CHAPITRE 6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

23. Généralités

[1] Dans tout ce chapitre, on utilise la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Commençons par rappeler le résultat fondamental suivant, vu dans l'UE 1M001.

Théorème 23.1. — *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. Fixons $t_0 \in I$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{K}$ on a ce qui suit :*

(i) *Il existe une unique fonction dérivable $f : I \to \mathbb{K}$ vérifiant l'équation différentielle :*

$$(E) \qquad \forall t \in I, \qquad f'(t) = a(t)f(t)$$

avec la « condition initiale » $f(t_0) = x_0$.

(ii) *Plus précisément, pour tout $t \in I$ on a $f(t) = x_0 e^{A(t)}$, où A est la primitive de a sur I s'annulant en t_0.*

(iii) *Il existe une unique fonction dérivable $f : I \to \mathbb{K}$ vérifiant l'équation différentielle :*

$$(E_b) \qquad \forall t \in I, \qquad f'(t) - a(t)f(t) = b(t)$$

avec la « condition initiale » $f(t_0) = x_0$. Plus précisément, pour tout $t \in I$ on a $f(t) = (B(t) + x_0)e^{A(t)}$, où B est la primitive s'annulant en t_0 de la fonction $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$.

Démonstration. — Pour tout $t \in I$, posons $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$. Notons que A est la primitive de a sur I s'annulant en t_0 ; elle est de classe C^1. Pour tout $t \in I$, posant $f(t) = x_0 e^{A(t)}$, on a :

$$f'(t) = x_0 e^{A(t)} A'(t) = a(t)f(t).$$

Donc f vérifie (E), ainsi que la condition initiale $f(t_0) = x_0$. Soit g une autre solution ; pour tout $t \in I$, posant $c(t) = g(t)e^{-A(t)}$, on a :

$$c'(t) = \Big(g'(t) - a(t)g(t)\Big)e^{-A(t)} = 0$$

donc c est constante sur I, de valeur $c(t_0) = g(t_0) = x_0$, et donc $g(t) = x_0 e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$. Ceci prouve (i) et (ii).

[1] V. du 5/5/17 : correction dans 24.4 (b) signalée par He Yunfan. Merci à lui !

Prouvons (iii). Remarquons d'abord que si g, h sont deux solutions de (E_b), alors $f = g-h$ est solution de (E) ; si de plus $g(t_0) = h(t_0)$ alors $f(t_0) = 0$ donc $f = 0$ i.e. $g = h$. Ceci prouve déjà l'unicité. Réciproquement, si l'on a trouvé une solution g de (E_b) et si $f_1 : t \mapsto e^{A(t)}$ désigne la solution de (E) telle que $f(t_0) = 1$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $h = g + \alpha f_1$ est solution de (E_b) et vérifie $h(t_0) = g(t_0) + \alpha$.

Cherchons maintenant une solution de (E_b) sous la forme $g(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$; alors (E_b) équivaut à :

$$b(t) = g'(t) - a(t)g(t) = \big(\lambda'(t) + a(t)\lambda(t)\big)e^{A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{A(t)} = \lambda'(t)e^{A(t)}$$

i.e. à $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. Soit donc $B(t)$ la primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ s'annulant en t_0, alors $g : t \mapsto B(t)e^{A(t)}$ est solution de (E_b) et vérifie $g(t_0) = 0$. Par conséquent, $h = g + x_0 f_1$ est l'unique solution de (E_b) telle que $h(t_0) = x_0$. □

Terminologie 23.2. — Pour abréger, on écrira parfois EDO pour « équations différentielles ordinaires » (en anglais, ODE = ordinary differential equations) : le mot « ordinaire » est utilisé pour distinguer les équations différentielles des EDP (équations aux dérivées partielles) pour les fonctions de plusieurs variables (en anglais, PDE = partial differential equations).

***Définition 23.3* (EDO linéaires)**. — Soit n un entier ≥ 1.

(i) Une équation différentielle **linéaire** d'ordre n est une équation de la forme :

$$(E) \qquad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0,$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et la fonction inconnue cherchée y est une fonction n fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(ii) Fixant $t_0 \in I$ et des éléments $x_0, \dots, x_{n-1}$ de $\mathbb{K}$, on ajoute à (E) les « conditions initiales » :

$$(I) \qquad y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

(iii) Les fonctions $a_1, \dots, a_n$ s'appellent les « coefficients » de l'EDO (E). Si elles sont constantes, on dit alors que (E) est une EDO **linéaire à coefficients constants**.

(iv) Noter que si y est une solution de (E) alors y est automatiquement de classe C^n, en raison de l'égalité $y^{(n)}(t) = -\sum_{i=1}^n a_i(t)y^{(n-i)}(t)$.

(v) Parfois, on précise que (E) est une EDO *scalaire* : ceci signifie que la fonction inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque 23.4. — On dit que l'EDO (E) est **linéaire** pour la raison suivante : on voit facilement que si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ est aussi solution, pour tout $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$. En d'autres termes, l'ensemble V des solutions de (E) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. (On verra plus loin que chaque solution est entièrement déterminée par les conditions initiales (I) et que $x_0, \dots, x_{n-1}$ peuvent être choisis arbitrairement, de sorte que V est de dimension n.)

Remarque 23.5. — Au contraire, l'équation différentielle $y'(t) = y(t)^2$ n'est **pas** linéaire.

***Définition 23.6* (EDO linéaires avec second membre).** — Gardons les notations de la définition 23.3 et soit $b : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

(i) On dit que l'équation différentielle

$$(E_b) \qquad y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t)$$

est une EDO « linéaire **avec second membre** ».

(ii) Attention, si $b \neq 0$ ce n'est pas une équation linéaire (si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ et si y_1, y_2 sont solutions de (E_b) alors $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ est solution de l'équation analogue avec b remplacé par $(\mu_1 + \mu_2)b$). La terminologie signifie que c'est une équation linéaire « à laquelle on a rajouté un second membre ».

(iii) Fixant $t_0 \in I$ et des éléments $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de $\mathbb{K}$, on ajoute à (E) les « conditions initiales » :

$$(I) \qquad y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

(iv) Comme dans la démonstration du théorème 23.1, on voit facilement que si g, h sont deux solutions de (E_b) alors $f = g - h$ est solution de l'équation linéaire (E). Réciproquement, si l'on a trouvé une solution g de (E_b) alors, pour toute solution f de (E), $g + f$ est solution de (E_b).

Terminologie 23.7. — Souvent, les EDO linéaires avec second membre sont simplement appelées (par abus) « EDO linéaires » et les « vraies » EDO linéaires (i.e. celles sans second membre) sont appelées EDO linéaires « **homogènes** ». Avec cette terminologie, on dit que (E) est l'équation homogène associée à (E_b).

