CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES ET LES SUITES DE FONCTIONS

[(1)] Ce chapitre est constitué de rappels (parfois avec démonstrations) de résultats vus dans l'UE 2M260. *Tous ces résultats sont supposés acquis*, on n'y reviendra pas en cours.

On utilise la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites numériques et complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Terminologie 1.1. — On s'intéresse, pour commencer, aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On les appelle des suites *numériques* pour les distinguer du cas où la suite est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ ou $M_n(\mathbb{K})$, auquel cas on parle de suites vectorielles (resp. matricielles). Si l'on veut préciser que la suite est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on parlera de suite *réelle* (resp. *complexe*). Pour abréger, on écrira souvent (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rappel 1.2 **(Conjugaison et valeur absolue complexes)**

Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle a (resp. b) la *partie réelle* (resp. *imaginaire*) de z, et on les note $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. Le *conjugué* de z est $\overline{z} = a - ib$. L'application $z \mapsto \overline{z}$ s'appelle la *conjugaison complexe* ; elle est multiplicative, i.e. pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

On définit la *valeur absolue* (ou *norme*) de $z = a + ib$ par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il résulte de ce qui précède qu'elle est multiplicative, i.e. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$. Noter que si $z = a \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{a^2}$ est la valeur absolue $|a|$ du réel a. De plus, pour tout $z = a+ib$, on a :

$$\max(|a|, |b|) \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

D'autre part, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la valeur absolue vérifie l'inégalité ci-dessous, appelée *inégalité triangulaire* :

$$(\dagger) \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

[(1)]Version du 19/3/18 avec ajout d'une démo plus simple du Th. 4.7 lorsque les f_n sont de classe C^1.

En procédant par récurrence on en déduit facilement que, pour tous $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$(\ddagger) \qquad |z_1 + \cdots + z_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

On fera référence à cette inégalité plus générale en l'appelant encore « inégalité triangulaire ».

Remarque 1.3. — L'inégalité triangulaire (†) peut se démontrer par un calcul direct : pour $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, l'inégalité (†) équivaut, puisque la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, à l'inégalité :

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

qui elle-même équivaut, en simplifiant puis en élevant à nouveau au carré, à l'inégalité

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

qui équivaut, en simplifiant, à l'inégalité $0 \leq (ad - bc)^2$, qui est bien vérifiée.

***Rappel 1.4* (Suites de Cauchy).** — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que c'est une *suite de Cauchy* si la « suite double » $|u_q - u_p|$ tend vers 0 quand p, q tendent tous les deux vers l'infini, c.-à-d. si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ on ait $|u_q - u_p| < \varepsilon$.

Remarquons tout de suite que ceci est le cas si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ : en effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ on ait $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$, alors pour tous $q \geq p \geq N$ on a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_q - u_p| \leq |u_q - \ell| + |\ell - u_p| < \varepsilon.$$

Remarquons aussi qu'il résulte de l'inégalité

$$\max(|a|, |b|) \leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$, qu'une suite complexe $(z_n = a_n + ib_n)$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, est de Cauchy *si et seulement si* les suites réelles (a_n) et (b_n) le sont.

Ce qui est parfois appelé « le critère de Cauchy »[(2)] est le théorème ci-dessous. Ce théorème est très important et très utile car il permet de montrer qu'une suite converge *sans connaître a priori sa limite* ; on en verra de nombreux exemples. Nous définirons plus loin la notion d'espace vectoriel normé *complet* ; pour le moment on prendra le mot « *complet* » comme une locution signifiant que toute suite de Cauchy est convergente.

Théorème 1.5. — $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont* **complets**, *i.e. toute suite de Cauchy à valeurs dans* $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$) *est convergente.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du :

Lemme 1.6. — *Soit* (u_n) *une suite de Cauchy numérique. Alors* (u_n) *est* **bornée**, *i.e. il existe* $R \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $|u_n| \leq R$ *pour tout* n.

---

(2) Nous préférons éviter ce terme, pour éviter une confusion avec un autre « critère de Cauchy » (et Hadamard) concernant les séries numériques.

