

# CHAPITRE 5

## SÉRIES DE FOURIER

### 19. Motivation : équation de la chaleur dans une barre

<sup>(1)</sup> On considère une barre rectiligne de longueur  $L$ , représentée par le segment  $[0, L]$ . On suppose que la température initiale est donnée par une fonction continue  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  et qu'au cours du temps les extrémités sont maintenues à une température constante, disons 0 (donc  $f(0) = 0 = f(L)$ ). On admet que la température au cours du temps est donnée par une fonction continue  $u : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$ , qui vérifie les trois conditions suivantes.

(a) Elle admet sur  $]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*$  des dérivées partielles vérifiant l'équation de la chaleur :

$$(E) \quad \forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

où  $k$  est une certaine constante  $> 0$  (dépendant du matériau). Pour alléger l'écriture, on prendra  $k = 1$ .

(b) Elle vérifie les « conditions au bord » ci-dessous :

$$(B) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u(0, t) = 0 = u(L, t).$$

(c) Elle vérifie la « condition initiale » ci-dessous :

$$(I) \quad \forall x \in [0, L], \quad u(x, 0) = f(x).$$

Remarquons que les conditions (E) et (B) sont linéaires, i.e. si  $u_1$  et  $u_2$  vérifient (E) et (B) alors il en est de même de  $au_1 + bu_2$ , pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ . Cherchons d'abord des solutions à (E + B), et cherchons-les sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , avec  $X, T$  non identiquement nulles.<sup>(2)</sup> Alors (E) donne pour tout  $(x, t)$  :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

---

<sup>(1)</sup>Le 12 mars 2018 : ajout d'un point dans 20.14 et du théorème de Fejér 21.7, égalité de Parseval 21.12 prouvée sous des hypothèses plus faibles, exemple de du Bois-Reymond ajouté (§24). V. du 19 mars : correction de coquilles dans 21.4 signalées par Stanislaw Szarek, merci à lui !

<sup>(2)</sup>On ne sait pas *a priori* s'il existe de telles solutions, mais on va voir que oui.

Comme  $X$  et  $T$  ne sont pas identiquement nulles, il existe  $x_0$  et  $t_0$  tels que  $X(x_0) \neq 0$  et  $T(t_0) \neq 0$  et donc, par continuité,  $X$  (resp.  $T$ ) reste non nulle sur un intervalle  $I$  (resp.  $J$ ) contenant  $x_0$  (resp.  $t_0$ ). Alors, on a :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Notons  $q(x, t)$  le rapport précédent. En considérant le terme de gauche (resp. de droite), on voit que  $q(x, t)$  ne dépend pas de  $x$  (resp. de  $t$ ) ; c'est donc une constante  $\lambda$ . On obtient donc que  $X$  et  $T$  sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$(\diamond) \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t).$$

Résolvons l'équation différentielle  $X'' = \lambda X$ , en distinguant trois cas selon le signe de  $\lambda$ .

(1) Si  $\lambda > 0$ , notons  $e_\mu$  l'application  $x \mapsto e^{\mu x}$ , où  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , et définissons de même  $e_{-\mu}$ . Alors toute solution est de la forme  $ae_\mu + be_{-\mu}$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Les conditions  $0 = u(0, t) = u(L, t)$  entraînent alors :

$$\begin{cases} 0 = X(0) = a + b \\ 0 = X(L) = ae^{\mu L} + be^{-\mu L} \end{cases}$$

d'où  $b = -a$  et  $0 = a(e^{\mu L} - e^{-\mu L})$  d'où  $a = 0 = b$  et  $X = 0$ , ce qui est exclu.

(2) Si  $\lambda = 0$ , les solutions sont de la forme  $X(x) = ax + b$ , et comme plus haut les conditions  $0 = X(0) = X(L)$  entraînent  $b = 0 = a$ , ce qui est exclu.

(3) Si  $\lambda < 0$ , notons  $\cos_\omega$  l'application  $x \mapsto \cos(\omega x)$ , où  $\omega = \sqrt{-\lambda}$ , et définissons de même  $\sin_\omega$ . Alors toute solution est de la forme  $a \cos_\omega + b \sin_\omega$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . La condition  $X(0) = 0$  donne  $a = 0$  et alors la condition :

$$0 = X(L) = b \sin(\omega L)$$

avec  $b \neq 0$  et  $\omega, L > 0$ , donne qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega L = n\pi$ , d'où

$$\lambda = -\omega^2 = -n^2(\pi/L)^2.$$

D'autre part, l'équation différentielle  $T' = \lambda T$  donne  $T(t) = ke^{\lambda t}$ , pour un certain  $k \in \mathbb{R}^*$ . Prenant  $b = 1 = k$ , on obtient donc que la fonction

$$u_n : (x, t) \mapsto \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \exp\left(-n^2\frac{\pi^2}{L^2}t\right) \quad (\dagger)$$

est solution de  $(E + B)$ .