Dans ce cours, on souhaite présenter deux autres théorèmes fondamentaux sur les EDO, qui sont énoncés dans les deux sections suivantes (24.2 et 25.4).

Pour être complet, on explique dans la suite de cette section quelques résultats généraux sur les EDO, qui permettent de mettre en perspective le théorème 23.1 et les résultats des deux sections suivantes.

Définition 23.8. — Une équation différentielle scalaire d'ordre n se définit par la donnée suivante : soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n+1}$ et F une fonction continue $U \to \mathbb{K}$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(t, x_1, \ldots, x_n)$, soit u_0 un élément de U ; notons t_0 sa première coordonnée. On peut alors considérer l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \forall t \in I, \qquad y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big),$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction n fois dérivable telle que $Y(t) = \big(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$ appartient à U pour tout $t \in I$, avec la « condition initiale » :

$$(I) \qquad \big(t_0, y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big) = u_0.$$

Exemples 23.9. — (1) $y'(t) = y(t)^2 - t$ et $y'(t) = te^{y(t)} + y(t) + t^2$ sont des EDO scalaires d'ordre 1, données par les fonctions $F(t,x) = x^2 - t$ et $F(t,x) = te^x + x + t^2$ respectivement, qui sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.

(2) $y''(t) = y'(t)^2 + \sqrt{y(t)} + \dfrac{1}{t}$ est une EDO scalaire d'ordre 2, donnée par la fonction $F(t, x_1, x_2) = x_2^2 + \sqrt{x_1} + \dfrac{1}{t}$ qui est définie et continue sur l'ouvert $U = \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \neq 0,\ x_1 > 0\}$.

(3) $y'(t) = y(t)^2$ est une EDO scalaire d'ordre 1, donnée par la fonction $F(t,x) = x^2$. (Cette fonction ne dépend pas de t).

(4) Les EDO linéaires d'ordre n correspondent au cas où la fonction F est linéaire en chacune des variables $x_1, \dots, x_n$, i.e. où l'on a $U = I \times \mathbb{K}^n$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, et pour tout $(t, x_1, \dots, x_n) \in U$:

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x_i$$

pour des fonctions continues $a_i : I \to \mathbb{K}$.

Sous certaines hypothèses sur la fonction F, expliquées plus bas, on a un théorème général qui assure l'existence et l'unicité d'une solution y de (E) vérifiant la condition initiale (I).

Notation 23.10. — On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ de la norme définie par

$$\|(t, x_1, \dots, x_n)\| = \max\big(|t|, |x_1|, \dots, |x_n|\big).$$

Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, on note $B(u,R)$ la boule ouverte (pour la norme précédente) de centre u et de rayon R, i.e.

$$B(u,R) = \{v \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \mid \ \|v - u\| < R\}.$$

Définitions 23.11. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ et F une application de U dans $\mathbb{K}$.

(1) On dit que F est **lipschitzienne** par rapport à la variable $x \in \mathbb{K}^n$ s'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points $u = (t,x)$ et $v = (t,y)$ de U ayant la même première coordonnée t, on ait $|F(t,x) - F(t,y)| \leq k\,\|y - x\|$.

(2) On dit que F est **localement lipschitzienne** par rapport à la variable $x \in \mathbb{K}^n$ si pour tout $u_0 \in U$ il existe une boule ouverte $B(u_0, R)$ contenue dans U telle que l'application $F : B(u_0,R) \to \mathbb{K}$ soit lipschitzienne.

Exemples 23.12. — (1) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n$ des applications continues $I \to \mathbb{K}$. Alors l'application continue

$$F : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \qquad (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1(t)x_1 + \cdots + a_n(t)x_n$$

est localement lipschitzienne par rapport à la variable $x \in \mathbb{K}^n$. En effet, fixons $t_0 \in I$; soit $R > 0$ tel que l'intervalle $J = [t_0 - R, t_0 + R]$ soit contenu dans I. Comme les a_i sont continues sur J, elles y sont bornées donc il existe un réel $M > 0$ tel que $|a_i(t)| \leq M$ pour tout $t \in J$ et $i = 1, \dots, n$. Alors, pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$|F(t,x) - F(t,y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(t)(x_i - y_i)\right| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq Mn\,\|x - y\|.$$

(2) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue, mais elle n'est **pas** localement lipschitzienne au voisinage du point $x = 0$. En effet, on a $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ le rapport $f(x)/x = 1/\sqrt{|x|}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

On peut maintenant énoncer sans démonstration le théorème fondamental suivant. (Voir par exemple [**LFA4**], §III.1 ou [**LD16**], §§1.4.2–3).

Théorème 23.13 **(Cauchy-Lipschitz)**. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ et $F : U \to \mathbb{K}$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable x. Pour tout point $u_0 \in U$, de première coordonnée notée t_0, il existe une unique solution y de l'équation différentielle :*

$$(E) \qquad y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big)$$

vérifiant la condition initiale :

$$(I) \qquad \big(t_0, y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\big) = u_0$$

et définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et « aussi grand que possible », i.e. si f est une autre solution de (E) et (I) définie sur un intervalle J, on a $J \subset I$ et $f(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$.

Remarque 23.14. — Considérons l'équation différentielle (E) : $y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}$. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto 2\sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais, pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, F n'est *pas* localement lipschitzienne en la variable x au voisinage du point $(t_0, 0)$. L'unicité énoncée dans le théorème de Cauchy-Lipschitz est ici en défaut. Prenons par exemple $t_0 = 0$.

La fonction nulle est solution de (E) avec la condition initiale $y(0) = 0$. Mais il y a d'autres solutions : pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq 0 \leq b$, notons $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$f_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & \text{si } \ t \leq a \\ 0 & \text{si } \ a \leq t \leq b, \\ (t-b)^2 & \text{si } \ t \geq b. \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > b$, on a $f'_{a,b}(t) = 2(t-b) = 2\sqrt{|f_{a,b}(t)|}$. De même, pour tout $t < a$, on a $f'_{a,b}(t) = -2(t-a) = 2(a-t) = 2\sqrt{|f_{a,b}(t)|}$. De plus, on a $f_{a,b}(a) = 0 = f_{a,b}(b)$ et pour $s < a$ (resp. $t > b$) on a :

$$\frac{f_{a,b}(s)}{s-a} = a - s \qquad \text{resp.} \qquad \frac{f_{a,b}(t)}{t-b} = t - b$$

et ceci tend vers 0 quand $s \to a^-$ (resp. $t \to b^+$). Donc $f_{a,b}$ admet en a (resp. b) une dérivée à gauche (resp. à droite) nulle, qui coïncide donc avec la dérivée à droite (resp. à gauche). Par conséquent, $f_{a,b}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et c'est une solution de (E) vérifiant la condition initiale $f_{a,b}(0) = 0$.