Démonstration. — Prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ on ait $|u_q - u_p| \leq 1$. Alors, pour tout $q \geq N$ on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_q| = |u_q - u_N + u_N| \leq |u_N| + 1.$$

Il suffit alors de poser $R = \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$. □

Démonstration du théorème 1.5. — Considérons d'abord le cas d'une suite de Cauchy réelle (u_n). D'après le lemme précédent, (u_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels qu'on ait :

$$\begin{aligned} \forall q \geq p \geq N_1 \qquad & |u_q - u_p| \leq \varepsilon/2 \\ \forall n \geq N_2 \qquad & |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, alors comme $\varphi(N) \geq N$ on a pour tout $n \geq \varphi(N)$:

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(N)}| + |u_{\varphi(N)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que (u_n) converge vers ℓ.

Le cas d'une suite de Cauchy complexe (z_n) se déduit facilement du cas réel : écrivons $z_n = a_n + ib_n$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, alors les suites réelles (a_n) et (b_n) sont de Cauchy donc convergent vers des limites $a, b \in \mathbb{R}$; par conséquent (z_n) converge vers $z = a + ib$. □

2. Séries numériques : critères de convergence absolue

Terminologie 2.1. — Si (u_n) est une suite numérique, on appelle « série de terme général u_n » la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{k \leq n} u_k$. Si cette suite converge, sa limite est notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$; dans ce cas on dit que la série *converge*. Sinon on dit qu'elle *diverge*. Par abus de notation, on désigne souvent la série par $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ (même si elle ne converge pas) et on s'autorise donc à parler de la convergence ou divergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Remarquons tout de suite que la condition que $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ soit une suite de Cauchy s'écrit : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ on ait

$$|u_{p-1} + \cdots + u_q| < \varepsilon.$$

Compte tenu de l'inégalité triangulaire, ceci conduit à la définition et au théorème suivants.

***Définition 2.2* (Convergence absolue).** — Soit (x_k) une suite numérique. On dit que la série de terme général x_k est **absolument convergente** si la série réelle de terme général $|x_k|$ est convergente.

Théorème 2.3. — *Toute série numérique absolument convergente est convergente.*

Démonstration. — Supposons la série $\sum_k x_k$ absolument convergente et fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite réelle $R_n = \sum_{k=0}^n |x_k|$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ on ait

$$|R_q - R_p| = |x_{p-1}| + \cdots + |x_q| < \varepsilon.$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tous $q \geq p \geq N$

$$|x_{p-1} + \cdots + x_q| \leq |x_{p-1}| + \cdots + |x_q| < \varepsilon$$

donc la suite numérique $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{K}$ est complet, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$. □

D'autre part, pour les séries à termes positifs, rappelons le théorème de comparaison suivant :

Théorème 2.4. — *Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs tels que $a_n \leq b_n$ pour tout n.*

(1) *Si la série $\sum_n b_n$ converge, alors $\sum_n a_n$ converge aussi.*
(2) *Si la série $\sum_n a_n$ diverge, alors $\sum_n b_n$ diverge aussi.*

Rappelons aussi que l'on ne modifie pas la nature d'une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ si l'on change un nombre fini de ses termes, ou si l'on ne prend que la somme des termes d'indice $n \geq N$, pour un certain N fixé. Par comparaison avec une série géométrique, on en déduit le point (i) du corollaire suivant, très utile en pratique.

***Corollaire 2.5* (d'Alembert).** — *Soit $\sum_n a_n$ une série numérique.*

(i) *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ et un réel positif δ tels que $\delta < 1$ et $|a_{n+1}| \leq \delta |a_n|$ pour tout $n \geq N$, alors la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente, donc convergente.*

(ii) *Au contraire, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n+1}| \geq |a_n| > 0$ pour tout $n \geq N$, alors la série $\sum_n a_n$ diverge.*

Démonstration. — Sous l'hypothèse (ii), la suite a_n ne tend pas vers 0. □

3. Séries numériques : l'inégalité d'Abel

Après les critères de convergence absolue rappelés dans la section précédente, le cercle d'idées autour des critères d'Abel et de Dirichlet pour la convergence des séries est probablement le plus utile. Il permet de prouver la convergence de certaines séries qui ne sont pas absolument convergentes. La pierre d'angle est la transformée d'Abel (voir [**Abel**]) :