Donc, par linéarité, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$u = \sum_{n=1}^N b_n u_n$$

est solution de  $(E + B)$ . Sa valeur en  $t = 0$  est donnée par :

$$\forall x \in [0, L], \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

Pour supprimer les facteurs  $\pi/L$  dans (†) et ci-dessus, on peut se ramener, en faisant un changement d'unité de longueur, au cas où  $L = \pi$ . Ceci conduit à se demander, à la suite de Fourier, si pour toute fonction continue  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(0) = f(\pi) = 0$ , il existe une suite  $(b_n)$  de réels tels que :

$$(*) \quad \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Au lieu de supposer que les extrémités sont maintenues à température constante, supposons maintenant qu'elles sont isolées, i.e. qu'on a, en conservant l'hypothèse  $L = \pi$  :

$$(B') \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t)$$

(et que  $f$  est dérivable, avec  $f'(0) = 0 = f'(\pi)$ ). Cherchant encore une solution de  $(E+B')$  sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , on obtient à nouveau les équations différentielles ( $\diamond$ ). Les conditions au bord  $X'(0) = 0 = X'(\pi)$  excluent, comme avant, le cas  $\lambda > 0$ , mais autorisent le cas  $\lambda = 0$ , qui donne  $X$  constant ainsi que  $T$ . Pour  $\lambda = -\omega^2 < 0$ , la condition  $(B')$  entraîne que  $X = a \cos_\omega$  et  $\omega = n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . On obtient ainsi que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ , la fonction  $u$  définie par

$$(\ddagger) \quad u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \exp(-n^2 t)$$

est solution de  $(E+B')$ , et sa valeur en 0 est donnée par :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=0}^N a_n \cos(nx).$$

Ceci conduit à se demander si pour toute fonction dérivable  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f'(0) = f'(\pi) = 0$ , il existe une suite  $(a_n)$  de réels tels que :

$$(**) \quad \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Enfin, au lieu d'une barre rectiligne considérons un anneau circulaire (par exemple un joint entourant une cuve cylindrique) et repérons chaque point de cet anneau par sa coordonnée angulaire  $x$  (définie modulo  $2\pi$ ). Alors on a encore l'équation de la chaleur  $(E)$ , la condition initiale  $(I)$  est donnée par une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $2\pi$ -périodique, et l'on cherche une solution  $u(x, t) = X(x)T(t)$  telle que  $X$  soit  $2\pi$ -périodique. On arrive encore aux équations différentielles ( $\diamond$ ), et la condition que  $X$  soit  $2\pi$ -périodique entraîne que  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = -n^2$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , ce qui donne comme solutions la fonction constante 1 et les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  définies par :

$$u_n(x, t) = \cos(nx) \exp(-n^2 t), \quad v_n(x, t) = \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

Par linéarité, pour tous  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$u : (x, t) \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) e^{-n^2 t}$$

est solution de (E), et sa valeur en  $t = 0$  est donnée par

$$(\star) \quad \forall x \in [0, 2\pi], \quad u(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

On est ainsi conduit à se demander si toute fonction continue  $2\pi$ -périodique  $f$  peut s'écrire comme la somme d'une série trigonométrique, i.e. s'il existe des suites de réels  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait :

$$(***) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

On va voir que la réponse est oui si  $f$  est de classe  $C^1$ . Attention, pour des raisons qui seront expliquées plus bas, le terme constant est en général noté  $a_0/2$  au lieu de  $a_0$ .