24. Séries entières solutions d'une EDO linéaires à coefficients analytiques

Définition 24.1. — Considérons l'EDO linéaire $(*)$ de 23.3. On dit qu'elle est à coefficients **analytiques** si, pour $r = 1, \dots, n$, la fonction $t \mapsto a_r(t)$ est la somme d'une série entière

$$a_r(t) = \sum_{k \geq 0} a_{rk} t^k$$

de rayon de convergence $\rho_r > 0$. Dans ce cas, posant $\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_n)$, ces séries entières convergent toutes sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

On a alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 24.2. — *Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $a_1, \dots, a_d, \alpha$ des séries entières à coefficients dans $\mathbb{K}$, chacune de rayon de convergence $\geq \rho$. Alors, pour $x_0, \dots, x_{d-1} \in \mathbb{K}$ arbitraires, on a ce qui suit :*

(i) *Il existe une unique série entière $y(t) = \sum_{k \geq 0} c_k t^k$ solution de l'équation différentielle*

$$(*) \qquad \begin{cases} y^{(d)}(t) - a_1(t) y^{(d-1)}(t) - \cdots - a_{d-1}(t) y'(t) - a_d(t) y(t) = \alpha(t), & (E_\alpha) \\ y(0) = x_0,\ y'(0) = x_1, \dots, y^{(d-1)}(0) = x_{d-1}, & (I) \end{cases}$$

(ii) *De plus, le rayon de convergence de y est $\geq \rho$.*

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, supposons $d = 2$. (On renvoie à [**Hoch**], §3.1 pour le cas général.) Écrivons :

$$a_1(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k \qquad a_2(t) = \sum_{k \geq 0} b_k t^k \qquad \alpha(t) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k t^k$$

et supposons que la série entière $y(t) = \sum_{k \geq 0} c_k t^k$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et soit solution de (E_α). Posons $r = \min(\rho, R)$. Alors, pour tout $t \in]-r, r[$ on a :

$$a_2(t) y(t) = \left(\sum_{p \geq 0} b_p t^p \right) \left(\sum_{q \geq 0} c_q t^q \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{p+q=k} b_p c_q \right) t^k$$

$$a_1(t) y'(t) = \left(\sum_{p \geq 0} a_p t^p \right) \left(\sum_{q \geq 0} (q+1) c_{q+1} t^q \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{p+q=k} (q+1) b_p c_{q+1} \right) t^k$$

$$y''(t) = \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k$$

et l'on obtient donc que $(*)$ est équivalent aux équations linéaires suivantes :

$$(**) \qquad \begin{cases} c_0 = y(0) = x_0, \quad c_1 = y'(0) = x_1 \\ 2c_2 = a_0 c_1 + b_0 c_0 + \alpha_0 \\ 6c_3 = a_1 c_1 + 2a_0 c_2 + b_1 c_0 + b_0 c_1 + \alpha_1 \\ \cdots \\ k(k-1) c_k = \sum_{q=0}^{k-2} (q+1) a_{k-2-q}\, c_{q+1} + \sum_{q=0}^{k-2} b_{k-2-q}\, c_q + \alpha_{k-2} \\ \cdots \end{cases}$$

qui se résolvent de proche en proche. Ceci montre que y, si elle existe, est uniquement déterminée par les équations linéaires $(**)$ (qui incluent les conditions initiales $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$).

Montrons maintenant que la série entière y définie par les c_k a un rayon de convergence $\geq \rho$. Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < \rho$. Soit K un réel ≥ 1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$(1) \qquad \left(|a_n| + |b_n| + |\alpha_n|\right) r^n \leq K.$$

(Un tel K existe puisque la suite ci-dessus converge vers 0.) Soit M un entier $\geq Kr$. Posons $V_0 = C_0 = \max(|c_0|, |c_1|, 1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$(2) \qquad C_n = \max\big(|c_n|, (n+1)|c_{n+1}|\big) \qquad \text{et} \qquad V_n = r^n C_n.$$

Comme $2c_2 = a_0c_1 + b_0c_0 + \alpha_0$, on a

$$2|c_2| \leq C_0\big(|a_0| + |b_0| + |\alpha_0|\big) \leq V_0 K$$

et comme $K \geq 1$ on a aussi $|c_1| \leq V_0 K$, d'où $C_1 \leq V_0 K$ et donc $V_1 = rC_1 \leq V_0 rK \leq V_0 M$. Soit $n \geq 2$; supposons avoir montré :

$$(\dagger) \qquad \forall k = 1, \ldots, n-1, \qquad V_k \leq V_0 \frac{M(M+1)\cdots(M+k-1)}{k!} = V_0 \binom{M+k-1}{k}.$$

D'après $(**)$ on a :

$$(2) \quad (n+1)nc_{n+1} = \alpha_{n-1} + a_{n-1}c_1 + b_{n-1}c_0 + a_{n-2}2c_2 + b_{n-2}c_1 + \cdots + a_0nc_n + b_0c_{n-1}$$

et en multipliant par r^n et prenant la valeur absolue, on obtient :

$$nr^n(n+1)\,|c_{n+1}| \leq r\big(KV_0 + KV_1 + \cdots + KV_{n-1}\big)$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence $(\dagger)$:

$$(3) \qquad nr^n(n+1)\,|c_{n+1}| \leq rKV_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{M+k-1}{k}\right].$$

De plus, le terme entre crochets vaut $\binom{M+n-1}{n-1}$: en effet, c'est vrai pour $n = 1$ et si le résultat est établi pour la somme jusqu'au cran p alors la somme jusqu'au cran $p+1$ vaut :

$$\binom{M+p}{p} + \binom{M+p}{p+1} = \binom{M+p+1}{p+1}.$$

Par conséquent, (3) donne, en tenant compte de l'inégalité $rK \leq M$:

$$nr^n(n+1)\,|c_{n+1}| \leq V_0 M \binom{M+n-1}{n-1} = V_0 \frac{M(M+1)\cdots(M+n-1)}{(n-1)!}$$

et donc

$$(4) \qquad r^n(n+1)\,|c_{n+1}| \leq V_0 \frac{M(M+1)\cdots(M+n-1)}{n!} = V_0 \binom{M+n-1}{n}.$$