***Lemme 3.1* (La transformée d'Abel).** — *Soient (f_n) et (u_n) des suites numériques. Si on note U_n la somme $u_0 + \cdots + u_n$, alors*

$$u_0 f_0 + \cdots + u_n f_n = U_0(f_0 - f_1) + U_1(f_1 - f_2) + \cdots + U_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + U_n f_n.$$

Démonstration. — Si $n = 0$, alors $u_0 = U_0$ et si $n \geq 1$, alors $u_n = U_n - U_{n-1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_0 f_0 + \cdots + u_n f_n &= U_0 f_0 + (U_1 - U_0) f_1 + \cdots + (U_n - U_{n-1}) f_n \\ &= U_0(f_0 - f_1) + U_1(f_1 - f_2) + \ldots + U_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + U_n f_n. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2. — La transformation d'Abel peut être vue comme une version discrète de l'intégration par parties. En effet, si l'on écrit $f(n)$ et $u(n)$ au lieu de f_n et u_n et qu'on définit la « dérivée discrète » f' de f et la « primitive discrète » $U = \int u$ de u par

$$f'(n) = f(n) - f(n-1), \qquad U(n) = u(0) + \cdots + u(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en posant $f(-1) = 0$), alors on a $U' = u$ (et $\int f' = f$). Si l'on pose $\widetilde{U}(-1) = 0$ et $\widetilde{U}(k) = U(k-1)$ pour tout $k \geq 1$, alors la formule précédente s'écrit $\int uf = Uf - \int \widetilde{U} f'$.

***Théorème 3.3* (L'inégalité d'Abel).** — *Soient (u_n) une suite numérique et (f_n) une suite réelle décroissante et positive. On suppose que les sommes partielles $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ sont bornées, i.e. il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|U_n| \leq K$ pour tout n. Alors pour tout n on a :*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k f_k \right| \leq K f_0.$$

Démonstration. — Par hypothèse, $|U_m| \leq K$ et $f_m - f_{m+1} \geq 0$ pour tout m, d'où

$$\begin{aligned} \left| u_0 f_0 + \ldots + u_n f_n \right| &= \left| U_0(f_0 - f_1) + U_1(f_1 - f_2) + \cdots + U_{n-1}(f_{n-1} - f_n) + U_n f_n \right| \\ &\leq K(f_0 - f_1) + K(f_1 - f_2) + \cdots + K(f_{n-1} - f_n) + K f_n \\ &= K f_0. \end{aligned}$$

□

Ceci peut être utilisé de deux façons : soit en supposant que la suite (U_n) est convergente, soit en supposant que la suite (U_n) est bornée et que la suite (f_n) décroît vers 0.

Dans l'article original [**Abel**], Abel l'utilise dans le cas où la suite (U_n) est convergente. En fait, dans ce cas on peut remplacer l'hypothèse « (f_n) décroissante et positive » par « (f_n) monotone et convergente » :

***Corollaire 3.4* (La règle d'Abel).** — *Soient (u_n) une suite numérique et (f_n) une suite réelle monotone et convergente. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n f_n$ converge aussi.*

Démonstration. — On suppose dans un premier temps que (f_n) est décroissante et positive. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum u_n$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_m + \cdots + u_p| \leq \varepsilon$$

pour tout $p \geq m \geq N$. Alors, l'inégalité d'Abel donne

$$|u_m f_m + \cdots + u_p f_p| \leq f_m \varepsilon \leq f_0 \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite des sommes partielles de $\sum u_n f_n$ est de Cauchy.