## 20. Coefficients de Fourier et inégalité de Bessel

**Définition 20.1.** — Soient  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on désigne par  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ . Pour abrégé, notons-le  $V_{\mathbb{K}}$ . Pour  $f, g \in V_{\mathbb{K}}$ , on pose

$$(\star) \quad (f | g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt,$$

où  $z \mapsto \bar{z}$  désigne la conjugaison complexe. (Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  on a donc  $\overline{f(t)} = f(t)$  pour tout  $t$ .) Ceci définit une application  $V_{\mathbb{K}} \times V_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(f, g) \mapsto (f | g)$ , qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

(1) Cette application est linéaire en la seconde variable, i.e. pour  $f, g, h \in V_{\mathbb{K}}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a

$$(f | \lambda g + \mu h) = \lambda (f | g) + \mu (f | h).$$

(2) Cette application est *semi-linéaire* (relativement à la conjugaison complexe) en la première variable, i.e. pour  $f, g, h \in V_{\mathbb{K}}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a

$$(\lambda g + \mu h | f) = \bar{\lambda} (g | f) + \bar{\mu} (h | f).$$

En particulier, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ceci signifie simplement que l'application est  $\mathbb{R}$ -linéaire en la première variable.

(3) Pour tout  $f, g \in E_{\mathbb{K}}$ , on a  $(g | f) = \overline{(f | g)}$ .

(4) Si  $f \neq 0$ , alors  $(f | f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt$  est  $> 0$ .

Signalons que le facteur  $1/(b-a)$  est mis dans la définition  $(\star)$  pour que l'on ait  $(\mathbf{1} | \mathbf{1}) = 1$ , où  $\mathbf{1}$  désigne la fonction constante sur  $[a, b]$  de valeur 1.

Désormais, on prend  $[a, b] = [0, 2\pi]$ . Pour abrégier, désignons cet intervalle par  $I$ .

**Notation 20.2.** — Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $e_n$  l'application  $I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{int}$ . Pour tout  $p, q \in \mathbb{Z}$  on note  $\cos_p$  (resp.  $\sin_q$ ) l'application  $I \rightarrow \mathbb{R}$  qui envoie  $t$  sur  $\cos(pt)$  (resp.  $\sin(qt)$ ). Noter que  $e_0 = \cos_0$  est la fonction constante  $\mathbf{1}$ , que  $\cos_{-p} = \cos_p$  et  $\sin_{-p} = -\sin_p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , et que  $\sin_0$  est la fonction nulle.

**Proposition 20.3.** — (1) Pour tout  $p, q \in \mathbb{Z}$  on a :

$$(e_p | e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) Pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$  on a  $(\cos_p | \sin_q) = 0$  et

$$(\sin_p | \sin_q) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } p = q \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\cos_p | \cos_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q = 0 \\ 1/2 & \text{si } p = q \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* — (1) Pour  $q \neq p$ , une primitive de  $e_{q-p}$  est  $\frac{e_{q-p}}{i(q-p)}$ . On a donc :

$$(e_p | e_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q-p)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q; \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(q-p)t}}{i(q-p)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Ceci prouve (1). Prouvons (2). On a  $\cos_0 = e_0$  et pour tout  $p, q \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\cos_p = \frac{e_p + e_{-p}}{2}, \quad \sin_q = \frac{e_q - e_{-q}}{2i}.$$

On déduit de (1) que  $(e_0 | e_0) = 1$  et  $(e_0 | \cos_p) = 0 = (e_0 | \sin_p)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et, en tenant compte de la linéarité (resp. semi-linéarité) en la seconde (resp. première) variable, que pour tout  $p, q \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$(\cos_p | \sin_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{4i}(1 - 1) = 0 & \text{si } p = q \end{cases}$$

$$(\cos_p | \cos_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2} & \text{si } p = q \end{cases} \quad (\sin_p | \sin_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Ceci prouve (2). □

Le point (1) de la proposition précédente fait penser à la notion de famille orthonormée dans  $\mathbb{R}^N$  muni du produit scalaire standard. C'est effectivement une situation analogue, comme on va le voir.

**Définitions 20.4 (Espaces euclidiens).** — Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une **forme bilinéaire symétrique** sur  $E$  est une application  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) Elle est « symétrique », c.-à-d.  $\phi(y, x) = \phi(x, y)$  pour tout  $x, y \in E$ .
- (2) Elle est linéaire en la seconde variable, i.e. pour  $x, y, z \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \phi(x, y) + \mu \phi(x, z).$$

- (3) Noter que (1) et (2) entraînent que  $\phi$  est également linéaire en la première variable.