De plus, par hypothèse de récurrence (†) on avait $r^{n-1}n|c_n| \le V_{n-1} \le V_0\binom{M+n-2}{n-1}$. Comme $K \ge 1$ on a $r \le rK \le M \le M+n-1$ et donc :

$$r^n|c_n| \le rV_0 \frac{M(M+1)\cdots(M+n-2)}{n!} \le V_0\binom{M+n-1}{n}. \tag{4'}$$

Ensemble, (4) et (4′) montrent que :

$$V_n \le V_0\binom{M+n-1}{n}. \tag{5}$$

Ceci prouve, par récurrence, que (†) est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < r$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$|c_n u^n| \le V_0\binom{M+n-1}{n}\frac{|u|^n}{r^n}. \tag{6}$$

D'autre part, la série entière $\sum_{n\ge 0} z^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-z}$ sur $D(1)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, et sa dérivée d'ordre $M-1$ est donnée sur $D(1)$ par :

$$\frac{(M-1)!}{(1-z)^M} = \sum_{n\ge 0}(n+M-1)\cdots(n+1)z^n.$$

En d'autres termes, la série entière

$$\sum_{n\ge 0}\binom{n+M-1}{M-1}z^n$$

a pour rayon de convergence 1. Comme $\binom{n+M-1}{M-1} = \binom{M+n-1}{n}$, on déduit alors de (6) que la série

$$\sum_{n\ge 0}|c_n|u^n$$

converge pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < r$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$ tel que $r < \rho$, ceci montre que le rayon de convergence de la série entière $y(z) = \sum_{n\ge 0} c_n z^n$ est $\ge \rho$.

Alors, comme les équations $(**)$ sont vérifiées on obtient bien que y est une solution de $(*)$ sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$. □

Remarque 24.3. — Pour « comprendre » l'introduction des C_n et le choix de $K \ge 1$, le lecteur est invité à consulter la démonstration matricielle donnée dans [**Hoch**], §3.1.

Exemple 24.4. — Considérons l'exemple suivant, dû à Isaac Newton :

$$y'(t) - (1+t)y(t) = 1 - 3t + t^2 \tag{E}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. On écrit $y(t) = \sum_{k\ge 0} c_k t^k$, avec $c_0 = 0$, et on suppose y de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $t \in]-R, R[$, on a

$$y'(t) - (1+t)y(t) = c_1 + \sum_{k\ge 1}\big((k+1)c_{k+1} - c_k - c_{k-1}\big)t^k = 1 - 3t + t^2$$

ce qui donne les équations linéaires : $c_1 = 1$, puis $2c_2 = c_1 + c_0 - 3 = -2$ d'où $c_2 = -1$, puis $3c_3 = c_2 + c_1 + 1 = 1$ d'où $c_3 = 1/3$, puis pour $k \geq 3$:

$$(\dagger) \qquad (k+1)c_{k+1} = c_k + c_{k-1} \qquad \text{i.e.} \qquad c_{k+1} = \frac{c_k + c_{k-1}}{k+1}.$$

On a $|c_k| \leq 1$ pour $k = 1, 2, 3$. Supposons ceci établi jusqu'au cran $n \geq 3$, alors l'égalité $(\dagger)$ entraîne que

$$|c_{n+1}| \leq \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

On a donc $|c_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Ceci entraîne que le rayon de convergence R de y est ≥ 1, puisque $|c_n|^{1/n} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. En fait, on a $R = +\infty$ d'après le point (ii) du théorème 24.2, puisque les coefficients $a_1(t) = 1+t$ et $\alpha(t) = 1-3t+t^2$ sont polynomiaux. Ceci peut aussi se montrer soit par un calcul direct, soit en utilisant le théorème 23.1, cf. ci-dessous.

(a) Calcul direct. On calcule $c_4 = -1/6$, $c_5 = 1/30$, $c_6 = -1/45$, $c_7 = \dfrac{1}{630}$, $c_8 = \dfrac{-13}{5040}$ puis

$$c_9 = \frac{-1}{9072} \simeq \frac{-1,1}{10^4} \qquad c_{10} = \frac{-61}{226800} \simeq \frac{-2,7}{10^4} \qquad c_{11} = \frac{-43}{1247400} \simeq \frac{-3,4}{10^5}.$$

Pour $n \geq 10$, posons $c'_n = -c_n$, alors on a $0 < c'_{11} < c'_{10} < 11c'_{11}$. Soit n un entier ≥ 11 ; supposons avoir montré que

$$0 < c'_k < c'_{k-1} < kc'_k$$

pour tout $k = 11, \dots, n$. Alors comme

$$c'_{n+1} = \frac{1}{n+1}(c'_n + c'_{n-1})$$

on a $c'_{n+1} > 0$ et $(n+1)c'_{n+1} = c'_n + c'_{n-1} > c'_n$; de plus comme $c'_{n-1} < nc'_n$ on a aussi $c'_{n+1} < c'_n$. Par récurrence, ceci montre donc que pour tout $n \geq 11$ on a

$$0 < c'_n < c'_{n-1} < nc'_n.$$

En particulier, pour tout $n \geq 12$ on a $c'_{n-1} < c'_{n-2}$ et donc :

$$c'_n = \frac{1}{n}(c'_{n-1} + c'_{n-2}) \leq \frac{2}{n}c'_{n-2}$$

Posant $a_n = c'_{2n}$ et $b_n = c'_{2n+1}$ on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

et donc les séries entières $g(z) = \sum_n a_n z^n$ et $h(z) = \sum_n b_n z^n$ ont pour rayon de convergence $+\infty$. Par conséquent, il en est de même de la série $f(z) = g(z^2) + zh(z^2) = \sum_n c'_n z^n$, et donc y a pour rayon de convergence $+\infty$.

(b) Utilisons maintenant le théorème 23.1. La fonction $f : t \mapsto e^{1/2}\, e^{t+t^2/2} = e^{(t+1)^2/2}$ est solution de l'équation homogène associée à (E) (et vérifie $f(0) = \sqrt{e}$). Il faut donc trouver les primitives de la fonction :

$$t \mapsto e^{-(t+1)^2/2}\,(t^2 - 3t + 1).$$

On a $(t+1)(t-4) = t^2 - 3t - 4$ et l'application $t \mapsto (-t+4)e^{-(t+1)^2/2}$ a pour dérivée $(t^2 - 3t - 5)e^{-(t+1)^2/2}$. Notons E la primitive de $t \mapsto e^{-t^2/2}$ qui s'annule en 0, i.e.

$$E(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Alors $V : t \mapsto (-t+4)e^{-(t+1)^2/2} + 6E(t+1)$ est une primitive de $t \mapsto e^{-(t+1)^2/2}(t^2 - 3t + 1)$. Par conséquent, les primitives cherchées sont de la forme $B_k = V + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème 23.1, les solutions à valeurs réelles de (E) sont les fonctions

$$F_k : t \mapsto f(t)B_k(t) = -t + 4 + 6e^{(t+1)^2/2}\big(E(t+1) + k\big),$$

qui sont toutes des séries entières de rayon de convergence $+\infty$.

