CHAPITRE 5

SÉRIES DE FOURIER

19. Motivation : équation de la chaleur dans une barre

[(1)] On considère une barre rectiligne de longueur L, représentée par le segment $[0, L]$. On suppose que la température initiale est donnée par une fonction continue $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ et qu'au cours du temps les extrémités sont maintenues à une température constante, disons 0 (donc $f(0) = 0 = f(L)$). On admet que la température au cours du temps est donnée par une fonction continue $u : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x, t)$, qui vérifie les trois conditions suivantes.

(a) Elle admet sur $]0, L[\times \mathbb{R}_+^*$ des dérivées partielles vérifiant l'équation de la chaleur :

$$(E) \qquad \forall (x, t) \in \,]0, L[\times \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

où k est une certaine constante > 0 (dépendant du matériau). Pour alléger l'écriture, on prendra $k = 1$.

(b) Elle vérifie les « conditions au bord » ci-dessous :

$$(B) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u(0, t) = 0 = u(L, t).$$

(c) Elle vérifie la « condition initiale » ci-dessous :

$$(I) \qquad \forall x \in [0, L], \qquad u(x, 0) = f(x).$$

Remarquons que les conditions (E) et (B) sont linéaires, i.e. si u_1 et u_2 vérifient (E) et (B) alors il en est de même de $au_1 + bu_2$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Cherchons d'abord des solutions à $(E + B)$, et cherchons-les sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$, avec X, T non identiquement nulles.[(2)] Alors (E) donne pour tout (x, t) :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Comme X et T ne sont pas identiquement nulles, il existe x_0 et t_0 tels que $X(x_0) \neq 0$ et $T(t_0) \neq 0$ et donc, par continuité, X (resp. T) reste non nulle sur un intervalle I (resp. J)

[(1)] V. du 16/4/17 : +2 dans la pagination en raison des ajouts dans le Chap. 5.

[(2)] On ne sait pas *a priori* s'il existe de telles solutions, mais on va voir que oui.

contenant x_0 (resp. t_0). Alors, on a :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \qquad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Notons $q(x,t)$ le rapport précédent. En considérant le terme de gauche (resp. de droite), on voit que $q(x,t)$ ne dépend pas de x (resp. de t) ; c'est donc une constante λ. On obtient donc que X et T sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$(\diamondsuit) \qquad X''(x) = \lambda X(x), \qquad T'(t) = \lambda T(t).$$

Résolvons l'équation différentielle $X'' = \lambda X$, en distinguant trois cas selon le signe de λ.

(1) Si $\lambda > 0$, notons e_μ l'application $x \mapsto e^{\mu x}$, où $\mu = \sqrt{\lambda}$, et définissons de même $e_{-\mu}$. Alors toute solution est de la forme $ae_\mu + be_{-\mu}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Les conditions $0 = u(0,t) = u(L,t)$ entraînent alors :

$$\begin{cases} 0 = X(0) = a + b \\ 0 = X(L) = ae^{\mu L} + be^{-\mu L} \end{cases}$$

d'où $b = -a$ et $0 = a(e^{\mu L} - e^{-\mu L})$ d'où $a = 0 = b$ et $X = 0$, ce qui est exclu.

(2) Si $\lambda = 0$, les solutions sont de la forme $X(x) = ax + b$, et comme plus haut les conditions $0 = X(0) = X(L)$ entraînent $b = 0 = a$, ce qui est exclu.

(3) Si $\lambda < 0$, notons $\cos_\omega$ l'application $x \mapsto \cos(\omega x)$, où $\omega = \sqrt{-\lambda}$, et définissons de même $\sin_\omega$. Alors toute solution est de la forme $a\cos_\omega + b\sin_\omega$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. La condition $X(0) = 0$ donne $a = 0$ et alors la condition :

$$0 = X(L) = b\sin(\omega L)$$

avec $b \neq 0$ et $\omega, L > 0$, donne qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega L = n\pi$, d'où

$$\lambda = -\omega^2 = -n^2(\pi/L)^2.$$

D'autre part, l'équation différentielle $T' = \lambda T$ donne $T(t) = ke^{\lambda t}$, pour un certain $k \in \mathbb{R}^*$. Prenant $b = 1 = k$, on obtient donc que la fonction

$$u_n : (x,t) \mapsto \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\exp\left(-n^2\frac{\pi^2}{L^2}t\right) \tag{$\dagger$}$$

est solution de $(E + B)$.

Donc, par linéarité, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u = \sum_{n=1}^{N} b_n u_n$$

est solution de $(E + B)$. Sa valeur en $t = 0$ est donnée par :

$$\forall x \in [0, L], \qquad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

Pour supprimer les facteurs π/L dans ($\dagger$) et ci-dessus, on peut se ramener, en faisant un changement d'unité de longueur, au cas où $L = \pi$. Ceci conduit à se demander, à la suite de Fourier, si pour toute fonction continue $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, il existe une suite (b_n) de réels tels que :

$$(*) \qquad \forall x \in [0, \pi], \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Au lieu de supposer que les extrémités sont maintenues à température constante, supposons maintenant qu'elles sont isolées, i.e. qu'on a, en conservant l'hypothèse $L = \pi$:

$$(B') \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t)$$

(et que f est dérivable, avec $f'(0) = 0 = f'(\pi)$). Cherchant encore une solution de $(E+B')$ sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$, on obtient à nouveau les équations différentielles $(\diamondsuit)$. Les conditions au bord $X'(0) = 0 = X'(\pi)$ excluent, comme avant, le cas $\lambda > 0$, mais autorisent le cas $\lambda = 0$, qui donne X constant ainsi que T. Pour $\lambda = -\omega^2 < 0$, la condition (B') entraîne que $X = a \cos_\omega$ et $\omega = n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$, la fonction u définie par

$$(\ddagger) \qquad u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \exp(-n^2 t)$$

est solution de $(E + B')$, et sa valeur en 0 est donnée par :