On dit que  $\phi$  est *positive* si  $\phi(x, x) \geq 0$  pour tout  $x$ , et que  $\phi$  est **définie positive** si  $\phi(x, x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .<sup>(3)</sup>

Si  $\phi$  est définie positive, on dit que c'est un produit scalaire euclidien sur  $E$  et l'on dit que  $E$ , muni de  $\phi$ , est un **espace euclidien**. On pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$$

et l'on dit que c'est la **norme** de  $x$  (relativement au produit scalaire  $\phi$ ). Noter que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ , on a  $\phi(\mu x, \mu x) = \mu^2 \phi(x, x)$  et donc  $\|\mu x\| = |\mu| \|x\|$ .

Enfin, lorsque  $\phi$  est un produit scalaire euclidien sur  $E$ , on désigne souvent  $\phi(x, y)$  par  $(x | y)$ .

Deux exemples importants sont les suivants

**Exemples 20.5.** — (1)  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire standard : si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , alors

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(2) L'espace vectoriel  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , muni du produit scalaire euclidien défini, pour tout  $f, g \in E$ , par :

$$(*) \quad (f | g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Ceci est bien symétrique et linéaire en chaque variable et, pour tout  $f \in E$  non nulle, la fonction  $t \mapsto f(t)^2$  est continue, positive et non identiquement nulle, donc on a

$$(f | f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt > 0.$$

Sur  $\mathbb{C}^n$ , la fonction  $z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n z_i^2$  n'est pas positive, mais  $z \mapsto \sum_{i=1}^n |z_i|^2$  l'est. Ceci conduit à introduire les définitions suivantes.

**Définitions 20.6 (Espaces préhilbertiens).** — Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Une **forme hermitienne** sur  $V$  est une application  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les propriétés suivantes :

<sup>(3)</sup>Noter que, par linéarité, on a  $\phi(0, y) = 0$  pour tout  $y$ , d'où en particulier  $\phi(0, 0) = 0$ .

(1) Elle vérifie  $\phi(v, u) = \overline{\phi(u, v)}$  pour tout  $u, v \in V$ , où  $z \mapsto \bar{z}$  désigne la conjugaison complexe.

(2) Elle est linéaire en la seconde variable, i.e. pour  $u, v, w \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , on a

$$\phi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \phi(u, v) + \mu \phi(u, w).$$

(3) Elle est *semi-linéaire* (relativement à la conjugaison complexe) en la première variable, i.e. pour  $u, v, w \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , on a : <sup>(4)</sup>

$$\phi(\lambda v + \mu w, u) = \bar{\lambda} \phi(v, u) + \bar{\mu} \phi(w, u).$$

On dit que  $\phi$  est *positive* si  $\phi(x, x) \geq 0$  pour tout  $x$ , et que  $\phi$  est **définie positive** si  $\phi(x, x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

Si  $\phi$  est définie positive, on dit que c'est un produit scalaire *hilbertien* sur  $V$  et l'on dit que  $V$ , muni de  $\phi$ , est un **espace préhilbertien**. On pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)}$$

et l'on dit que c'est la **norme** de  $x$  (relativement au produit scalaire  $\phi$ ). Noter que pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ , on a

$$\phi(\mu x, \mu x) = \bar{\mu} \mu \phi(x, x) = |\mu|^2 \phi(x, x)$$

et donc  $\|\mu x\| = |\mu| \|x\|$ .

Enfin, lorsque  $\phi$  est un produit scalaire hilbertien sur  $V$ , on désigne souvent  $\phi(x, y)$  par  $(x | y)$ .

Deux exemples importants sont les suivants

**Exemples 20.6.1.** — (1)  $V = \mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire hilbertien standard : si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , alors

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

(2) L'espace vectoriel  $V = C^0([a, b], \mathbb{C})$  des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , muni du produit scalaire hilbertien défini, pour tout  $f, g \in V$ , par :

$$(\star) \quad (f | g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Ceci vérifie bien la « symétrie hermitienne » :  $(g | f) = \overline{(f | g)}$  et est linéaire (resp. semi-linéaire) en la seconde (resp. première) variable. De plus, pour tout  $f \in V$  non nulle, la fonction  $t \mapsto |f(t)|^2$  est continue, positive et non identiquement nulle, donc on a

$$(f | f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt > 0.$$

<sup>(4)</sup>Noter que ceci découle déjà de (1) et (2).

La théorie des espaces préhilbertiens est tout-à-fait analogue à celle, plus familière, des espaces euclidiens. Énonçons quelques résultats dont nous aurons besoin. (Ces résultats seront aussi vus en 2M271 ou 3M271.)

