1$, on note $D(f)$ sa dérivée. Pour tout $k \geq 2$, si $f \in W_k$ alors $D^k(f)$ désigne $D \circ \cdots \circ D$ (k fois) appliqué à f, c.-à-d. la dérivée k-ième $f^{(k)}$.

Pour définir et étudier la transformation de Laplace d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, on aura besoin de la notation suivante.

Notation 17.2. — Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note E_a l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in [A, +\infty[\qquad |f(x)| \leq Ce^{ax}.$$

C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, car si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si g est un élément de E_a vérifiant $|g(x)| \leq C_1 e^{ax}$ pour tout $x \geq A_1$, alors pour tout $x \geq \max(A, A_1)$ on a

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq \big(|\alpha|\, C + |\beta|\, C_1\big) e^{ax}.$$

Par ailleurs, si $a \leq b$ on a $e^{ax} \leq e^{bx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc $E_a \subset E_b$.

Enfin, on note $E_{>a}$ l'intersection des E_b, pour $b > a$, i.e. une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ appartient à $E_{>a}$ si et seulement si, pour tout $b > a$, il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in [A, +\infty[\qquad |f(x)| \leq Ce^{bx}.$$

Définition 17.3. — Pour tout $f \in E_{>a}$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ par

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale ci-dessus converge. Notons que $\mathscr{L}$ est une application linéaire, i.e. pour tout $f, g \in E_{>a}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathscr{L}(f) + \beta\mathscr{L}(g).$$

Proposition 17.4. — *Soit $f \in E_{>a}$.*

(i) *$\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]a, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $s \in]a, +\infty[$ on a*

$$D^k\mathscr{L}(f)(s) = (-1)^k\mathscr{L}P^k(f).$$

(ii) *Si f est de classe C^1, alors pour tout $s \in]a, +\infty[$ on a*

$$\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f)(s) - f(0).$$

(iii) *Si f est de classe C^2 et si f' appartient à $E_{>b}$ pour un certain $b \geq a$, alors pour tout $s \in]b, +\infty[$ on a*

$$\mathscr{L}(f'')(s) = s^2\mathscr{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Démonstration. — Notons d'abord que, pour tout $\delta > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-\delta x}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $(x, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, posons $h(x, s) = f(x)e^{-sx}$. Alors h est continue et admet une dérivée partielle continue

$$\frac{\partial h}{\partial s}(x, s) = -xf(x)e^{-sx}.$$

Fixons $\delta > 0$. Par hypothèse, il existe $A, C \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$(1) \qquad \forall x \in [A, +\infty[\qquad |f(x)| \leq Ce^{(a+\delta)x}.$$

D'autre part, on a $\lim_{x\to+\infty} xe^{-\delta x} = 0$, donc il existe $A_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq A_1$ on ait $x \leq e^{\delta x}$ et donc

$$(2) \qquad |xf(x)| \leq Ce^{(a+2\delta)x}.$$

Ceci prouve que Pf appartient à $E_{a+2\delta}$. Alors pour tout $x \geq \max(A, A_1)$ et $s \geq a + 3\delta$ on a

$$|f(x)e^{-sx}| \leq Ce^{-2\delta x} \qquad \text{et} \qquad |xf(x)e^{-sx}| \leq Ce^{-\delta x}.$$

Il découle donc des théorèmes 15.9 et 15.8 que l'application $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]a + 3\delta, +\infty[$, sa dérivée étant donnée par

$$D\mathscr{L}(f)(s) = -\int_0^{+\infty} xf(x)e^{-sx}\,dx.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, ceci montre que Pf appartient à $E_{>a}$ et que $\mathscr{L}(f)$ est de classe sur C^1 sur $]a, +\infty[$, sa dérivée étant donnée par $D\mathscr{L}(f) = -\mathscr{L}P(f)$. En procédant par récurrence sur k, le point (i) en découle.