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

Ceci conduit à se demander si pour toute fonction dérivable $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ telle que $f'(0) = f'(\pi) = 0$, il existe une suite (a_n) de réels tels que :

$$(**) \qquad \forall x \in [0, \pi], \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Enfin, au lieu d'une barre rectiligne considérons un anneau circulaire (par exemple un joint entourant une cuve cylindrique) et repérons chaque point de cet anneau par sa coordonnée angulaire x (définie modulo 2π). Alors on a encore l'équation de la chaleur (E), la condition initiale (I) est donnée par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique, et l'on cherche une solution $u(x, t) = X(x)T(t)$ telle que X soit 2π-périodique. On arrive encore aux équations différentielles $(\diamondsuit)$, et la condition que X soit 2π-périodique entraîne que $\lambda = 0$ ou $\lambda = -n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne comme solutions la fonction constante 1 et les fonctions u_n et v_n définies par :

$$u_n(x, t) = \cos(nx) \exp(-n^2 t), \qquad v_n(x, t) = \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

Par linéarité, pour tous $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u : (x, t) \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) e^{-n^2 t}$$

est solution de (E), et sa valeur en $t = 0$ est donnée par

$$(\star) \qquad \forall x \in [0, 2\pi], \qquad u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

On est ainsi conduit à se demander si toute fonction continue 2π-périodique f peut s'écrire comme la somme d'une série trigonométrique, i.e. s'il existe des suites de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{\geq 1}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$(***) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

On va voir que la réponse est oui si f est de classe C^1. Attention, pour des raisons qui seront expliquées plus bas, le terme constant est en général noté $a_0/2$ au lieu de a_0.

20. Coefficients de Fourier et inégalité de Bessel

Définition 20.1. — Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par $C^0([a, b], \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. Pour abréger, notons-le $V_{\mathbb{K}}$. Pour $f, g \in V_{\mathbb{K}}$, on pose

$$(\star) \qquad (f \mid g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, dt,$$

où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe. (Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a donc $\overline{f(t)} = f(t)$ pour tout t.) Ceci définit une application $V_{\mathbb{K}} \times V_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$, $(f, g) \mapsto (f \mid g)$, qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

(1) Cette application est linéaire en la seconde variable, i.e. pour $f, g, h \in V_{\mathbb{K}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(f \mid \lambda g + \mu h) = \lambda (f \mid g) + \mu (f \mid h).$$

(2) Cette application est *semi-linéaire* (relativement à la conjugaison complexe) en la première variable, i.e. pour $f, g, h \in V_{\mathbb{K}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(\lambda g + \mu h \mid f) = \overline{\lambda} (g \mid f) + \overline{\mu} (h \mid f).$$

En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ceci signifie simplement que l'application est $\mathbb{R}$-linéaire en la première variable.

(3) Pour tout $f, g \in E_{\mathbb{K}}$, on a $(g \mid f) = \overline{(f \mid g)}$.

(4) Si $f \neq 0$, alors $(f \mid f) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\, dt$ est > 0.

Signalons que le facteur $1/(b-a)$ est mis dans la définition $(\star)$ pour que l'on ait $(\mathbf{1} \mid \mathbf{1}) = 1$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante sur $[a, b]$ de valeur 1.

Désormais, on prend $[a, b] = [0, 2\pi]$. Pour abréger, désignons cet intervalle par I.

Notation 20.2. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on note e_n l'application $I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$. Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ on note $\cos_p$ (resp. $\sin_q$) l'application $I \to \mathbb{R}$ qui envoie t sur $\cos(pt)$ (resp. $\sin(qt)$). Noter que $e_0 = \cos_0$ est la fonction constante $\mathbf{1}$, que $\cos_{-p} = \cos_p$ et $\sin_{-p} = -\sin_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et que $\sin_0$ est la fonction nulle.

Proposition 20.3. — (1) *Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$(e_p \mid e_q) = \begin{cases} 1 & \textit{si } p = q; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(2) *Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a* $(\cos_p \mid \sin_q) = 0$ *et*

$$(\sin_p \mid \sin_q) = \begin{cases} 1/2 & \textit{si } p = q \neq 0; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \qquad (\cos_p \mid \cos_q) = \begin{cases} 1 & \textit{si } p = q = 0 \\ 1/2 & \textit{si } p = q \neq 0; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — (1) On a :

$$(e_p \mid e_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)t}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q; \\ \left[\dfrac{e^{i(q-p)t}}{q-p} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Ceci prouve (1). Prouvons (2). On a $\cos_0 = e_0$ et pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\cos_p = \frac{e_p + e_{-p}}{2}, \qquad \sin_q = \frac{e_q - e_{-q}}{2i}.$$

On déduit de (1) que $(e_0 \mid e_0) = 1$ et $(e_0 \mid \cos_p) = 0 = (e_0 \mid \sin_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et, en tenant compte de la linéarité (resp. semi-linéarité) en la seconde (resp. première) variable, que pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(\cos_p \mid \sin_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{1}{4i}(1-1) = 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

$$(\cos_p \mid \cos_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{1}{4}(1+1) = \dfrac{1}{2} & \text{si } p = q \end{cases} \qquad (\sin_p \mid \sin_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{1}{4}(1+1) = \dfrac{1}{2} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Ceci prouve (2). □

Le point (1) de la proposition précédente fait penser à la notion de famille orthonormée dans $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire standard. C'est effectivement une situation analogue, comme on va le voir.