25. EDO linéaires à coefficients constants

Rappel 25.1. — Rappelons d'abord (cf. 17.7) la méthode utilisant la transformation de Laplace. Pour simplifier, on se limite au cas des systèmes 2×2, i.e. pour des fonctions inconnues $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ on considère le système différentiel :

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

pour des scalaires $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ fixés. Remarquons que si l'on introduit la fonction

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, le système précédent s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = X'(t) = AX(t) \qquad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(T) = T^2 - (a+d) + ad - bc$; ses racines λ et μ dans $\mathbb{C}$ sont les valeurs propres de A.

On introduit des « conditions initiales » $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, pour x_0, y_0 fixés dans $\mathbb{K}$. Si $b = 0 = c$, on obtient directement les solutions $x(t) = x_0 e^{at}$ et $y(t) = y_0 e^{dt}$. On peut donc supposer que b et c ne sont pas tous les deux nuls. Supposons par exemple $b \neq 0$.

Supposons que les solutions x, y cherchées admettent des transformées de Laplace $u = \mathscr{L}(x)$ et $v = \mathscr{L}(y)$, définies sur $]m, +\infty[$ pour un certain $m > 0$. (On va voir que c'est bien le cas.) Comme $\mathscr{L}(x)(s) = s\mathscr{L}(x)(s) - x(0)$, et de même pour y, on obtient que pour tout $s > m$:

$$\begin{cases} su(s) - x_0 = au(s) + bv(s) \\ sv(s) - y_0 = cu(s) + dv(s) \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} (s-a)u(s) - bv(s) = x_0 \\ -cu(s) + (s-d)v(s) = y_0. \end{cases}$$

Notons L_1 et L_2 les lignes du système de droite et formons $(s-d)L_1 + bL_2$; ceci donne

$$\big((s-a)(s-d) - bc\big)u(s) = x_0(s-d) + by_0.$$

Or, $(s-a)(s-d)-bc = s^2-(a+d)s+ad-bc$ n'est autre que $P_A(s) = (s-\lambda)(s-\mu)$; on obtient donc

$$u(s) = \frac{x_0(s-d)+by_0}{(s-\lambda)(s-\mu)}.$$

Rappelons la décomposition des fractions rationnelles dans $\mathbb{C}(X)$ en éléments simples : si $\lambda \neq \mu$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ uniques tels que

$$\frac{x_0(s-d)+by_0}{(s-\lambda)(s-\mu)} = \frac{\alpha}{s-\lambda} + \frac{\beta}{s-\mu}$$

et α, β vérifient l'égalité :

$$x_0 s + by_0 - dx_0 = \alpha(s-\mu) + \beta(s-\lambda) = (\alpha+\beta)s - (\mu\alpha + \lambda\beta)$$

donc sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \mu\alpha + \lambda\beta = dx_0 - by_0 \end{cases}$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{\lambda-\mu}\big((d-\mu)x_0 - by_0\big) \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{1}{\mu-\lambda}\big((d-\lambda)x_0 - by_0\big).$$

Alors $u(s) = \dfrac{\alpha}{s-\lambda} + \dfrac{\beta}{s-\mu}$ est la transformée de Laplace de la fonction x définie par

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}.$$

Reportant dans la 1ère équation de $(*)$, on obtient :

$$by(t) = x'(t) - ax(t) = (\lambda - a)\alpha e^{\lambda t} + (\mu - a)\beta e^{\mu t}$$

et comme on a supposé $b \neq 0$ ceci détermine y. À titre de vérification, vérifions qu'on a bien $y(0) = y_0$. On $\lambda + \mu = a + d$ d'où $\lambda - a = d - \mu$ et $\mu - a = d - \lambda$ et donc :

$$by(0) = (d-\mu)\alpha + (d-\lambda)\beta = d(\alpha+\beta) - (\mu\alpha + \lambda\beta) = dx_0 - dx_0 + by_0 = by_0$$

d'où $y(0) = y_0$.

Supposons maintenant $\lambda = \mu$. Dans ce cas, on sait qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ uniques tels que

$$\frac{x_0(s-d)+by_0}{(s-\lambda)^2} = \frac{\alpha}{s-\lambda} + \frac{\beta}{(s-\lambda)^2}$$

et α, β vérifient l'égalité :

$$x_0 s + by_0 - dx_0 = \alpha(s-\lambda) + \beta$$

d'où $\alpha = x_0$ et $\beta = x_0(\lambda - d) + by_0$.

Alors $u(s) = \dfrac{x_0}{s-\lambda} + \dfrac{\beta}{(s-\lambda)^2}$ est la transformée de Laplace de la fonction x définie par

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} = (x_0 + \beta t)e^{\lambda t}.$$

Reportant dans la 1ère équation de $(*)$, on obtient :

$$by(t) = x'(t) - ax(t) = \Big((\lambda - a)x_0 + \beta + (\lambda - a)\beta t\Big)e^{\lambda t}.$$

De plus, on a $2\lambda = a + d$ d'où $\lambda - a = d - \lambda = \dfrac{d-a}{2}$ et donc :

$$(\lambda - a)x_0 + \beta = (d - \lambda)x_0 + x_0(\lambda - d) + by_0 = by_0$$

d'où

$$y(t) = \Big(y_0 + \frac{d-a}{2b}\beta t\Big)e^{\lambda t}.$$

On vérifie ainsi que $y(0) = y_0$.

Remarque 25.2. — Gardons les notations précédentes. **Supposons** de plus $\lambda \neq \mu$. Il résulte de ce qui précède que les solutions x et y du système $(*)$ sont combinaisons linéaires de e_λ et e_μ, où pour tout $\nu \in \mathbb{C}$, on note e_ν la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\nu t}$. Sachant cela, on peut chercher directement les solutions sous cette forme, c.-à-d. écrire :

$$x = x_\lambda e_\lambda + x_\mu e_\mu \qquad \text{et} \qquad y = y_\lambda e_\lambda + y_\mu e_\mu.$$

On obtient alors les égalités :

$$\begin{cases} \lambda x_\lambda e_\lambda + \mu x_\mu e_\mu = x' = ax + by = (ax_\lambda + by_\lambda)e_\lambda + (ax_\mu + by_\mu)e_\mu \\ \lambda y_\lambda e_\lambda + \mu y_\mu e_\mu = y' = cx + dy = (cx_\lambda + dy_\lambda)e_\lambda + \big(cx_\mu + dy_\mu\big)e_\mu \end{cases}$$

d'où les équations matricielles, où I_2 désigne la matrice identité :

$$(A - \lambda I_2)\begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix} = 0 = (A - \mu I_2)\begin{pmatrix} x_\mu \\ y_\mu \end{pmatrix},$$

qui équivalent à dire que $v_\lambda = \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, et de même pour v_μ et μ. Comme on a supposé $\lambda \neq \mu$, il existe effectivement une base (v_λ^0, v_μ^0) de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres et chaque solution X de $(*)$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\alpha v_\lambda^0 + e^{\mu t}\beta v_\mu^0$$

pour un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Si l'on fixe la condition initiale $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors (α, β) sont les coordonnées de X_0 dans la base (v_λ^0, v_μ^0). (Voir 17.8 pour un exemple.)