**Théorème 20.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme hilbertienne)**

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hilbertien  $(\mid)$ .

(1) Pour tout  $x, y \in V$ , on a  $|(x \mid y)|^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$ , avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont liés.

(2) L'application  $N : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$  est une norme sur  $V$ , i.e. elle vérifie :

(a)  $N(x) = 0 \iff x = 0$ .

(b) Pour tout  $x \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ .

(c) Pour tout  $x, y \in V$ , on a  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

On dit que  $N$  est la norme hilbertienne associée au produit scalaire hilbertien  $(\mid)$ .

(3) Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se récrit :  $|(x \mid y)| \leq \|x\| \|y\|$ .

*Démonstration.* — (1) Si  $x = 0$  alors les deux membres de l'inégalité valent 0. On peut donc supposer  $x \neq 0$ ; alors  $(x \mid x) \in \mathbb{R}_+^*$ . Posons

$$v = y - \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}x$$

et  $\mu = \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}$ . Alors :

$$0 \leq (v \mid v) = (y - \mu x \mid y - \mu x) = (y \mid y) - \frac{\overline{(x \mid y)}}{(x \mid x)}(x \mid y) - \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}(y \mid x) + \frac{\overline{(x \mid y)}}{(x \mid x)} \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}(x \mid x)$$

et comme  $\overline{(x \mid y)} = (y \mid x)$  les deux derniers termes se simplifient. Comme  $\bar{z}z = |z|^2$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , et comme  $(x \mid x) > 0$ , on obtient donc :

$$0 \leq (v \mid v)(x \mid x) = (y \mid y)(x \mid x) - |(x \mid y)|^2$$

d'où

$$(y \mid y)(x \mid x) = |(x \mid y)|^2 + (v \mid v) \geq |(x \mid y)|^2$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $v = 0$ , i.e. si  $y = \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}x$ , auquel cas  $x$  et  $y$  sont liés. Réciproquement, si  $y = \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors  $(x \mid y) = \lambda(x \mid x)$  et l'on a bien l'égalité précédente.

(2) Comme  $(\mid)$  est défini positif, on a  $N(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ . De plus, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $x \in V$ , on a

$$(\lambda x \mid \lambda x) = \bar{\lambda}\lambda(x \mid x) = |\lambda|^2(x \mid x)$$



et donc  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ . Reste à montrer l'inégalité triangulaire : pour tout  $x, y \in V$ ,  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ . Comme ce sont des réels positifs, cette inégalité équivaut à

$$(\dagger) \quad N(x + y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|.$$

Or, le terme de gauche de  $(\dagger)$  est égal à :

$$(x + y | x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x | y) + (y | x).$$

Comme  $(y | x) = \overline{(x | y)}$  alors  $(x | y) + (y | x) = 2\operatorname{Re}(x | y)$ . Or pour tout nombre complexe  $z = a + ib$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $\operatorname{Re}(z) = a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ . Combinant ceci avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$(x + y | x + y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x | y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|.$$

Ceci prouve  $(\dagger)$ . Par conséquent,  $N$  est bien une norme sur  $V$ . Le point (3) est alors une simple réécriture du point (1).  $\square$

**Définitions 20.8 (Orthogonalité).** — Soit  $V$  un espace euclidien ou hilbertien.

(1) On dit que deux vecteurs  $u, v \in V$  sont orthogonaux si  $(u | v) = 0$ , ce qui équivaut à  $(v | u) = 0$ .

(2) Si  $A$  est une partie de  $V$ , son orthogonal  $A^\perp$  est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les éléments de  $A$ , i.e.

$$A^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in A, (u | v) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

(3) On dit qu'une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs non nuls est une famille **orthogonale** si l'on a  $(e_i | e_j) = 0$  pour  $i \neq j$ . Si de plus chaque  $e_i$  est de norme 1, i.e. si  $(e_i | e_i) = 1$ , on dit que c'est une famille **orthonormée**.

**Proposition 20.9.** — Soit  $V$  un espace euclidien ou préhilbertien. Toute famille orthogonale  $(e_i)_{i \in I}$  est linéairement indépendante.

