Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261)
Janvier–Mai 2018.

Examen final – 30 Mai 2018

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'examen a un total de 90 points. Les notes $\geqslant 75$ seront considérées comme 75.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.

Exercice 1. Pour chaque entier $n \geqslant 1$ et chaque $x \geqslant 0$, on écrit $f_n(x) = \dfrac{x}{n + n^3 x}$.

1. (2pts) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, la série $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.
2. (9pts) Montrer que $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

Exercice 2. Répondre aux items suivants :

1. (9pts) On suppose que $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $z = -4$ et diverge pour $z = 6i$. En justifiant avec un théorème du cours, déterminer si les séries suivantes

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 7^n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 3^n, \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

   sont convergentes ou divergentes.

2. (8pts) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}, \quad T(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n \log n}, \quad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n/3}}{\cos(1)^n \cdot (n^2+1)} x^{4n}.$$

3. (4pts) En utilisant que la dérivée de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $x \in \mathbb{R}$ vaut $\dfrac{1}{x^2+1}$, déterminer le développement de $\arctan(x)$ en série entière centrée à l'origine. (Vous devez faire attention aux domaines d'application des théorèmes du cours.)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de période 2π définie par

$$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } t \in [-\pi, 0[, \\ 0, & \text{si } t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

1. (5pts) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le n-ème coefficient de Fourier exponentiel $c_n = \hat{f}(n)$ de f.
2. (6pts) Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on écrit $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{int}$. Relier $S(t) = \lim\limits_{N \to \infty} S_N(t)$ et $f(t)$. Ensuite, montrer que (S_N) *ne converge pas* uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. (4pts) Montrer, à l'aide des formules précédentes que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(À toutes fins utiles : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les coefficients trigonométriques sont déduits des coefficients exponentiels par $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i \cdot [c_n - c_{-n}]$.)

Exercice 4. On souhaite calculer la valeur de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$. On introduit ainsi $f(t,x) = \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$, et $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\, dt$.

1. (2pt) Montrer que $F(x)$ converge pour tout $x \geqslant 0$.
2. (4pts) Montrer que $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
3. (3pt) Prouver que $F(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$.
4. (9pts) Montrer que $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer $F'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
5. (2pts) À partir de la question précédente, montrer que $F'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} J$ pour tout $x > 0$.
6. (2pts) Utiliser les questions précédentes pour montrer que pour chaque $y > 0$, on a

$$F(y) = J \int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

7. (2pt) En déduire que pour $y > 0$, on a

$$F(y) = J \cdot 2 \int_{\sqrt{y}}^{\infty} e^{-u^2}\, du.$$

8. (2pts) Obtenir $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\alpha$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $C \geqslant 0$ tel que $|\psi(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}$ pour tout t.

On fixe maintenant $f \in \mathcal{E}_\alpha$ et on note $\mathcal{L}(f)(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$ sa transformée de Laplace.

1. (2pt) On suppose en plus que f est dérivable et que $f' : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ appartient également à $\mathcal{E}_\alpha$. Montrer que pour $s \in]\alpha, +\infty[$ on a $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.
2. (1pt) On suppose en plus que f' est dérivable et que $f'' : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ appartient également à $\mathcal{E}_\alpha$. Pour $s > \alpha$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(s)$ en termes de $\mathcal{L}(f)$.
3. (14pts) À l'aide de la transformée de Laplace, trouver une solution φ de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = -7$. (À toutes fins utiles : $\mathcal{L}\{e^{kt}\}(s) = \frac{1}{s-k}$, $\mathcal{L}\{\sin(kt)\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}\{\cos(kt)\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$.)