***Définitions 20.4* (Espaces euclidiens)**. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **forme bilinéaire symétrique** sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Elle est « symétrique », c.-à-d. $\phi(y, x) = \phi(x, y)$ pour tout $x, y \in E$.

(2) Elle est linéaire en la seconde variable, i.e. pour $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x, y) + \mu\phi(x, z).$$

(3) Noter que (1) et (2) entraînent que ϕ est également linéaire en la première variable.

On dit que ϕ est *positive* si $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout x, et que ϕ est **définie positive** si $\phi(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. (3)

Si ϕ est définie positive, on dit que c'est un produit scalaire euclidien sur E et l'on dit que E, muni de ϕ, est un **espace euclidien**. On pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$$

et l'on dit que c'est la **norme** de x (relativement au produit scalaire ϕ). Noter que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a $\phi(\mu x, \mu x) = \mu^2\phi(x, x)$ et donc $\|\mu x\| = |\mu|\,\|x\|$.

Enfin, lorsque ϕ est un produit scalaire euclidien sur E, on désigne souvent $\phi(x, y)$ par $(x \mid y)$.

Deux exemples importants sont les suivants

Exemples 20.5. — (1) $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard : si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, alors

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(2) L'espace vectoriel $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire euclidien défini, pour tout $f, g \in E$, par :

$$(\star) \qquad (f \mid g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Ceci est bien symétrique et linéaire en chaque variable et, pour tout $f \in E$ non nulle, la fonction $t \mapsto f(t)^2$ est continue, positive et non identiquement nulle, donc on a

$$(f \mid f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)^2\,dt > 0.$$

Sur $\mathbb{C}^n$, la fonction $z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n z_i^2$ n'est pas positive, mais $z \mapsto \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ l'est. Ceci conduit à introduire les définitions suivantes.

***Définitions 20.6* (Espaces hilbertiens).** — Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une **forme hermitienne** sur V est une application $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Elle vérifie $\phi(v, u) = \overline{\phi(u, v)}$ pour tout $u, v \in V$, où $z \mapsto \overline{z}$ désigne la conjugaison complexe.

(2) Elle est linéaire en la seconde variable, i.e. pour $u, v, w \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\phi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda\phi(u, v) + \mu\phi(u, w).$$

(3) Noter que, par linéarité, on a $\phi(0, y) = 0$ pour tout y, d'où en particulier $\phi(0, 0) = 0$.

(3) Elle est *semi-linéaire* (relativement à la conjugaison complexe) en la première variable, i.e. pour $u, v, w \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a : [4]

$$\phi(\lambda v + \mu w, u) = \overline{\lambda}\phi(v, u) + \overline{\mu}\phi(w, u).$$

On dit que ϕ est *positive* si $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout x, et que ϕ est **définie positive** si $\phi(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Si ϕ est définie positive, on dit que c'est un produit scalaire *hilbertien* sur V et l'on dit que V, muni de ϕ, est un **espace hilbertien**. On pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$$

et l'on dit que c'est la **norme** de x (relativement au produit scalaire ϕ). Noter que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\phi(\mu x, \mu x) = \overline{\mu}\mu\phi(x, x) = |\mu|^2\phi(x, x)$$

et donc $\|\mu x\| = |\mu|\ \|x\|$.

Enfin, lorsque ϕ est un produit scalaire hilbertien sur V, on désigne souvent $\phi(x, y)$ par $(x \mid y)$.

Deux exemples importants sont les suivants

Exemples 20.7. — (1) $V = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hilbertien standard : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, alors

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i.$$

(2) L'espace vectoriel $V = C^0([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire hilbertien défini, pour tout $f, g \in V$, par :

$$(f \mid g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\, dt. \tag{$\star$}$$

Ceci vérifie bien la « symétrie hermitienne » : $(g \mid f) = \overline{(f \mid g)}$ et est linéaire (resp. semi-linéaire) en la seconde (resp. première) variable. De plus, pour tout $f \in V$ non nulle, la fonction $t \mapsto |f(t)|^2$ est continue, positive et non identiquement nulle, donc on a

$$(f \mid f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2\, dt > 0.$$

La théorie des espaces hilbertiens est tout-à-fait analogue à celle, plus familière, des espaces euclidiens. Énonçons quelques résultats dont nous aurons besoin. (Ces résultats seront aussi vus en 2M271 ou 3M271.)

***Définitions 20.8* (Orthogonalité)**. — Soit V un espace euclidien ou hilbertien.

[4] Noter que ceci découle déjà de (1) et (2).

(1) On dit que deux vecteurs $u, v \in V$ sont orthogonaux si $(u \mid v) = 0$, ce qui équivaut à $(v \mid u) = 0$.

(2) Si A est une partie de V, son orthogonal $A^\perp$ est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les éléments de A, i.e.

$$A^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in A, \quad (u \mid v) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de V.

(3) On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs non nuls est une famille **orthogonale** si l'on a $(e_i \mid e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Si de plus chaque e_i est de norme 1, i.e. si $(e_i \mid e_i) = 1$, on dit que c'est une famille **orthonormée**.

Proposition 20.9. — *Soit V un espace euclidien ou hilbertien. Toute famille orthogonale $(e_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante.*

Démonstration. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \dots, i_n$ des éléments arbitraires de I et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires. Supposons que

$$v = \mu_1 e_{i_1} + \cdots + \mu_n e_{i_n}$$

soit nul ; alors pour tout $k = 1, \dots, n$ on a $0 = (e_{i_k} \mid v) = \mu_k \|e_{i_k}\|^2$ et comme $\|e_{i_k}\|^2 > 0$ ceci donne $\mu_k = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante. □

Proposition 20.10. — *Tout espace euclidien ou hilbertien de dimension finie n admet une base orthonormée.*

Démonstration. — Voir 2M271 ou 3M271. □

***Théorème 20.11* (Projection orthogonale)**. — *Soit V un espace euclidien ou hermitien et W un sous-espace* de dimension finie.