*Démonstration.* — Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $i_1, \dots, i_n$  des éléments arbitraires de  $I$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des scalaires. Supposons que

$$v = \mu_1 e_{i_1} + \dots + \mu_n e_{i_n}$$

soit nul ; alors pour tout  $k = 1, \dots, n$  on a  $0 = (e_{i_k} | v) = \mu_k \|e_{i_k}\|^2$  et comme  $\|e_{i_k}\|^2 > 0$  ceci donne  $\mu_k = 0$ . Ceci prouve que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est linéairement indépendante.  $\square$

**Proposition 20.10.** — Tout espace euclidien ou hilbertien de dimension finie  $n$  admet une base orthonormée.

*Démonstration.* — Voir 2M271 ou 2M371.  $\square$

**Théorème 20.11 (Projection orthogonale).** — Soit  $V$  un espace euclidien ou préhilbertien et  $W$  un sous-espace de dimension finie.

(1) Pour tout  $v \in V$ , il existe un unique  $w_0 \in W$  tel que  $v - w_0 \in W^\perp$ .

(2) Par conséquent, on a  $V = W \oplus W^\perp$ .

- (3) On dit que  $w_0$  est la projection orthogonale de  $v$  sur  $W$  et on le notera  $\pi_W(v)$ .  
 (4) On a  $(W^\perp)^\perp = W$  et donc  $v - \pi_W(v)$  est la projection orthogonale de  $v$  sur  $W^\perp$ .

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $W$ . Pour tout  $v \in V$ , posons

$$\pi(v) = \pi_W(v) = \sum_{i=1}^n (e_i | v) e_i.$$

C'est un élément de  $W$ . De plus, pour tout  $k = 1, \dots, n$  on a, puisque  $(e_k | e_i) = 1$  si  $k = i$  et  $= 0$  sinon :

$$(e_k | \pi(v)) = \sum_{i=1}^n (e_i | v) (e_k | e_i) = (e_k | v).$$

Par conséquent, on a  $(e_k | v - \pi(v)) = 0$  d'où  $(v - \pi(v) | e_k) = 0$  pour  $k = 1, \dots, n$ , donc par linéarité en la seconde variable on obtient que  $v - \pi(v)$  est orthogonal à tout élément de  $W$ , i.e. appartient à  $W^\perp$ . Ceci prouve déjà l'existence dans (1). Et, comme

$$v = \pi(v) + v - \pi(v)$$

avec  $\pi(v) \in W$  et  $v - \pi(v) \in W^\perp$ , ceci montre que  $W + W^\perp = V$ . De plus, si  $x \in W \cap W^\perp$ , on a  $(x | x) = 0$ , d'où  $x = 0$ . Ceci montre que  $W$  et  $W^\perp$  sont en somme directe, d'où (2). L'unicité dans (1) en découle : si  $w_0 \in W$  est tel que  $v - w_0 \in W^\perp$  alors l'égalité  $v = w_0 + (v - w_0) = \pi(v) + (v - \pi(v))$  entraîne  $w_0 = \pi(v)$ .

Enfin, comme  $(w | x) = 0$  pour tout  $w \in W$  et  $x \in W^\perp$ , il est clair que  $W \subset (W^\perp)^\perp$ . Réciproquement, soit  $y \in (W^\perp)^\perp$ . D'après le point (2), on peut écrire  $y = w + x$  avec  $w \in W$  et  $x \in W^\perp$ . Mais alors  $x = y - w$  appartient à  $W^\perp$  et à  $(W^\perp)^\perp$ , donc  $(x | x) = 0$ , d'où  $x = 0$  et  $y = w$ . Ceci prouve que  $(W^\perp)^\perp = W$ . Alors, par définition, la projection orthogonale de  $V$  sur  $W^\perp$  a pour noyau  $(W^\perp)^\perp = W$  donc, pour tout  $v \in V$ , si l'on écrit  $v = \pi_W(v) + x$  avec  $x \in W^\perp$ , alors  $x = v - \pi_W(v)$  est la projection orthogonale de  $v$  sur  $W^\perp$ .  $\square$

**Remarque 20.12 (importante).** — Si l'on prend une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $W$  qui est orthogonale mais pas nécessairement orthonormée (i.e. les  $f_i$  ne sont pas forcément de norme 1), on obtient comme dans la démonstration précédente que

$$(\heartsuit) \quad \pi_W(v) = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i | v)}{(f_i | f_i)} f_i.$$

**Remarque 20.12.1.** — Pour  $x \in V$  non nul et  $y \in V$  arbitraire, le vecteur  $\frac{(x | y)}{(x | x)} x$  est la projection orthogonale de  $y$  sur la droite  $W = \mathbb{C}x$  engendrée par  $x$ , et le vecteur  $v = y - \pi_W(y)$  utilisé dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est la projection orthogonale de  $v$  sur  $W^\perp$ .