Pour terminer cette section, donnons une démonstration directe (mais très condensée) du théorème fondamental ci-dessous. Pour une démonstration moins condensée, détaillant plus les résultats d'algèbre linéaire utilisés, voir par exemple [**LD16**], §1.3.2 ou [**Po13**], §3.4.

Notation 25.3. — Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, notons $f_{\mu,k}$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_{\mu,k}(t) = e^{\mu t}\dfrac{t^k}{k!}$. Pour $k = 0$, on la note aussi, plus simplement, e_k.

Théorème 25.4. — *Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :*

$$(E) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

et le polynôme $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ les racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$, chacune étant de multiplicité m_i, i.e. P se factorise de façon unique :

$$P(X) = (X - \mu_1)^{m_1} \cdots (X - \mu_r)^{m_r}$$

avec $\mu_i \neq \mu_j$ si $i \neq j$. Noter que $m_1 + \cdots + m_r = \deg(P) = n$. Soit V le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de (E) à valeurs complexes.

(i) *V est de dimension n et admet pour base les les fonctions $f_{\mu_i,k}$, pour $i = 1, \dots, r$ et $0 \leq k < m_i$.*

(ii) *Chaque solution y de (E) est uniquement déterminée par le vecteur des « conditions initiales » :*

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, l'application linéaire $V \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto Y(0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. — Notons $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et D l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par $D(f) = f'$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Le point-clé est d'observer que l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$(*) \qquad P(D)(y) = 0$$

où $P(D)$ est l'endomorphisme $D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \,\mathrm{id}$ (où id est l'application identique de $\mathscr{E}$). La factorisation de P entraîne la même factorisation pour $P(D)$:

$$P(D) = \prod_{p=1}^{r} (D - \mu_p \,\mathrm{id})^{m_p}$$

le produit ci-dessus étant pris dans n'importe quel ordre. Notons déjà que chaque exponentielle e_μ vérifie $(D - \mu \,\mathrm{id})(e_\mu) = 0$. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la dérivée de $f_{\mu,k} : t \mapsto e^{\mu t} \dfrac{t^k}{k!}$ est :

$$f'_{\mu,k}(t) = e^{\mu t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \mu e^{\mu t} \frac{t^k}{k!}$$

et l'on a donc $(D - \mu \,\mathrm{id})(f_{\mu,k}) = f_{\mu,k-1}$. Ainsi, on obtient immédiatement que, pour $i = 1, \dots, r$ et $0 \leq k < m_i$, les fonctions $f_{\mu_i,k}$ sont solutions de $(*)$, i.e. appartiennent à V.

On va montrer qu'elles forment une base de V, et qu'on a l'assertion (ii), en procédant par récurrence sur n. On a $P(X) = (X - \mu_1)Q(X)$ où

$$Q(X) = (X - \mu_1)^{m_1 - 1} \prod_{p=2}^{r} (X - \mu_p)^{m_p}.$$

En particulier, $\deg(Q) = n - 1$. Soit $y \in V$; posons $u = ye_{-\mu_1}$, de sorte que $y = e_{\mu_1} u$. Alors $y' = \mu_1 y + e_{\mu_1} u'$, donc on a

$$0 = P(D)(y) = Q(D)(D - \mu_1 \,\mathrm{id})(y) = Q(D)(e_{\mu_1} u'),$$

i.e. $v = e_{\mu_1} u'$ est solution de l'équation différentielle $Q(D)(x) = 0$. Notons W le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de cette EDO. Par hypothèse de récurrence, W admet une base formée par les fonctions :

$$f_{\mu_1,k} \text{ pour } 0 \leq k < m_1 - 1 \text{ et } f_{\mu_p,k} \text{ pour } p = 2, \dots, r \text{ et } 0 \leq k < m_p$$

et de plus chaque solution x est déterminée par le vecteur de conditions initiales

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(0) \end{pmatrix}$$

qui peut être arbitrairement choisi dans $\mathbb{C}^{n-1}$. On peut donc écrire de façon unique

$$(**) \qquad e_{\mu_1} u' = \sum_{0 \leq k < m_1 - 1} \alpha_{k+1} f_{\mu_1,k} + \sum_{p=2}^{r} \sum_{0 \leq k < m_p} \beta_{p,k} f_{\mu_p,k}$$

et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$u'(t) = \sum_{0 \leq k < m_1 - 1} \alpha_{k+1} \frac{t^k}{k!} + \sum_{p=2}^{r} \sum_{0 \leq k < m_p} \beta_{p,k} \frac{t^k}{k!} \, e^{(\mu_p - \mu_1)t}.$$

Pour tout $\nu \in \mathbb{C}^*$ et tout polynôme $R = \beta_0 + \cdots + \beta_d \dfrac{X^d}{d!}$ de degré d, on voit facilement qu'il existe un unique polynôme $S = \gamma_0 + \cdots + \gamma_d \dfrac{X^d}{d!}$ de même degré d, tel que la fonction $t \mapsto S(t)e^{\nu t}$ soit une primitive de $t \mapsto R(t)e^{\nu t}$. En effet, S est solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{d} \beta_i \frac{X^i}{i!} = R(X) = S'(X) + \nu S(X) = \nu \gamma_d \frac{X^d}{d!} + \sum_{i=0}^{d-1} (\nu \gamma_i + \gamma_{i+1}) \frac{X^i}{i!}$$

ce qui donne $\gamma_d = \beta_d / \nu$ et $\gamma_i = (\beta_i - \gamma_{i+1})/\nu$ pour $i = d - 1, \dots, 0$. On en déduit que u s'écrit de façon unique

$$(***) \qquad u = \alpha_0 + \sum_{1 \leq k < m_1} \alpha_k f_{0,k} + \sum_{p=2}^{r} \sum_{0 \leq k < m_p} \gamma_{p,k} f_{\mu_p - \mu_1,k}$$

et donc $y = e_{\mu_1} u$ s'écrit de façon unique

$$y = \sum_{0 \le k < m_1} \alpha_k f_{\mu_1,k} + \sum_{p=2}^{r} \sum_{0 \le k < m_p} \gamma_{p,k} f_{\mu_p,k}.$$

Ceci prouve déjà le point (i).