Supposons de plus f de classe C^1. Fixons $s > a$. En intégrant par parties on a, pour tout $X > 0$:

$$(*) \qquad \int_0^X f'(x)e^{-sx}\,dx = \big[f(x)e^{-sx}\big]_0^X + s\int_0^X f(x)e^{-sx}\,dx.$$

Par hypothèse, il existe $C, A \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(x)| \leq Ce^{-sx}$ pour tout $x \geq A$ et donc pour tout $X \geq A$ on a $|f(X)e^{-sX}| \leq e^{(a-s)X}$. Par conséquent, en faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}\,dx = -f(0) + s\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

ce qui prouve (ii). Si de plus f est de classe C^2 et si $f' \in E_{>b}$ pour un certain $b \geq a$, alors le même argument montre que pour tout $s \in]b, +\infty[$ on a

$$\mathscr{L}(f'')(s) = s\mathscr{L}(f')(s) - f'(0) = s\big(s\mathscr{L}(f)(s) - f(0)\big) - f'(0) = s^2\mathscr{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

ce qui prouve (iii). En procédant par récurrence, on obtient ainsi que si f est de classe C^{n+1} et s'il existe des réels $a_n \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 = a$ tels que $f^{(k)} \in E_{>a_k}$ pour $k = 0, \ldots, n$, alors pour tout $s \in]a_n, +\infty[$ on a :

$$\mathscr{L}\big(f^{(n+1)}\big)(s) = s^{n+1}\mathscr{L}(f)(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - f^{(n)}(0).$$

$\square$

Exemples 17.5. — Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons e_z la fonction $x \mapsto e^{zx}$. Posant $a = \mathrm{Re}(z)$, on a $|e_z(x)| = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit ce qui suit :

(1) Pour tout $s > \mathrm{Re}(z)$, on a $\mathscr{L}(e_z)(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(z-s)x}\,dx = \left[\frac{e^{(z-s)x}}{z-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-z}$.

(2) Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathscr{L}(P^k e_a) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{s-a} = (-1)^k(-1)\cdots(-k)\frac{1}{(s-a)^{k+1}} = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}.$$

(3) Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\cos_b(x) = \cos(bx)$ et $\sin_b(x) = \sin(bx)$. Comme $\cos_b = (e_{ib} + e_{-ib})/2$ et $\sin_b = (e_{ib} - e_{-ib})/2i$ alors, par linéarité de $\mathscr{L}$ on obtient, pour tout $s > 0$:

$$\mathscr{L}(\cos_b)(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ib} + \frac{1}{s+ib}\right) = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathscr{L}(\sin_b)(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ib} - \frac{1}{s+ib}\right) = \frac{b}{s^2+b^2}$$

Soit f une fonction de classe C^1 dont la transformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ existe, notons-la u. D'après le point (ii) de la proposition 17.4, le fait de dériver f se traduit par l'opération $u \mapsto Pu - u(0)$. Ceci est utile pour résoudre des équations différentielles ou des systèmes d'équations différentielles. Avant de donner un exemple d'application, énonçons sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 17.6. — *La transformation de Laplace est injective, c.-à-d. si deux applications $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vérifient $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g)$ alors $f = g$.*

Exemple 17.7. — Changeons de notation et désignons maintenant par t la variable qui était précédemment désignée par x. Considérons alors le système différentiel ci-dessous :

$$(\star) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 5$ et $y(0) = 1$. Supposons que x et y possèdent des transformées de Laplace $u = \mathscr{L}(x)$ et $v = \mathscr{L}(y)$. Alors, notant par abus su la fonction $s \mapsto su(s)$ et de même pour sv, on obtient le système

$$\begin{cases} su - 5 = u + 3v \\ sv - 1 = 3u + v \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 3u = (s-1)v - 1 \\ 3v = (s-1)u - 5 \end{cases}$$