**Proposition 20.13 (Théorème de Pythagore).** — Dans un espace euclidien ou préhilbertien  $V$ , soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs deux-à-deux orthogonaux. Alors

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$$

*Démonstration.* — Pour  $n = 2$ , on a

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2 | v_1 + v_2) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + (v_1 | v_2) + (v_2 | v_1)$$

et, par hypothèse, chacun des deux derniers termes est nul, d'où le résultat pour  $n = 2$ . Le cas général s'obtient alors facilement par récurrence sur  $n$ .  $\square$

**Corollaire 20.14.** — Soit  $V$  un espace euclidien ou préhilbertien, soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthonormée et  $W$  le sous-espace de dimension  $n$  qu'elle engendre. Alors :

(1) Pour tout  $v \in V$  on a :

$$(\spadesuit) \quad \|v\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2 + \sum_{i=1}^n |(e_i | v)|^2 \geq \sum_{i=1}^n |(e_i | v)|^2.$$

(2) Pour tout  $v \in V$  et  $w \in W$ , on a

$$\|v - w\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2 + \|\pi_W(v) - w\|^2 \geq \|v - \pi_W(v)\|^2.$$

*Démonstration.* — D'après la formule donnant  $\pi_W(v)$  et le théorème de Pythagore, on a

$$\|v\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2 + \sum_{i=1}^n \|(e_i | v)e_i\|^2.$$

De plus, comme chaque  $e_i$  est de norme 1, on a  $\|(e_i | v)e_i\|^2 = |(e_i | v)|^2$ . Ceci prouve le point (1).

D'autre part, on a  $v - w = v - \pi_W(v) + \pi_W(v) - w$ , et comme  $\pi_W(v) - w$  appartient à  $W$  et que  $v - \pi_W(v)$  est orthogonal à  $W$ , le théorème de Pythagore entraîne le point (2).  $\square$

Venons-en maintenant aux séries de Fourier. Soit  $V = C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$  muni du produit scalaire hilbertien défini par

$$(\star) \quad (f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t) dt.$$

Alors  $V$  contient les fonctions  $e_n, \cos_p$  et  $\sin_q$  introduites en 20.2. D'après la proposition 20.3, la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée, donc linéairement indépendante, et la famille  $(\cos_p)_{p \in \mathbb{N}} \cup (\sin_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$  est orthogonale, donc linéairement indépendante.

**Notation 20.15.** — Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , notons  $W_N$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par les  $e_k$ , pour  $k \in [-N, N]$ . Il est de dimension  $2N + 1$  et  $(e_0, e_1, e_{-1}, \dots, e_N, e_{-N})$  en est une base orthonormée. De plus, comme  $e_k = \cos_k + i \sin_k$ , alors  $W_N$  est aussi engendré par la famille  $(\cos_0, \cos_1, \sin_1, \dots, \cos_N, \sin_N)$ , qui en forme une base orthogonale.

Pour tout  $f \in V$ , on notera  $\pi_N(f)$  sa projection orthogonale sur  $W_N$ .

**Définition 20.16 (Coefficients de Fourier).** — Soit  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ; on définit ses coefficients de Fourier (de type « exponentielle complexe » ou bien « cosinus et sinus ») comme suit.

(1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n(f)e_n$  est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $\mathbb{C}e_n$ , i.e. on a

$$c_n(f) = (e_n | f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Par conséquent, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$(F_c) \quad \pi_N(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}).$$

(2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n(f) \cos_n$  (resp.  $b_n(f) \sin_n$ ) est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $\mathbb{C} \cos_n$  (resp.  $\mathbb{C} \sin_n$ ). Par conséquent, d'après la remarque 20.12, on a :

$$a_n(f) = \frac{(\cos_n | f)}{(\cos_n | \cos_n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt.$$

$$b_n(f) = \frac{(\sin_n | f)}{(\sin_n | \sin_n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Comme  $2 \cos_n = e_n + e_{-n}$  et  $2i \sin_n = e_n - e_{-n}$  on obtient ainsi les relations

$$(\heartsuit) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{a_n = c_n + c_{-n}} \quad \boxed{b_n = i(c_n - c_{-n})}$$