Dans le cas général, notons f la limite de la suite (f_n). Si (f_n) est décroissante alors la suite $f_n - f$ est décroissante et positive donc, d'après ce qui précède, la série $\sum_n (f_n - f)u_n$ converge. Comme

$$\sum_{n=0}^{N} u_n f_n = \sum_{n=0}^{N} (f_n - f)u_n + f \sum_{n=0}^{N} u_n,$$

il suit que $\sum u_n f_n$ converge aussi. Si (f_n) est croissante, la suite $f - f_n$ est décroissante et positive, et l'on applique le même raisonnement . □

On peut donc énoncer la règle d'Abel comme suit : *Si on multiplie une série convergente par une suite réelle monotone et convergente, le résultat reste convergent.*

La deuxième façon a été utilisée ultérieurement par Dirichlet (voir [**Dirichlet**], §101) :

***Corollaire 3.5* (La règle de Dirichlet).** — *Soient (u_n) une suite numérique et (f_n) une suite réelle décroissante convergeant vers 0. Alors si les sommes partielles $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ sont bornés en valeur absolue par un réel $K \geq 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n f_n$ converge.*

Démonstration. — L'hypothèse et l'inégalité triangulaire entraînent que $|U_{m+p} - U_m| \leq 2K$ pour tout $m, p \in \mathbb{N}$. L'inégalité d'Abel donne alors

$$|u_m f_m + \ldots + u_{m+p} f_{m+p}| \leq 2K f_m$$

pour tout $m, p \in \mathbb{N}$. Comme la suite (f_n) tend vers 0, on déduit facilement de l'inégalité précédente que $(u_0 f_0 + \cdots + u_n f_n)$ est une suite de Cauchy, donc convergente. □

On peut donc énoncer la règle de Dirichlet comme suit : *Une série dont les sommes partielles restent bornées devient convergente après multiplication par une suite positive décroissante qui tend vers* 0.

Exemple 3.6. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $e^{ix} \neq 1$, alors les sommes partielles

$$e^{ix} + \cdots + e^{inx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}.$$

sont bornées, en valeur absolue, par $\dfrac{2}{|e^{ix} - 1|}$. La règle de Dirichlet dit alors que la série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge dans ce cas. Par contre, si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la série $S(x)$ est simplement la série harmonique et donc diverge. Mais, pour $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, resp. $x \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{resp.} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

qui n'est pas absolument convergente. Un autre exemple où la règle de Dirichlet est utilisée sera donné plus loin.

4. Convergence uniforme de suites et séries

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Définition 4.1. — Soit f une application $I \to \mathbb{K}$.

(1) On dit que f est **continue** en un point $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$.
(2) On dit que f est *continue sur* I si elle est continue en tout point de I.

Exercice 4.2. — L'application $f : I \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement ses parties réelle et imaginaire le sont.

Dans ce qui suit, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite d'applications $I \to \mathbb{K}$.

***Définition 4.3* (Convergence uniforme)**. — On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers une application $g : I \to \mathbb{K}$ si la propriété suivante est vérifiée : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|g(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour *tout* $x \in I$.
De même, on dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge **uniformément** si la suite de fonctions formée par ses sommes partielles $S_n = f_0 + \cdots + f_n$ converge uniformément.

Le lemme suivant donne un critère de convergence uniforme qui sera très utile pour les séries de fonctions.

***Lemme 4.4* (Critère de Cauchy uniforme)**. — *Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ et $x \in I$ on ait $|f_q(x) - f_p(x)| < \varepsilon$. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f.*

Démonstration. — Pour chaque x la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy donc converge vers une limite $f(x)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soient $q \geq p \geq N$ comme dans l'énoncé. En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient $|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$. Ceci montre que (f_n) converge uniformément vers f. □

***Proposition 4.5* (Convergence uniforme et continuité)**. — *Si les f_n sont continues et convergent* **uniformément** *vers une fonction $g : I \to \mathbb{K}$ alors g est continue.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|g(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $x \in I$. D'autre part, comme f_N est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$. Pour tout tel x, on a donc :

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que g est continue en x_0. □

***Définition 4.6* (Convergence ponctuelle).** — On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *ponctuellement* (ou *simplement*) vers une fonction $g : I \to \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; notant $g(x)$ sa limite, ceci signifie que pour tous $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|g(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

C'est une notion *plus faible* que la convergence uniforme : par exemple, pour $I = [0, 1]$ la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ converge ponctuellement vers la fonction g définie par $g(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $g(1) = 1$. Cette fonction g n'est pas continue donc la convergence *ne peut pas* être uniforme. Vérifions-le par le calcul : soient $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1[$, la condition $0 \leq x^n \leq \varepsilon$ est vérifiée si $x = 0$ et si $x > 0$ elle équivaut à $n \log(x) \leq \log(\varepsilon)$ soit, puisque $\log(x) < 0$:

$$n \geq \frac{\log(\varepsilon)}{\log(x)}.$$

Pour ε fixé dans $]0, 1[$, le terme de droite tend vers $+\infty$ quand $x \to 1^-$, donc on voit qu'on ne peut pas trouver un $N = N_\varepsilon$ « qui marche » pour tout $x \in [0, 1[$.