(1) *Pour tout $v \in V$, il existe un unique $w_0 \in W$ tel que $v - w_0 \in W^\perp$.*
(2) *Par conséquent, on a $V = W \oplus W^\perp$.*
(3) *On dit que w_0 est la projection orthogonale de v sur W et on le notera $\pi_W(v)$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de W. Pour tout $v \in V$, posons

$$\pi(v) = \pi_W(v) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid v) e_i.$$

C'est un élément de W. De plus, pour tout $k = 1, \dots, n$ on a, puisque $(e_k \mid e_i) = 1$ si $k = i$ et $= 0$ sinon :

$$(e_k \mid \pi(v)) = \sum_{i=1}^n (e_i \mid v)(e_k \mid e_i) = (e_k \mid v).$$

Par conséquent, on a $(e_k \mid v - \pi(v)) = 0$ d'où $(v - \pi(v) \mid e_k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$, donc par linéarité en la seconde variable on obtient que $v - \pi(v)$ est orthogonal à tout élément de W, i.e. appartient à $W^{\perp}$. Ceci prouve déjà l'existence dans (1). Et, comme

$$v = \pi(v) + v - \pi(v)$$

avec $\pi(v) \in W$ et $v - \pi(v) \in W^{\perp}$, ceci montre que $W + W^{\perp} = V$. De plus, si $x \in W \cap W^{\perp}$, on a $(x \mid x) = 0$, d'où $x = 0$. Ceci montre que W et $W^{\perp}$ sont en somme directe, d'où (2). L'unicité dans (1) en découle : si $w_0 \in W$ est tel que $v - w_0 \in W^{\perp}$ alors l'égalité $v = w_0 + (v - w_0) = \pi(v) + \big(v - \pi(v)\big)$ entraîne $w_0 = \pi(v)$. □

***Remarque 20.12* (importante).** — Si l'on prend une base $(f_1, \dots, f_n)$ de W qui est orthogonale mais pas nécessairement orthonormée (i.e. les f_i ne sont pas forcément de norme 1), on obtient comme dans la démonstration précédente que

$$(\heartsuit) \qquad \pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i \mid v)}{(f_i \mid f_i)} f_i.$$

***Proposition 20.13* (Théorème de Pythagore).** — *Dans un espace euclidien ou hilbertien V, soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs deux-à-deux orthogonaux. Alors*

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$$

Démonstration. — Pour $n = 2$, on a

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2 \mid v_1 + v_2) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + (v_1 \mid v_2) + (v_2 \mid v_1)$$

et, par hypothèse, chacun des deux derniers termes est nul, d'où le résultat pour $n = 2$. Le cas général s'obtient alors facilement par récurrence sur n. □

***Corollaire 20.14*.** — *Soit V un espace euclidien ou hermitien, soient $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormée et W le sous-espace de dimension n qu'elle engendre. Alors, pour tout $v \in V$ on a :*

$$(\spadesuit) \qquad \|v\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |(e_i \mid v)|^2$$

En particulier, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(e_i \mid v)|^2 \leq \|v\|^2$.

Démonstration. — D'après la formule donnant $\pi_W(v)$ et le théorème de Pythagore, on a

$$\|v\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|(e_i \mid v)e_i\|^2.$$

De plus, comme chaque e_i est de norme 1, on a $\|(e_i \mid v)e_i\|^2 = |(e_i \mid v)|^2$. La proposition en découle. □

Venons-en maintenant aux séries de Fourier. Soit $V = C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire hilbertien défini par

$$(\star) \qquad (f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$

Alors V contient les fonctions e_n, $\cos_p$ et $\sin_q$ introduites en 20.2. D'après la proposition 20.3, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, donc linéairement indépendante, et la famille $(\cos_p)_{p\in\mathbb{N}} \cup (\sin_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale, donc linéairement indépendante.

Notation 20.15. — Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons W_N le sous-espace vectoriel de V engendré par les e_k, pour $k \in [-N,N]$. Il est de dimension $2N+1$ et $(e_0, e_1, e_{-1}, \dots, e_N, e_{-N})$ en est une base orthonormée. De plus, comme $e_k = \cos_k + i\sin_k$, alors W_N est aussi engendré par la famille $(\cos_0, \cos_1, \sin_1, \dots, \cos_N, \sin_N)$, qui en forme une base orthogonale.

Pour tout $f \in V$, on notera $\pi_N(f)$ sa projection orthogonale sur W_N.