En multipliant la 2ème équation par 3 et remplaçant $3u$ par $(s-1)v - 1$, on obtient

$$9v = (s-1)^2 v - (s-1) - 15 = (s^2 - 2s + 1)v - s - 14.$$

Comme $s^2 - 2s - 8 = (s-4)(s+2)$, on obtient $v = \dfrac{s+14}{(s-4)(s+2)}$. De plus, on sait que cette fraction se décompose en somme « d'éléments simples » :

$$\frac{s+14}{(s-4)(s+2)} = \frac{a}{s-4} + \frac{b}{s+2} = \frac{(a+b)s + 2a - 4b}{(s-4)(s+2)}$$

ce qui donne $a + b = 1$ et $2a - 4b = 14$, d'où $6a = 18$, donc $a = 3$ et $b = -2$. On obtient donc que

$$\mathscr{L}(y) = v = \frac{3}{s-4} - \frac{2}{s+2} = \mathscr{L}(3e_4 - 2e_{-2})$$

d'où, comme $\mathscr{L}$ est injective, $y = 3e_4 - 2e_{-2}$. Reportant ceci dans le système différentiel initial, on obtient

$$3x = y' - y = 9e_4 + 6e_{-2}$$

d'où $x = 3e_4 + 2e_{-2}$. On vérifie alors que x et y sont bien solutions du système différentiel $(\star)$ et vérifient les conditions initiales $x(0) = 5$ et $y(0) = 1$.

Remarque 17.8. — On peut aussi résoudre le système différentiel $(\star)$ comme suit. Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Alors $(\star)$ s'écrit sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t), \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs et vecteurs propres de A. Son polynôme caractéristique est :

$$P_A(T) = T^2 - 2T - 8 = (T-4)(T+2)$$

donc ses valeurs propres sont 4 et -2. Les espaces propres correspondants sont

$$V_4 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-2} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons $\mathscr{B} = (v_4, v_{-2})$ la base formée des vecteurs propres ci-dessus. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc, posant

$$Y(t) = 2P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ x(t) - y(t) \end{pmatrix}$$

on obtient les égalités

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) + y'(t) \\ x'(t) - y'(t) \end{pmatrix} = 2P^{-1}X'(t) = 2P^{-1}AX(t)$$

et donc, comme $2X(t) = PY(t)$:

$$Y'(t) = DY(t).$$

On obtient donc les deux équations différentielles $(x+y)' = 4(x+y)$ et $(x-y)' = -2(x-y)$, avec les conditions initiales $(x+y)(0) = 5+1 = 6$ et $(x-y)(0) = 5-1 = 4$. Les solutions sont donc : $(x+y)(t) = 6e^{4t}$ et $(x-y)(t) = 4e^{-2t}$. On en déduit que

$$x(t) = 3e^{4t} + 2e^{-2t}, \qquad y(t) = 3e^{4t} - 2e^{-2t}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu via la transformation de Laplace.

Pour définir et étudier la transformation de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on aura besoin de la notation suivante.

Notation 17.9. — On note L^1_{cont} l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, i.e. telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

D'autre part, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note g_a la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ax^2}$ et G_a l'ensemble des fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $A, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$|x| \geq A \Longrightarrow |g(x)| \leq C g_a(x).$$

Comme g_a est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $G_a \subset L^1_{\text{cont}}$.

On note $G_{>0}$ la réunion des G_a, pour $a > 0$, i.e. une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient à $G_{>0}$ si et seulement si il existe $a, A, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$|x| \geq A \Longrightarrow |g(x)| \leq C g_a(x).$$

C'est un sous-espace vectoriel de L^1_{cont}, car si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f_1 \in G_{a_1}$ et $f_2 \in G_{a_2}$, alors il existe $A_1, A_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour $k = 1, 2$ on ait :

$$|x| \geq A_i \Longrightarrow |f_k(x)| \leq C_k \, g_{a_k}(x).$$

Posons $A = \max(A_1, A_2)$ et $a = \min(a_1, a_2)$, alors pour tout x tel que $|x| \geq A$ on a :

$$|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| \leq (\alpha C_1 + \beta C_2) g_a(x).$$

Définition 17.10. — Pour tout $f \in L^1_{\text{cont}}$, on définit sa transformée de Fourier $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$\mathscr{F}(f)(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\eta} \, dx$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 15.9, $\mathscr{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue, puisque, pour tout $\eta, x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)e^{-ix\eta}| = |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\mathscr{F}$ est une application linéaire, i.e. pour tout $f, g \in L^1_{\text{cont}}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathscr{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{F}(f) + \beta \mathscr{F}(g).$$