Rappelons aussi le théorème suivant.

***Théorème 4.7* (Convergence uniforme et intégrabilité/dérivabilité)**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues $I \to \mathbb{C}$.

(1) *On suppose que (f_n) converge vers une fonction f,* **uniformément sur tout intervalle borné** *contenu dans I. Alors f est continue sur I et, pour tout $a < b$ dans I, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

(2) *On suppose que :*

(a) *Chaque f_n est dérivable et la suite des dérivées (f_n') converge vers une fonction g,* **uniformément sur tout intervalle borné** *contenu dans I.*

(b) *La suite $(f_n(x))$ converge pour au moins un $x_0 \in I$.*[3]

Alors la suite (f_n) converge vers une fonction f, uniformément sur tout intervalle borné $I' \subset I$, et f est dérivable sur I de dérivée $f' = g$.

Démonstration. — Prouvons (1). Fixons $x \in I$. Pour montrer que f est continue en x, il suffit de montrer qu'elle est continue sur un intervalle $J_\delta =]x - \delta, x + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$. Or, par hypothèse, pour $\delta > 0$ fixé, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur J_δ, donc f est continue sur J_δ, en particulier en x. Ceci prouve que f est continue sur I.

Fixons maintenant $a < b$ dans I et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall t \in [a, b], \qquad |f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

[3] Cette hypothèse est nécessaire : sinon prendre $f_n =$ la fonction constante n.

Alors pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Ceci achève de prouver le point (1).

Démontrons le point (2). En considérant séparément les parties réelles et imaginaires des fonctions f_n, g et f, on se ramène au cas où elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.[4] Soit I' un intervalle borné contenu dans I, de longueur $\ell > 0$. Soit $L = \max(\ell, 1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f'_n) converge uniformément, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q \geq p \geq N$ et $x \in I$, on ait :

$$|f'_q(x) - f'_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{1}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a donc, pour tous $q \geq p \geq N$ et $x \in I'$:

$$|f_q(x) - f_p(x) - (f_q(x_0) - f_p(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2L}|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Comme la suite $(f_n(x_0))$ converge, il existe un entier $N_1 \geq N$ tel que pour tous $q \geq p \geq N_1$ on ait $|f_q(x_0) - f_p(x_0)| < \varepsilon/2$. Alors, pour tous $q \geq p \geq N$ et $x \in I'$, on a :

$$|f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I' ; elle converge donc uniformément sur I' vers une fonction continue f. Comme I' était arbitraire, ceci montre déjà que (f_n) converge sur I vers une fonction continue f.

Dans le raisonnement précédent, on peut donc prendre pour x_0 un point *arbitraire* de I. Montrons alors que f est dérivable en x_0. Pour tout $x \in I'$, la première inégalité de (2) donne, en faisant tendre q vers $+\infty$:

$$|f(x) - f_p(x) - (f(x_0) - f_p(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0|. \tag{3}$$

D'autre part, comme $(f'_p(x_0))$ converge vers $g(x_0)$, il existe un entier $N_2 \geq N$ tel que pour tout $p \geq N_2$ on ait

$$|f'_p(x_0) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

et donc, pour tout $x \in I'$:

$$|(f'_p(x_0) - g(x_0))(x - x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}|x - x_0|. \tag{4}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit de (3) et (4) que pour tout $p \geq N_2$ et $x \in I'$, on a

$$|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{3\varepsilon}{4}|x - x_0| + |f_p(x) - f_p(x_0) - f'_p(x_0)(x - x_0)|. \tag{5}$$