***Définition 20.16* (Coefficients de Fourier)**. — Soit $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$; on définit ses coefficients de Fourier (de type « exponentielle complexe » ou bien « cosinus et sinus ») comme suit.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f)e_n$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{C}e_n$, i.e. on a

$$c_n(f) = (e_n \mid f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$(F_c) \qquad \pi_N(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\big(c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\big).$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f)\cos_n$ (resp. $b_n(f)\sin_n$) est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{C}\cos_n$ (resp. $\mathbb{C}\sin_n$). Par conséquent, d'après la remarque 20.12, on a :

$$a_n(f) = \frac{(\cos_n \mid f)}{(\cos_n \mid \cos_n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$b_n(f) = \frac{(\sin_n \mid f)}{(\sin_n \mid \sin_n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Comme $2\cos_n = e_n + e_{-n}$ et $2i\sin_n = e_n - e_{-n}$ on obtient ainsi les relations

$$(\heartsuit) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{a_n = c_n + c_{-n}} \qquad \boxed{b_n = i(c_n - c_{-n})}$$

On pose aussi $a_0 = 2c_0$, d'où $c_0 = a_0/2$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$(F_{a,b}) \qquad \pi_N(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n(f)\cos_n + b_n(f)\sin_n\big).$$

Une autre explication pour l'écriture $a_0/2$ est la suivante : pour le produit scalaire hilbertien ϕ égal au double du précédent, c.-à-d. défini par

$$\phi(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt$$

la famille $(\cos_n, \sin_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormée, tandis que $\mathbf{1} = \cos_0$ est de norme au carré égale à 2. Par conséquent, si l'on définit $a_0(f)$ par $\phi(\cos_0, f)$, alors la projection orthogonale de f sur $\mathbb{C}\cos_0$ est $\dfrac{a_0(f)}{2}\cos_0$. Quoiqu'il en soit, il faut se souvenir que dans la formule $(F_{a,b})$ le terme constant est noté $\dfrac{a_0(f)}{2}$!

(3) Noter que si f est à valeurs réelles, alors les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels.

Définition 20.17. — Pour $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, la série de fonctions $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_N(f) = \pi_N(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \big(c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\big) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n(f)\cos_n + b_n(f)\sin_n\big)$$

s'appelle la **série de Fourier** de f.

Plus généralement, pour des suites numériques arbitraires $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la série de fonctions (T_N) définie par $T_N = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos_n + b_n \sin_n\big)$ s'appelle une **série trigonométrique**. En posant $c_n = (a_n - ib_n)/2$ et $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$, on peut aussi l'écrire $T_N = c_0 + \sum_{n=1}^{N} \big(c_n e_n + c_{-n}e_{-n}\big)$.

On déduit du corollaire 20.14 (et du fait que la norme au carré de $\cos_n$ et $\sin_n$ vaut 1/2) la proposition suivante.

***Proposition 20.18* (Inégalité de Bessel)**. — *Pour tout $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, la norme au carré de $\pi_N(f)$ est égale à*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} \Big(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\Big) = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big).$$

Ceci est égal à $\|f\|^2 - \|f - \pi_N(f)\|^2$, qui est $\leq \|f\|^2$.

Par conséquent, la série de terme général $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$, resp. $(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)/2$, est convergente.

Remarque 20.19. — La proposition précédente donne une condition nécessaire pour qu'une série trigonométrique arbitraire soit la série de Fourier d'une fonction continue f.

Corollaire 20.20. — *Pour tout $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, les suites $c_{\pm n}(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.*

On pourrait se contenter, dans la suite, de ne considérer que des fonctions continues ou de classe C^1. Voici toutefois deux (bonnes) raisons de considérer des fonctions un peu plus générales.

(1) On a vu dans le chapitre sur les séries entières que, pour tout $x \in\,]0, 2\pi[$, la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge vers $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, tandis que pour $x = 0$ ou 2π, la somme de cette série vaut $f(x) = 0$. Par conséquent, f se prolonge en une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, qui est discontinue en les points $x_n = 2n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$, mais qui admet en chacun de ces points p une limite à droite, notée $f(p+)$ et valant $\pi/2$, et une limite à gauche, notée $f(p-)$ et valant $-\pi/2$.

(2) En physique, mécanique, électronique, on rencontre souvent des systèmes qui transforment un « signal d'entrée » (une certaine fonction périodique) en un « signal de sortie » (une autre fonction) et pour calculer le signal de sortie il est utile d'écrire le signal d'entrée comme somme de sa série de Fourier. Le signal d'entrée n'est pas nécessairement continu : par exemple cela peut être la fonction valant 1 sur $]0, \pi[$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$ (les valeurs en $0, \pi$ et 2π n'ayant pas d'importance).

Ceci conduit à considérer les classes de fonctions définies ci-dessous.

Définitions 20.21 **(Fonctions C^0 ou C^1 par morceaux)**. — Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

(1) On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision *finie* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et que f admette en chaque $p = a_i$ une limite à gauche, notée $f(p-)$, et une limite à droite, notée $f(p+)$. (Pour $p = a$, resp. $p = b$, on ne demande que la limite à droite, resp. à gauche).

(2) On dit que f est **de classe C^1 par morceaux** sur $[a, b]$ si elle vérifie la condition précédente et si de plus f est de classe C^1 sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et si, lorsque x tend vers a_i^+ (resp. a_{i+1}^-), $f'(x)$ tend vers une limite finie, notée $f'_d(a_i)$ (resp. $f'_g(a_{i+1})$). Ceci équivaut à dire que f se prolonge sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ en une fonction h de classe C^1, telle que $h(a_i) = f(a_i+)$, $h(a_{i+1}) = f(a_{i+1}-)$, et que $f'_d(a_i)$ (resp. $f'_g(a_{i+1})$) soit la dérivée de h à droite en a_i (resp. à gauche en a_{i+1}).

Enfin, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction périodique de période P, on dit qu'elle est C^0 ou C^1 par morceaux si sa restriction à l'intervalle $[0, P]$ (ou à n'importe quel intervalle de longueur P) l'est.

Exemples 20.22. — (1) Toute fonction en escaliers sur $[a, b]$ est C^1 par morceaux. La fonction $x \mapsto |x|$ est C^1 par morceaux sur tout intervalle $[-N, N]$, avec $N > 0$.

(2) La fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi[$ et $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$ est C^1 par morceaux.