Proposition 17.11. — *Soit $f \in L^1_{cont}$.*

(i) *Si f est de classe et si $f' \in L^1_{cont}$, alors $\mathscr{F}(f') = iP\mathscr{F}(f)$, i.e. pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ on a : $\mathscr{F}(f')(\eta) = i\eta \mathscr{F}(f)(\eta)$.*

(ii) *Par conséquent, si f est de classe C^n et si $D^k(f) \in L^1_{cont}$ pour $k = 1, \ldots, n$, alors $\mathscr{F} D^k(f) = i^k P^k \mathscr{F}(f)$ pour $k = 1, \ldots, n$.*

(iii) *Si $P(f) \in L^1_{cont}$ alors $\mathscr{F}(f)$ est de classe C^1, de dérivée $D\mathscr{F}(f) = -i\mathscr{F} P(f)$. Par conséquent, si $P^n(f) \in L^1_{cont}$, alors $\mathscr{F}(f)$ est de classe C^n et $\mathscr{F} P^k(f) = i^k D^k \mathscr{F}(f)$ pour $k = 1, \ldots, n$.*

(iv) *Si $f \in G_{>0}$ alors $P^k(f) \in G_{>0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $\mathscr{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Supposons f de classe C^1 et $f' \in L^1_{\text{cont}}$. Alors, pour tout $x > 0$ on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) \, dt$$

donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers la limite $\ell = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) \, dt$. Comme $f \in L^1_{\text{cont}}$, il en résulte que $\ell = 0$ (cf. 15.2). On obtient de même que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in \mathbb{R}$ on a, en intégrant par parties :

$$\int_a^b f'(x) e^{-ix\eta} \, dx = \left[f(x) e^{-ix\eta} \right]_a^b + i\eta \int_a^b f(x) e^{ix\eta} \, dx$$

et, d'après ce qui précède, $f(b)e^{-ib\eta} - f(a)e^{-ia\eta}$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$ et a vers $-\infty$. Il en résulte que $\mathscr{F}(f')(\eta) = i\eta\mathscr{F}(f)(\eta)$, ce qui prouve (i). Ensuite, (ii) en découle immédiatement par récurrence.

Supposons $P(f) \in L^1_{\text{cont}}$. Comme, pour tous $x, \eta \in \mathbb{R}$ on a $|xf(x)e^{-ix\eta}| = |P(f)(x)|$, il découle du théorème 15.9 que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ix\eta}\,dx$ convergent uniformément pour $\eta \in \mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème 15.8, la fonction $\mathscr{F}(f)$ est dérivable, de dérivée

$$D\mathscr{F}(f)(\eta) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ix\eta}\,dx = -i\mathscr{F}P(f)(\eta).$$

Ceci s'écrit aussi $\mathscr{F}P(f) = iD\mathscr{F}(f)$. Supposons de plus $P^n(f) \in L^1_{\text{cont}}$ pour un certain entier $n > 0$. Comme, pour $k = 1, \ldots, n$ on a $|x^k f(x)| \leq |x^n f(x)|$ pour tout x tel que $|x| \geq 1$, on en déduit que $P^k(f) \in L^1_{\text{cont}}$ pour $k = 1, \ldots, n$ et l'on obtient par récurrence que $\mathscr{F}P^k(f) = i^k\mathscr{F}D^k(f)$ pour tout tel k. Ceci prouve (iii).

Enfin, supposons $f \in G_{>0}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe $a, A, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$|x| \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq Cg_a(x) = Ce^{-ax^2}.$$

Soit $\varepsilon \in \,]0, a[$. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} x^k e^{-\varepsilon x^2} = 0$, il existe $A_k > 0$ tel que $|x^k| \leq e^{\varepsilon x^2}$ pour tout x tel que $|x| \geq A_k$. Posant $B_k = \max(A, A_k)$, on a donc

$$|x^k f(x)| \leq Ce^{-(a-\varepsilon)x^2} = Cg_{a-\varepsilon}(x)$$

pour tout x tel que $|x| \geq B_k$. Ceci prouve que $P^k(f) \in G_{>0}$. Comme $G_{>0} \subset L^1_{\text{cont}}$ il découle alors de (iii) que $\mathscr{F}(f)$ est de classe C^∞, et vérifie $D^k\mathscr{F}(f) = (-i)^k\mathscr{F}P^k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Donnons un exemple de calcul de transformée de Fourier.