[4] On fait ceci pour pouvoir appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Fixons un tel p, par exemple $p = N_2$. Comme f_p est dérivable en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I'$ tel que $|x - x_0| < \delta$ on ait

$$|f_p(x) - f_p(x_0) - f'_p(x_0)(x - x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}|x - x_0|.$$

Donc, pour tout $x \in I'$ tel que $|x - x_0| < \delta$ on a :

$$|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon|x - x_0|.$$

Ceci montre que f est dérivable en x_0, de dérivée $g(x_0)$. □

Autre démonstration de (2) *lorsque les* f_n *sont* C^1. — Supposons que :

(a) Chaque f_n est de classe C^1 et la suite (f'_n) converge vers une fonction g, uniformément sur tout intervalle borné contenu dans I.

(b) La suite $(f_n(x))$ converge pour au moins un $x_0 \in I$.

Alors on peut démontrer le point (2) de façon plus simple, comme suit. Par hypothèse, la suite $(f_n(x_0))$ converge ; notons $f(x_0)$ sa limite. Comme chaque f_n est de classe C^1 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a :

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt.$$

Comme la suite (f'_n) converge uniformément vers g sur l'intervalle $[x_0, x]$ alors, d'après le point (1), la suite $(f_n(x))$ converge vers la valeur $f(x)$ définie par :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Comme, d'après le point (1), g est continue, on obtient que f est dérivable sur I, de dérivée g.

Montrons que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle borné $[a, b]$ contenu dans I. Comme f (resp. f_n) est une primitive de g (resp. f'_n) on a, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) - f_n(x) = \int_a^x g(t)\, dt - \int_a^x f'_n(t)\, dt = \int_a^x \big(g(t) - f'_n(t)\big)\, dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f'_n) converge uniformément vers g sur $[a, b]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et $t \in [a, b]$ on ait $|g(t) - f'_n(t)| < \varepsilon/(b - a)$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_a^x |g(t) - f'_n(t)|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{b - a}(x - a) \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$. □

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas des séries de fonctions uniformément convergentes, i.e. on a le théorème suivant :

***Théorème 4.8* (Convergence uniforme de séries de fonctions)**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues $I \to \mathbb{K}$.

(1) *Si la série $\sum_n f_n$ converge vers f* **uniformément sur tout intervalle borné** *contenu dans I, alors f est continue et, pour tout $a < b$ dans I, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

(2) *Si chaque f_n est dérivable, si la série $\sum_n f_n'$ converge vers une fonction g,* **uniformément sur tout intervalle borné** *contenu dans I, et si la série $\sum_n f_n(x)$ est convergente pour au moins un $x_0 \in I$, alors la série $\sum_n f_n$ converge vers une fonction f, uniformément sur tout intervalle borné $I' \subset I$, et f est dérivable sur I de dérivée $f' = g$.*

Remarque et définition 4.9. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On a utilisé implicitement dans la démonstration du théorème 4.7 le fait suivant : pour qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ soit continue ou dérivable en un point x_0 de I, il suffit qu'elle le soit sur $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pour un certain $\delta > 0$. Ceci conduit à la définition suivante, qui est très utile dans des cas où l'on n'a pas convergence uniforme sur I tout entier.

On dit qu'une suite (f_n) de fonctions $I \to \mathbb{K}$ converge **localement uniformément** vers une fonction g si pour tout $x \in I$ il existe $\delta > 0$ tel que (f_n) converge uniformément vers g sur $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. En reprenant les démonstrations, on voit que la proposition 4.5, resp. le point (2) du théorème 4.7, reste valable sous l'hypothèse que la convergence des (f_n) est *localement uniforme*, resp. que la suite (f_n) converge simplement et que la convergence des (f_n') est *localement uniforme*.

Références citées dans ce chapitre :

[Abel] Niels Henrik Abel, Recherches sur la série $1 + \dfrac{m}{1}\,x + \dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 + \cdots$, paru en allemand dans le Journal de Crelle, t.1 (1826) et n°XIV (p. 219) de ses Oeuvres complètes, tome I, Grøndahl & Søn, 1881 (disponible en ligne).

[Dirichlet] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, F. Vieweg und Sohn, 1863 (disponible en ligne).