(3) Considérons sur l'intervalle $[0, 1]$ les fonctions f, g, h définies par $f(x) = 1/x$, $g(x) = \sin(1/x)$ et $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0 = g(0) = h(0)$. Alors f (resp. g) n'est *pas* C^0 par morceaux, car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0. Quant à h, elle est continue mais n'est *pas* C^1 par morceaux, car $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ n'admet pas de limite à droite en 0. De même, la fonction continue $k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\sqrt{x}$ n'est *pas* C^1 par morceaux, car sa dérivée $k'(x) = -1/\sqrt{x}$ ne tend pas vers une limite finie quand $x \to 0^+$.

Notation 20.23. — Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{M}^0([a,b],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ qui sont C^0 par morceaux, et définissons de même $\mathscr{M}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Remarques 20.24. — Revenons au cas où $[a,b] = [0,2\pi]$ et, pour abréger, désignons les deux espaces précédents par $\mathscr{M}^0$ et $\mathscr{M}^1$. Comme toute fonction continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ est intégrable, alors pour deux telles fonctions f, g on peut encore définir :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$

C'est une forme hermitienne positive sur $\mathscr{M}_0$ et les résultats précédents restent valables avec les modifications suivantes :

(1) L'application $f \mapsto \|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ vérifie encore l'inégalité triangulaire, mais n'est plus une norme car $\|f\| = 0$ n'entraîne pas que $f = 0$, mais simplement que f est nulle sauf en un nombre fini de points.

(2) Ceci mis à part, le théorème de Pythagore reste valable, et le théorème de projection 20.11 et son corollaire 20.14 restent valables si W est un sous-espace possédant une base orthonormée, ce qui est le cas pour le sous-espace W_N de $\mathscr{M}^0$ engendré par les e_k, pour $k \in [-N, N]$.

Les coefficients de Fourier et la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{M}_0$ sont définis comme en 20.16 et 20.17 et l'on a encore l'inégalité de Bessel 20.18 et son corollaire 20.20.

21. Théorèmes de convergence, égalité de Parseval

Pour démontrer plus bas le théorème de convergence de Dirichlet, on aura besoin du lemme suivant, qui est immédiat si f est continue.

Lemme 21.1. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période P, continue par morceaux. Alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+P} f(t)\,dt$ est constante. En d'autres termes, l'intégrale de f calculée sur un intervalle de longueur P, est la même pour tout tel intervalle.*

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Alors $G(x) = F(x+P) - F(x)$. Si f est continue, le résultat est immédiat : d'après le « théorème fondamental du calcul intégral », F est dérivable de dérivée f, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$G'(x) = f(x+P) - f(x) = 0$$

puisque f est P-périodique, et donc G est constante. La démonstration est analogue si f est seulement continue par morceaux. En fait, la démonstration du théorème précité montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, F est dérivable à gauche (resp. à droite) en x, de dérivée à gauche $F'_g(x) = f(x-)$ (resp. à droite $F'_d(x) = f(x+)$). Par conséquent, G est dérivable à gauche et à droite en tout $x \in \mathbb{R}$ et l'on a

$$G'_g(x) = f((x+P)-) - f(x-), \qquad G'_d(x) = f((x+P)+) - f(x+)$$

et ces deux quantités sont nulles puisque f est P-périodique. Par conséquent, G est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle, et donc G est constante. $\square$

Rappel 21.2. — Soit ϕ (resp. h) une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (resp. continue par morceaux). Alors, pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on a la formule de changement de variables

$$\int_a^b h\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(u)\,du.$$

En particulier, si ϕ est une translation $t \mapsto t - x$, pour un certain $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b h(t-x)\,dt = \int_{a-x}^{b-x} h(u)\,du.$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_0^{2\pi} f(t)e^{in(x-t)}\,dt.$$

Comme on somme n de $-N$ à N, on peut remplacer n par $-n$ et donc $n(x-t)$ par $n(t-x)$. Faisant alors, pour x fixé et n fixés, le changement de variable $u = t - x$ pour la fonction $h_n : u \mapsto f(u+x)e^{inu}$, on obtient :

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-x}^{2\pi - x} f(u+x)e^{inu}\,du.$$

Comme chaque fonction h_n est 2π-périodique et continue par morceaux, on a donc, d'après le lemme 21.1 :

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)e^{int}\,dt.$$

Enfin, comme il s'agit d'une somme finie (et que l'intégrale est linéaire), on peut récrire ceci sous la forme :

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_N(t)\,dt, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{int}. \tag{2}$$

Cette fonction D_N s'appelle le N-ième « noyau de Dirichlet ». D'une part, on a

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\Big(1 + 2\cos(t) + \cdots + 2\cos(Nt)\Big)$$

et donc, tenant compte du fait que D_N est une fonction paire, on a :

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(t)\,dt = \int_0^{\pi} D_N(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

D'autre part, on a

$$(4)\qquad 2\pi D_N(t) = e^{-iNt}\big(1+\cdots+e^{2iNt}\big) = e^{-iNt}\,\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{i(N+1)t}-e^{-iNt}}{e^{it}-1}.$$

On peut maintenant démontrer le :

***Théorème 21.3* (Dirichlet).** — *Si f est 2π-périodique et C^1 par morceaux, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $S_N(f)(x)$ converge quand $N\to\infty$ vers $\dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}$, donc vers $f(x)$ si f est continue en x.*

Démonstration. — Fixons $x\in\mathbb{R}$. D'après (1) et (3), on a

$$(5)\quad S_N(f)(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \int_{-\pi}^{0}\big(f(x+t)-f(x-)\big)D_N(t)\,dt + \int_0^{\pi}\big(f(x+t)-f(x+)\big)D_N(t)\,dt.$$