Proposition 17.12. — *Pour tout $a > 0$, on a $\mathscr{F}(g_a) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, g_{1/4a}$. De façon équivalente : $\mathscr{F}\big(\dfrac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, g_{1/4a}\big) = g_a$.*

Démonstration. — Notons que g_a vérifie l'équation différentielle $g_a'(x) = -2axg_a(x)$, i.e. $D(g_a) = -2aP(g_a)$. Appliquant $\mathscr{F}$ et utilisant la proposition précédente, on obtient :

$$iP\mathscr{F}(g_a) = \mathscr{F}F(g_a) = -2a\mathscr{F}P(g_a) = -2aiD\mathscr{F}(g_a).$$

Simplifiant par i, on obtient que $u_a = \mathscr{F}(g_a)$ vérifie l'équation différentielle

$$u_a'(\eta) = \frac{-\eta}{2a}u_a(\eta)$$

d'où $u_a(\eta) = C_a e^{-\eta^2/4a}$ pour une certaine constante C_a. Alors on a :

$$C_a = u_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

la dernière égalité été obtenue grâce au changement de variable $y = \sqrt{a}x$. Comme l'intégrale de Gauss vaut $\sqrt{\pi}$ on obtient $C_a = \sqrt{\pi/a}$. Ceci prouve la première égalité, et la seconde s'en déduit en remplaçant a par $1/4a$ et en divisant les deux membres par $C_{1/4a} = \sqrt{4a\pi}$. □

Avant d'appliquer la transformation de Fourier à l'étude de l'équation de la chaleur, énonçons sans démonstration le théorème suivant.

Théorème 17.13. — *Soit $f \in L^1_{cont}$.*

(i) *Si $\mathscr{F}(f) \in L^1_{cont}$ alors on a la formule d'inversion de Fourier :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(f)(\eta) e^{ix\eta}\, d\eta.$$

(ii) *La transformation de Fourier est injective, c.-à-d. si deux éléments f, g de L^1_{cont} vérifient $\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g)$ alors $f = g$.*

(iii) *Pour tout $g \in L^1_{cont}$ telle que $f * g \in L^1_{cont}$, on a $\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$, i.e. la transformation de Fourier transforme la convolution en produit.*

Remarque. — Les démonstrations de (i) et (iii) sont trop difficiles pour être données ici. Signalons simplement que (ii) est une conséquence de (i), car d'après les hypothèses $f - g$ appartient à L^1_{cont} ainsi que $\mathscr{F}(f - g) = 0$, donc d'après (i) on a $f = g$. Signalons aussi que la formule d'inversion de Fourier est utilisée pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace (théorème 17.6).

Exemple 17.14. — Expliquons maintenant comment la transformation de Fourier conduit à la solution de l'équation de la chaleur donnée en 16.3. Soit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, admettant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ des dérivées partielles vérifiant :

$$(1) \qquad \forall (x,t) \in U, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

et telle que $u(x, 0) = v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où v est une fonction continue. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on notera u_t la fonction $x \mapsto u(x,t)$.

Supposons que v appartienne à L^1_{cont} et qu'il existe $M, M_1, M_2 \in L^1_{\text{cont}}$ telles que :

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, & |u(x,t)| \leq M(x), \\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, & \left| \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| \leq M_1(x), \\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, & \left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right| = \left| \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| \leq M_2(x). \end{cases}$$

Pour tout $(\eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, posons

$$g(\eta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ix\eta}\, dx.$$

Alors la fonction g est bien définie et continue (pour chaque t c'est la transformée de Fourier de u_t) et admet sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ une dérivée partielle $\partial g / \partial t$ donnée par :

$$\forall (\eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(\eta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-ix\eta}\, dx$$

qui, pour chaque t fixé, est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto (\partial u/\partial t)(x,t)$. Par conséquent, appliquant pour chaque $t > 0$ la transformation de Fourier (par rapport à la variable x) à (1) on obtient que g vérifie :

$$(2) \qquad \forall (\eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad -\eta^2 g(\eta, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(\eta, t).$$