De plus, comme $v = e_{\mu_1} u' = y' - \mu_1 y$ alors les valeurs $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ déterminent les valeurs $v(0), \dots, v^{(n-2)}(0)$ donc aussi, par hypothèse de récurrence, les coefficients α_k ($k \ge 1$) et $\beta_{p,k}$ qui apparaissent dans ($**$). La constante d'intégration α_0 qui apparaît dans ($***$) est aussi déterminée par $u(0)$, donc par la donnée de $y(0)$. Ceci montre que chaque solution de (E) est déterminée par ses conditions initiales, i.e. que l'application linéaire

$$V \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto Y(0)$$

est *injective*. Comme les deux espaces ont même dimension n, il en résulte que cette application est bijective. Par conséquent, le vecteur $Y(0)$ des conditions initiales peut être choisi arbitrairement dans $\mathbb{C}^n$. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

Remarques 25.5. — (1) En introduisant le vecteur

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

on voit que l'EDO (E) peut s'écrire sous forme matriciellle

$$Y'(t) = AY(t), \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

(2) Plus généralement, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ on peut considérer l'équation différentielle « vectorielle » d'ordre 1 :

$$(\star) \qquad X'(t) = AX(t),$$

pour une fonction dérivable $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, avec la condition initiale $X(0) = X_0$, où X_0 est un élément arbitraire de $\mathbb{K}^n$. Notons V le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des solutions de $(\star)$. On peut montrer que V est de dimension n et que l'application

$$V \to \mathbb{K}^n, \quad X \mapsto X(0)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, l'isomorphisme réciproque associant à tout X_0 de $\mathbb{K}^n$ la solution X définie par

$$X(t) = \exp(tA) X_0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Voir par exemple [**LD16**], §1.3.2 ou [**Po13**], §3.4.

26. EDO d'une variable complexe

Cette section est un **supplément**, qui a pour but d'expliquer un phénomène signalé dans le polycopié de Joao Pedro dos Santos ([**dS17**], §4.6, Exemple 62).

Pour simplifier, on se limite aux EDO linéaires d'ordre 1 ou 2. Par définition, une EDO linéaire d'une variable réelle x est de la forme :

$$y'(x) = a(x)y(x),$$

où a est une fonction continue sur un **intervalle** ouvert I de $\mathbb{R}$. Si l'équation est donnée sous la forme $b_0(x)y'(x) = b_1(x)y(x)$, avec b_0, b_1 continues sur un intervalle J, et b_0 ne s'annulant qu'un nombre fini de fois dans J, on la récrit sous la forme

$$y'(x) = \frac{b_1(x)}{b_0(x)}y(x)$$

sur tout sous-intervalle ouvert I de J sur lequel b_0 ne s'annule pas.

Dans le cas d'une variable réelle, cela n'a pas tellement de sens de considérer des solutions définies sur des intervalles disjoints, car ces intervalles ne « communiquent pas ». Par exemple, considérons l'équation différentielle très simple :

$$(E_n) \qquad y'(x) = \frac{n}{x}y(x)$$

pour un entier $n \neq 0$, avec la condition initiale $y(1) = \lambda$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on voit que l'unique solution est donnée par $y(x) = \lambda x^n$. En effet, si y est une solution quelconque et si l'on pose $u(x) = y(x)/x^n$, d'où $y(x) = u(x)x^n$, on obtient que $x^n u'(x) = 0$, d'où $u'(x) = 0$ pour tout $x > 0$, donc la fonction u est constante, de valeur $y(1) = \lambda$.

Par contre, il existe une infinité de solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant $y(1) = 1$ car, pour tout réel μ on peut considérer la solution sur $\mathbb{R}^*$ ci-dessous :

$$(*) \qquad y(x) = \begin{cases} \lambda x^n & \text{si } x > 0, \\ (-1)^n \mu x^n & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

caractérisée par les conditions $y(1) = \lambda$ et $y(-1) = \mu$. Essentiellement, ce problème de non unicité vient du fait que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe. Notons toutefois que si $n \geq 2$, la fonction y ci-dessus se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que $y(0) = 0 = y'(0)$, qui est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Ce problème de non unicité disparaît si l'on l'équation différentielle (E_n) pour une variable complexe z variant dans l'ouvert connexe $U = \mathbb{C}^*$. En effet, si l'on écrit comme plus haut $y(z) = u(z)z^n$ on obtient encore que $u'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, et comme U est connexe ceci entraîne que u est constante, de valeur $y(1) = \lambda$.

Ceci « explique » pourquoi, quand on considère des EDO d'une variable complexe, on s'autorise aussi à considérer des équations différentielles de la forme

$$a_0(z)f'(z) + a_1(z)f(z) = 0$$

où a_0 et a_1 sont des polynômes (ou, plus généralement, des séries entières). En particulier, l'équation (E_n) précédente s'écrit

$$zf'(z) = nf(z),$$

avec la condition initiale $f(1) = \lambda$. On a vu qu'elle admet une solution sur $\mathbb{C}^*$ qui est un polynôme en z (si $n > 0$) ou en $1/z$ (si $n < 0$).

D'autre part, rappelons que la fonction exp est une bijection de l'ouvert

$$B = \{x + i\theta \mid x \in \mathbb{R}, \quad -\pi < \theta < \pi\}$$

sur l'ouvert

$$U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R}_-\}$$

et que la bijection réciproque, notée Log, est dérivable (au sens complexe) sur U de dérivée $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.

Pour α un nombre complexe non entier, on peut aussi considérer l'équation différentielle

$$(E_\alpha) \qquad f'(z) = \frac{\alpha}{z} f(z)$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On peut montrer que l'unique solution de (E_α) sur U telle que $f(1) = z_0$ est donnée par :

$$\forall z \in U, \qquad f(z) = z_0 z^\alpha = z_0 \exp\big(\alpha \mathrm{Log}(z)\big).$$

Si α est un réel > 0 mais non entier, alors f se prolonge en une fonction continue en 0 en posant $f(0) = 0$, mais aucune série entière $S(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ n'est solution de (E_α). En effet, l'égalité

$$zS'(z) = \alpha S(z)$$

donne $\alpha a_0 = 0$ et $\alpha a_k = k a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, on obtient $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Un exemple plus subtil est le suivant, cf. [**dS17**], §4.6 Exemple 62.