Définissons la fonction $h : [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ par $h(0)=0$ et :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x-)}{e^{it}-1} = \dfrac{f(x+t)-f(x-)}{t}\times\dfrac{t}{e^{it}-1} & \text{si } t\in[-\pi,0[\\[2ex] \dfrac{f(x+t)-f(x+)}{e^{it}-1} = \dfrac{f(x+t)-f(x+)}{t}\times\dfrac{t}{e^{it}-1} & \text{si } t\in\,]0,\pi]. \end{cases}$$

Alors h est évidemment continue sur les intervalles $[-\pi,0[$ et $]0,\pi]$. Comme f est de classe C^1 par morceaux, h admet une limite à gauche (resp. à droite) en 0, qui vaut $f_g'(x)/i$ (resp. $f_d'(x)/i$). Par conséquent, h est C^0 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ et, d'après (4), l'égalité (5) peut s'écrire :

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\big(e^{i(N+1)t}-e^{-iNt}\big)\,dt = c_{-N-1}(h) - c_N(h).$$

D'après le corollaire 20.20 de l'inégalité de Bessel, ceci tend vers 0 quand $N\to\infty$. Ceci prouve le théorème. □

***Remarque 21.4* (importante).** — Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique.

(a) Si f est *impaire* alors $a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ est nul pour tout $n\in\mathbb{N}$ (puisque $f\cos_n$ est impaire).

(b) De même, si f est *paire* alors $b_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ est nul pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (puisque $f\sin_n$ est impaire).

Supposons de plus que f soit continue et C^1 par morceaux, de sorte que le théorème précédent s'applique. Alors, si f est impaire (resp. paire) on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n\ge 1} b_n(f)\sin(nx) \qquad \text{resp.} \qquad f(x) = c_0(f) + \sum_{n\ge 1} a_n(f)\cos(nx).$$

On peut maintenant répondre à une question posée dans la section 19, sous l'hypothèse additionnelle que f soit C^1 par morceaux :

Corollaire 21.5. — *Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux, telle que $f(0) = 0 = f(\pi)$. Alors on a, pour tout $x \in [0, \pi]$,*

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx), \qquad \textit{avec} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt)\, dt.$$

Démonstration. — Prolongeons f en une fonction impaire h définie sur $[-\pi, \pi]$ en posant $h(x) = -f(-x)$ pour $x \leq 0$; ceci est possible car $f(0) = 0$. De plus, comme $f(\pi) = 0$ on a $h(-\pi) = 0$, donc h se prolonge en une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, impaire, continue et C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet et la remarque précédente, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \sum_{n\geq 1} b_n(h) \sin(nx).$$

De plus, comme h est impaire, donc $h \sin_n$ paire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt)\, dt.$$

Le corollaire en découle. □

***Théorème 21.6* (Dérivation).** — *Soit f* continue, *2π-périodique, et C^1 par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f') = inc_n(f)$, et donc $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

On peut retenir ceci avec le slogan : « la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f ».

Démonstration. — On va calculer $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int}\, dt$ par intégration par parties. Pour cela, on se place sur des intervalles où f est C^1 : par hypothèse, il existe une subdivision finie $0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_N = 2\pi$ telle que sur chaque intervalle $[p_k, p_{k+1}]$, f coïncide avec une fonction h_k de classe C^1, telle que $h_k(p_k) = f(p_k+)$ et $h_k(p_{k+1}) = f(p_{k+1}-)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}} f'(t) e^{-int}\, dt = \big(f(p_{k+1}-) e^{-inp_{k+1}} - f(p_k+) e^{-inp_k}\big) + in \int_{p_k}^{p_{k+1}} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Comme f est de plus supposée continue, on a $f(p_k-) = f(p_k) = f(p_k+)$ pour tout $k = 0, \ldots, N$, avec aussi $f(p_N) = f(2\pi) = f(0) = f(p_0)$. Par conséquent, en sommant les égalités ci-dessus, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int}\, dt = f(2\pi) - f(0) + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt = in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Le théorème en découle. □

Corollaire 21.7. — *Si f est* continue, *2π-périodique, et C^1 par morceaux et si f' est aussi C^1 par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\frac{f'(x-)+f'(x+)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} in\big(c_n(f)e^{inx} - c_{-n}(f)e^{-inx}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\big(b_n(f)\cos(nx) - a_n(f)\sin(x)\big).$$

Démonstration. — Comme f' est C^1 par morceaux alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_N(f')(x)$ converge quand $N \to \infty$ vers $\big(f'(x-)+f'(x+)\big)/2$, d'après le théorème de Dirichlet 21.3. D'autre part, d'après le théorème précédent, on a $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (d'où en particulier $c_0(f') = 0$). Le corollaire en découle. □

***Corollaire 21.8* (Intégration).** — *Soit f une fonction 2π-périodique, C^0 par morceaux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} F(x) - c_0(f)x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{in}\big(c_n(f)e^{inx} - c_{-n}(f)e^{-inx}\big). \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\big(-b_n(f)\cos(nx) + a_n(f)\sin(nx)\big). \end{aligned}$$

On peut retenir ceci avec le slogan : « une primitive de f s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f (même si celle-ci ne converge pas en tout point vers f) ».