Ceci montre que, pour η fixé, la fonction $f_\eta : t \mapsto g(\eta, t)$ vérifie l'équation différentielle

$$f'_\eta(t) = -\eta^2 f_\eta(t)$$

d'où $f_\eta(t) = C(\eta)e^{-\eta^2 t}$, où $C(\eta)$ est un réel ne dépendant pas de t. On a donc

$$(3) \qquad \forall (\eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad g(\eta, t) = C(\eta)e^{-\eta^2 t}$$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ cette égalité est valable aussi pour $t = 0$, d'où

$$(4) \qquad C(\eta) = g(\eta, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-ix\eta}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)e^{-ix\eta}\, dx = \mathscr{F}(v)(\eta).$$

De plus, pour chaque $t > 0$ fixé, la fonction $g_t : \eta \mapsto e^{-t\eta^2}$ est, d'après la proposition 17.12, la transformée de Fourier de la fonction

$$h_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Combiné avec (3) et (4), ceci donne :

$$(5) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathscr{F}(u_t) = \mathscr{F}(v)\mathscr{F}(h_t).$$

D'après le théorème 17.13, on en déduit que chaque u_t est la convolée de v et de h_t, i.e.

$$(\star) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x-y)e^{-y^2/4t}\, dy$$

ce qui était la formule donnée en 16.3. On voit ainsi que la transformation de Fourier a conduit, sous l'hypothèse que v appartienne à L^1_{cont} et les hypothèses (†) sur la solution u, à la formule $(\star)$ ci-dessus. Ensuite on peut vérifier, comme on l'a fait dans la démonstration de la proposition 16.3, que cette formule donne bien une solution de l'équation de la chaleur vérifiant $u_0 = v$, en supposant seulement v continue et bornée.

18. L'inégalité d'Abel pour les intégrales

Théorème 18.1 **(L'inégalité d'Abel pour les intégrales)**

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f, u : [a,b] \to \mathbb{C}$ des fonctions intégrables (donc en particulier bornées). On suppose que :

(a) *f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et décroissante.*
(b) *Il existe $K \geq 0$ tel que $\left| \int_a^c u(x)\, dx \right| \leq K$ pour tout $c \in [a,b]$.*

Alors, posant $f(a+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, *on a :*

$$(*)\qquad \left|\int_a^c u(x)f(x)\,dx\right| \le Kf(a+).$$

Remarques 18.2. — (1) Comme f est décroissante, elle admet une limite à droite (resp. à gauche) en tout point $c \in [a,b[$ (resp. $d \in]a,b]$), notée $f(c+)$ (resp. $f(d-)$), et l'on a $f(c) \ge f(c+)$ (resp. $f(d) \ge f(d-)$). D'autre part, f est continue à droite en c (resp. à gauche en d) si et seulement si $f(c+) = f(c)$ (resp. $f(d) = f(d-)$).

(2) L'inégalité $(*)$ est *a fortiori* valable en remplaçant $f(a+)$ par $f(a)$, mais l'inégalité donnée est « meilleure » si $f(a+) < f(a)$, par exemple si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(0) = 2$ et $f(x) = 1 - x$ pour $x \in]0,1]$, auquel cas $f(0+) = 1$.

(3) Cette distinction entre $f(a)$ et $f(a+)$ est en fait une subtilité inutile, car les intégrales dans le membre de gauche de $(*)$ ne dépendent pas de la valeur de f au point a, donc sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) = f(a+)$, i.e. que f est continue à droite en a.