Exemple 26.1. — Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad z^2 f''(z) + (3z - 1)f'(z) + f(z) = 0$$

et cherchons si une série entière $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, de rayon de convergence $\rho > 0$, en est solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$ on aurait alors

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \big(n(n-1) + 3n + 1\big) = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$$

et comme $n(n-1) + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ on obtiendrait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = (n+1)a_n$, d'où $a_n = a_0 n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la seule série entière solution de (E) a un rayon de convergence nul, et ne fournit donc pas une vraie solution de (E).

Par contre, si l'on cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière en $1/z$, i.e. $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^{-n}$, alors un calcul analogue au précédent donne $b_0 = 0$ et $b_{n+1} = -b_n/n$, d'où

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} b_1$$

et l'on reconnaît alors la fonction $f_1(z) = \dfrac{1}{z}\exp(-1/z)$, qui ne 'annule pas sur $U = \mathbb{C}^*$.

Un procédé standard permet alors de trouver toutes les solutions de (E) : on cherche une solution $g(z)$ sous la forme $g(z) = f_1(z)u(z)$. Posant

$$a(z) = \frac{3z-1}{z^2} \qquad \text{et} \qquad b(z) = \frac{1}{z^2}$$

le fait que $g(z)$ soit solution de $g''(z) + a(z)g'(z) + b(z)g(z) = 0$ équivaut à ce que $v = u'$ soit solution de

$$v'(z) = -\Big(\frac{2f_1'(z)}{f_1(z)} + a(z)\Big)v(z) = -\Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\Big)v(z).$$

On en déduit que $u'(z) = v(z) = \dfrac{\mu}{z}e^{1/z}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{C}$. En écrivant ceci comme une série entière en $1/z$ et en prenant terme à terme une primitive sur l'ouvert $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on obtient que

$$u(z) = \mu(\mathrm{Log}(z) + \ell(1/z)) + \lambda$$

avec $\ell(1/z)$ une série entière en $1/z$ sans terme constant et $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $g(z) = f_1(z)u(z)$, on obtient finalement que

$$g(z) = \mu\big(\mathrm{Log}(z)f_1(z) + h(z)\big) + \lambda f_1(z),$$

où l'on a posé $h(z) = \ell(z)f_1(z)$. En écrivant $h(z) = \sum_{n\geq 1} c_n z^{-n}$ et en écrivant que $\mathrm{Log}(z)f_1(z) + h(z)$ est solution de (E), on obtient les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_{n+1} = \frac{-1}{n}\Big(c_n + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\Big).$$

Références citées dans ce chapitre :

[dS17] Joao Pedro dos Santos, polycopié de 2M261, cours de L2 à l'UPMC, 2016-17, disponible sur la page de l'auteur.

[Hoch] Harry Hochstadt, Differential equations, Dover, 1975.

[LD16] Hervé Le Dret, polycopié de 3M236, cours de L3 à l'UPMC, 20012-2016, disponible sur la page de l'auteur.

[Po13] Patrick Polo, polycopié de LM270, cours de L2 à l'UPMC, 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur.

[LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 4 Équations différentielles, intégrales multiples, (2e édition), Dunod, 1977.

TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

[Abel] Niels Henrik Abel, Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots$, paru en allemand dans le Journal de Crelle, t.1 (1826) et n°XIV (p. 219) de ses Oeuvres complètes, tome I, Grøndahl & Søn, 1881 (disponible en ligne).

[Baire] René Baire, Leçons sur les théories générales de l'analyse, tome II, Gauthier-Villars, 1908 (disponible en ligne).

[Bromwich] Thomas John l'Anson Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, Mac Millan, 1908 (disponible en ligne).

[Cartan] Henri Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961.

[Cauchy] Augustin-Louis Cauchy, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1ère partie Analyse algébrique, 1821 (disponible en ligne).

[Chem16] Sophie Chemla, Notes de cours 2M260 (2016-17), disponible sur la page de l'auteure.

[Delab09] Sylvie Delabrière, Suites, séries, intégrales, Ellipses, 2009.

[Delab10] Sylvie Delabrière, Séries et intégrales, cours LM260 à l'UPMC, 2010-2014, disponible à l'adresse : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/

[Delab16] Sylvie Delabrière, Initiation aux suites, aux intégrales et à l'algèbre linéaire en L1, Ellipses, 2016.

[Dirichlet] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, F. Vieweg und Sohn, 1863 (disponible en ligne).

[dS17] Joao Pedro dos Santos, polycopié de 2M261, cours de L2 à l'UPMC, 2016-17, disponible sur la page de l'auteur.

[Goursat] Édouard Goursat, Cours d'Analyse mathématique, tome I, 3ème édition, Gauthier-Villars, 1917 (la 2ème édition, de 1910, est disponible en ligne).

[Hoch] Harry Hochstadt, Differential equations, Dover, 1975.

[Knopp] Konrad Knopp, Theory and application of infinite series (transl. from German), Blackie & Son, 1928, 2nd ed. 1951 (disponible en ligne).

[Lang96] Serge Lang, Undergraduate Analysis (2nd edition), Springer-Verlag, 1996.

[Lebesgue] Henri Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, 1906 (disponible en ligne).

[LD16] Hervé Le Dret, polycopié de 3M236, cours de L3 à l'UPMC, 20012-2016, disponible sur la page de l'auteur.

[LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 2 Analyse (éditions ultérieures par J.-M. Arnaudiès et Henri Fraysse), Dunod, 1977.

[LFA4] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 4 Équations différentielles et intégrales multiples (éditions ultérieures par J.-M. Arnaudiès et Henri Fraysse), Dunod, 1977.

[Lerner] Nicolas Lerner, Fonctions classiques, Cours de M1 à l'UPMC (2016-17), disponible sur la page de l'auteur.

[Newton] Isaac Newton, The Method of Fluxions and infinite series (traduit du texte original en latin par John Colson), 1736, disponible en ligne.

[Po13] Patrick Polo, polycopié de LM270, cours de L2 à l'UPMC, 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur.

[Po16] Patrick Polo, polycopié de l'UE d'été 2M216, cours de L2 à l'UPMC, mai 2016, disponible sur la page de l'auteur.

[Riemann] Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trignonometrische Reihe (Habilitationschrift, 1854), trad. française : Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, p.225 in : Oeuvres mathématiques de Riemann (trad. L. Laugel), Gauthiers-Villars, 1898 (disponible en ligne).

[Rudin] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1980.

[WW] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson, A course of modern analysis, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1920 (disponible en ligne).