Démonstration. — Posons $c_0 = c_0(f)$. Comme f est C^0 par morceaux, la fonction $G : x \mapsto F(x) - c_0x$ est continue. D'autre part, elle est 2π-périodique car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, d'après le lemme 21.1 :

$$G(x+2\pi) - G(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0 = 0.$$

De plus, d'après la preuve du lemme 21.1, G est C^1 par morceaux : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G'_g(x) = f(x-) - c_0, \qquad G'_d(x) = f(x+) - c_0.$$

Donc, d'après le théorème de Dirichlet 21.3, G est en tout point x la somme de sa série de Fourier et, d'après le théorème 21.6, on a :

$$\forall n \neq 0, \qquad c_n(f) = c_n(f - c_0) = inc_n(G)$$

d'où $c_n(G) = c_n(f)/in$ pour $n \neq 0$. Enfin, on a

$$c_0(G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (F(t) - c_0t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt - \frac{c_0}{4\pi}[t^2]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt.$$

Le corollaire en découle. □

***Théorème 21.9* (Convergence normale).** — *Soit f* continue, *2π-périodique et C^1 par morceaux. Alors :*

(i) *La série $|c_0(f)| + \sum_{n\geq 1}\big(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|\big)$ converge.*

(ii) *Par conséquent, la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons $c_n = c_n(f)$ et $c'_n = c_n(f')$. D'après le théorème 21.6, on a $c_n = c'_n/in$ pour tout $n \neq 0$, et $c'_0 = 0$. Comme f' est continue par morceaux, l'inégalité de Bessel entraîne que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c'_n|^2 \leq \|f'\|^2.$$

D'autre part, comme $2ab \leq a^2 + b^2$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \neq 0$:

$$|c_n| = \frac{|c'_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\Big(|c'_n|^2 + \frac{1}{n^2}\Big).$$

Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{n} \big(|c_n| + |c_{-n}|\big) \leq |c_0| + \frac{\|f'\|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ceci entraîne l'assertion (i). Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

Par conséquent, l'assertion (i) entraîne que la série de fonctions $(S_N(f))$ converge normalement. D'autre part, d'après le théorème de Dirichlet 21.3, sa limite en tout point x est $f(x)$. Le théorème en découle. □

On en déduit le théorème suivant.

***Théorème 21.10* (Égalité de Parseval).** — *Pour f* continue, *2π-périodique et C^1 par morceaux, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \|f\|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\Big)$$

$$= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big).$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la suite croissante définie par $u_N = \|S_N(f)\|^2$ converge vers $\|f\|^2$. D'après la preuve de l'inégalité de Bessel 20.18, on a

$$(\clubsuit) \qquad \|f\|^2 - \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2.$$

Soit $\varepsilon \in \,]0, 1]$. Comme la suite $(S_N(f))$ converge uniformément vers f, il existe $N_0 \in N$ tel que pour tout $N \geq N_0$, on ait :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \qquad |f(x) - S_N(f)(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2\,dt \leq \varepsilon^2 \leq \varepsilon.$$

Compte-tenu de (♣), ceci montre que $\|S_N(f)\|^2$ converge vers $\|f\|^2$ quand N tend vers $+\infty$. □

Remarques 21.11. — L'égalité de Parseval est vraie pour toute fonction continue 2π-périodique (voir par exemple [**LFA**], §§XII.5–8), mais la version ci-dessus suffit à nos besoins, cf. la section suivante.

22. Exemples et applications

Dans cette section, on donne quelques exemples de calculs de coefficients de Fourier, avec des applications au calcul de la somme de certaines séries.

Exemple 22.1. — Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = -1$ pour $t \in]-\pi, 0[$, $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$ et $f(-\pi) = 0 = f(0) = f(\pi)$. Elle est impaire, donc on a $a_n(f) = 0$ pour tout n et, pour $n > 0$:

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Par conséquent, $b_{2k}(f) = 0$ et $b_{2k+1}(f) = \dfrac{4}{(2k+1)\pi}$. D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}.$$

D'autre part, d'après l'égalité de Parseval, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\frac{4^2}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Notons I_2 la somme ci-dessus, i.e. la somme des $1/n^2$ pour $n > 0$ impair, et notons P_2 (resp. T_2) la somme des $1/n^2$ pour $n > 0$ pair (resp. pour tout $n > 0$). Alors $T_2 = P_2 + I_2$ et, comme $P_2 = (1/4)T_2$, on en déduit que $3T_2/4 = I_2$, d'où :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}I_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 22.2. — Soit g la fonction 2π-périodique telle $g(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. Elle est paire, donc pour tout n on a $b_n(f) = 0$ et :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt.$$

Pour $n = 0$, on obtient $a_0(g) = \pi$. Pour $n > 0$, on intègre par parties :

$$\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt = \left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \frac{1}{n}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

On a donc $a_{2k+1}(g) = \dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2}$ pour tout $k \geq 0$ et $a_{2k}(g) = 0$ pour $k \geq 1$. D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \qquad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)^2}.$$

Notons que pour $x = \pi$, ceci redonne l'égalité $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

D'autre part, $\|g\|^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi t^2\,dt = \dfrac{\pi^2}{3}$ et, d'après l'égalité de Parseval, ceci est égal à :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{16}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}.$$

À nouveau, notons I_4 la somme ci-dessus et P_4 (resp. T_4) la somme des $1/n^4$ pour $n > 0$ pair (resp. pour tout $n > 0$). On a $T_4 = P_4 + I_4$ et $P_4 = (1/16)T_4$, d'où $15T_4/16 = I_4$ et donc :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}I_4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour d'autres exemples, voir 6.3.11–14 dans [**Delab09**] ou [**Delab10**], ou [**LFA**], §XII.4.

Références citées dans ce chapitre :

[Delab09] Sylvie Delabrière, Suites, séries, intégrales, Ellipses, 2009.

[Delab10] Sylvie Delabrière, polycopié de LM260 (Séries et intégrales), cours de L2 à l'UPMC, 2010-2014, disponible à l'adresse : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/

[LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 2 Analyse (4e édition), Dunod, 1977.