Démonstration. — Pour alléger l'écriture, on supposera que f est continue à droite en a, i.e. que $f(a+) = f(a)$. Fixons provisoirement une subdivision de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$

et posons $f_i = f(x_i)$ pour $i = 0,\dots,n+1$ et $u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(t)\,dt$ pour $i = 0,\dots,n$. Alors $f_0 \ge \cdots \ge f_{n+1} \ge 0$. D'après l'inégalité d'Abel, on a

$$(\dagger)\qquad \left|f_0\int_a^{x_1} u(t)\,dt + \cdots + f_n\int_{x_n}^{b} u(t)\,dt\right| \le Kf_0$$

puisque pour tout $p = 1,\dots,n$ on a

$$|u_0 + \cdots + u_p| = \left|\int_a^{x_{p+1}} u(t)\,dt\right| \le K.$$

Soit $\delta > 0$ et supposons les x_i choisis de sorte que $|x_{k+1} - x_k| \le \delta$ pour $k = 0,\dots,n$. Soit $M > 0$ tel que $|u(x)| \le M$ pour tout $x \in [a,b]$ (un tel M existe par hypothèse). On a

$$\int_a^b u(t)f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n} f_k\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f_k\big)u(t)\,dt$$

et comme $f_k \ge f(t) \ge f_{k+1}$ pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b u(t)f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n} f_k\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)\,dt\right| \le \sum_{k=0}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f_k - f_{k+1}\big)M\,dt &\le \delta M(f_0 - f_{n+1})\\ &\le \delta M f_0.\end{aligned}$$

Combiné avec $(\dagger)$, ceci entraîne

$$\left|\int_a^b u(t)f(t)\,dt\right| \le (K + \delta M)f_0$$

et comme $\delta > 0$ est arbitraire, on obtient le résultat voulu. □

Remarque. — On peut démontrer de la même façon la « 2ème formule de la moyenne », voir par exemple [**Delab16**], Th. 5.1.3 ou [**LFA**], §X.13 (dans cette seconde référence, on voit côte-à-côte la 1ère et la 2ème formule de la moyenne, et l'on comprend mieux la terminologie).

Plaçons-nous désormais dans le cadre indiqué au début de la section 15 : soit $I = [a, \beta[$, où β est un réel $> a$ ou bien $+\infty$, et soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 18.3 **(Règle de Dirichlet pour les intégrales)**
Soient $u : I \times U \to \mathbb{C}$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}_+$ des fonctions ayant les propriétés suivantes.

(1) *Pour chaque $x \in U$, les fonctions $t \mapsto u(t, x)$ et $t \mapsto f(t, x)$ sont localement intégrables sur I.*
(2) *Il existe un réel $K > 0$ tel que*

$$\left| \int_a^b u(t, x)\, dt \right| \leq K$$

pour tout $b \in I$ et $x \in U$.
(3) *Pour chaque $x \in U$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est décroissante et tend vers 0 de façon uniforme en x quand t tend vers β, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $b \in I$ tel que $0 \leq f(t, x) < \varepsilon$ pour tout $t \in [b, \beta[$ et $x \in U$.*

Alors les intégrales $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta u(t, x) f(t, x)\, dt$ convergent uniformément sur U. Par conséquent, si f et u sont continues, il en est de même de F.

Démonstration. — Pour tous $c \geq b$ dans I et $x \in U$, on a $\displaystyle\int_b^c u(t, x)\, dt = \int_a^c u(t, x)\, dt - \int_a^b u(t, x)\, dt$ et donc $\left| \displaystyle\int_b^c u(t, x)\, dt \right| \leq 2K$. D'après le théorème précédent, on a donc

$$\left| \int_b^c u(t, x) f(t, x)\, dt \right| \leq 2K f(b, x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse (c), il existe $b_0 \in I$ tel que $0 \leq f(b, x) < \varepsilon/2K$ pour tout $x \in U$ et $b \in [b_0, \beta[$. Alors, pour tous $c \geq b$ dans $[b_0, \beta[$ et $x \in U$, on a

$$\left| \int_b^c u(t, x) f(t, x)\, dt \right| < \varepsilon.$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 15.9, on en déduit que chaque intégrale $F(x) = \displaystyle\int_a^\beta u(t, x) f(t, x)\, dt$ existe et que les intégrales $F(x)$ convergent uniformément sur U. $\square$

Exemple 18.4. — Montrons que « l'intégrale de Dirichlet » $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ existe et déterminons sa valeur.

D'abord, la fonction $g : x \mapsto \sin(x)/x$ se prolonge par continuité en 0 donc la fonction $h : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $(x, s) \mapsto e^{-sx}g(x)$ est continue et donc, d'après la proposition 13.1, la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$I(x) = \int_0^1 g(x)e^{-sx}\,dx$$

est continue.

Considérons maintenant les applications $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définies par $u(x, s) = \sin(x)$ et $f(x, s) = e^{-sx}/x$. Elles sont continues et pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ l'application $x \mapsto f(x, s)$ est décroissante et l'on a $0 \le f(x, s) \le 1/x$, donc $f(x, s)$ tend vers 0 de façon uniforme en s quand x tend vers $+\infty$. Donc, d'après le théorème précédent, les intégrales

$$J(s) = \int_1^{+\infty} \sin(x)\frac{e^{-sx}}{x}\,dx$$

convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, l'application $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(s) = I(s) + J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}e^{-sx}\,dx$$

est **continue**.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $\sin(x) \le x$ et donc $g(x) \le 1$. La transformée de Laplace $\mathscr{L}(g)$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et F coïncide avec $\mathscr{L}(g)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En d'autres termes, la transformée de Laplace de g, a priori définie sur $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge en l'application continue $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

D'après la proposition 17.4 et les exemples 17.5, on a

$$D\mathscr{L}(g)(s) = -\mathscr{L}(Pg)(s) = -\mathscr{L}(\sin)(s) = \frac{-1}{1+s^2}$$

pour tout $s > 0$. Il existe donc un réel C tel que

$$F(s) = C - \operatorname{Arctan}(s)$$

pour tout $s > 0$, et aussi pour $s = 0$ puisque F est continue en 0.

Pour déterminer C, montrons que $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha = \varepsilon/2$. Comme $e^{-sx}g(x) \le 1$ pour tous $x, s \ge 0$, on a

(1) $$\left|\int_0^\alpha g(x)e^{-sx}\,dx\right| \le \alpha = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $\int_a^b \sin(x)\,dx = \cos(a) - \cos(b)$ est majoré en valeur absolue par 2 pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'inégalité d'Abel pour les intégrales donne, pour tout $X \ge \alpha$:

(2) $$\left|\int_\alpha^X \sin(x)\frac{e^{-sx}}{x}\,dx\right| \le 2\frac{e^{-s\alpha}}{\alpha}.$$

Comme $e^{-s\alpha}/\alpha$ tend vers 0 quand s tend vers $+\infty$, il existe $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $s \ge s_0$ on ait $e^{-s\alpha}/\alpha \le \varepsilon/4$. Pour tout tel s on a donc $|F(s)| \le \varepsilon$, d'après (1) et (2). Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(s) = \dfrac{\pi}{2}$, il en résulte que $C = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 18.5. — Soit $x > 0$. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$\int_0^T \frac{\sin(xt)}{t}\, dt = \int_0^{xT} \frac{\sin(u)}{u}\, du.$$

Faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$. La fonction sin étant impaire, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt = \frac{-\pi}{2}$ pour tout $x < 0$. Ainsi, la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\, dt$$

vérifie $F(x) = \pi/2$ si $x > 0$, $F(0) = 0$ et $F(x) = -\pi/2$ si $x < 0$. Elle n'est donc pas continue en 0. Il en résulte que les intégrales précédentes ne convergent pas uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, ni pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Références citées dans ce chapitre :

[Chem16] Sophie Chemla, Notes de cours 2M260 (2016-17), disponible sur la page de l'auteure.

[Delab10] Sylvie Delabrière, polycopié de LM260 (Séries et intégrales), cours de L2 à l'UPMC, 2010-2014, disponible à l'adresse : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/

[Delab16] Sylvie Delabrière, Introduction aux suites, aux intégrales et à l'algèbre linéaire en L1, Ellipses, 2016.

[LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 2 Analyse (4^e édition), Dunod, 1977.

[Po16] Patrick Polo, polycopié de l'UE d'été 2M216, cours de L2 à l'UPMC, mai 2016, disponible sur la page de l'auteur.