On pose aussi  $a_0 = 2c_0$ , d'où  $c_0 = a_0/2$ . Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$(F_{a,b}) \quad \pi_N(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos_n + b_n(f) \sin_n).$$

Une autre explication pour l'écriture  $a_0/2$  est la suivante : pour le produit scalaire hilbertien  $\phi$  égal au double du précédent, c.-à-d. défini par

$$\phi(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t) dt$$

la famille  $(\cos_n, \sin_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est orthonormée, tandis que  $\mathbf{1} = \cos_0$  est de norme au carré égale à 2. Par conséquent, si l'on définit  $a_0(f)$  par  $\phi(\cos_0, f)$ , alors la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathbb{C} \cos_0$  est  $\frac{a_0(f)}{2} \cos_0$ . Quoiqu'il en soit, il faut se souvenir que dans la formule  $(F_{a,b})$  le terme constant est noté  $\frac{a_0(f)}{2}$  !

(3) Noter que si  $f$  est à valeurs réelles, alors les  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont réels.

**Définition 20.17.** — Pour  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ , la série de fonctions  $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$  définie par

$$S_N(f) = \pi_N(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos_n + b_n(f) \sin_n)$$

s'appelle la **série de Fourier** de  $f$ .

Plus généralement, pour des suites numériques arbitraires  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la série de fonctions  $(T_N)$  définie par  $T_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos_n + b_n \sin_n)$  s'appelle une **série trigonométrique**. En posant  $c_n = (a_n - ib_n)/2$  et  $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ , on peut aussi l'écrire  $T_N = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$ .

On déduit du corollaire 20.14 (et du fait que la norme au carré de  $\cos_n$  et  $\sin_n$  vaut  $1/2$ ) la proposition suivante.

**Proposition 20.18 (Inégalité de Bessel).** — *Pour tout  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ , la norme au carré de  $\pi_N(f)$  est égale à*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^N (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

*Ceci est égal à  $\|f\|^2 - \|f - \pi_N(f)\|^2$ , qui est  $\leq \|f\|^2$ .*

*Par conséquent, la série de terme général  $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$ , resp.  $(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)/2$ , est convergente.*

**Remarque 20.19.** — La proposition précédente donne une condition nécessaire pour qu'une série trigonométrique arbitraire soit la série de Fourier d'une fonction continue  $f$ .

**Corollaire 20.20.** — *Pour tout  $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ , les suites  $c_{\pm n}(f)$ ,  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  tendent vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .*

On pourrait se contenter, dans la suite, de ne considérer que des fonctions continues ou de classe  $C^1$ . Voici toutefois deux (bonnes) raisons de considérer des fonctions un peu plus générales.

(1) On a vu dans le chapitre sur les séries entières que, pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$ , la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge vers  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ , tandis que pour  $x = 0$  ou  $2\pi$ , la somme de cette série vaut  $f(x) = 0$ . Par conséquent,  $f$  se prolonge en une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , qui est discontinue en les points  $x_n = 2n\pi$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , mais qui admet en chacun de ces points  $p$  une limite à droite, notée  $f(p+)$  et valant  $\pi/2$ , et une limite à gauche, notée  $f(p-)$  et valant  $-\pi/2$ .

(2) En physique, mécanique, électronique, on rencontre souvent des systèmes qui transforment un « signal d'entrée » (une certaine fonction périodique) en un « signal de sortie » (une autre fonction) et pour calculer le signal de sortie il est utile d'écrire le signal d'entrée comme somme de sa série de Fourier. Le signal d'entrée n'est pas nécessairement continu : par exemple cela peut être la fonction valant 1 sur  $]0, \pi[$  et 0 sur  $]\pi, 2\pi[$  (les valeurs en  $0, \pi$  et  $2\pi$  n'ayant pas d'importance).

Ceci conduit à considérer les classes de fonctions définies ci-dessous.

**Définitions 20.21 (Fonctions continues, dérivables ou  $C^1$  par morceaux)**

Soient  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .

(1) On dit que  $f$  est **continue par morceaux** sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision finie  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit continue sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  et que  $f$  admette en chaque  $p = a_i$  une limite à gauche, notée  $f(p-)$ , et une limite à droite, notée  $f(p+)$ . (Pour  $p = a$ , resp.  $p = b$ , on ne demande que la limite à droite, resp. à gauche).

(2) On dit que  $f$  est **dérivable par morceaux** sur  $[a, b]$  si elle vérifie la condition précédente et si de plus  $f$  est dérivable sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  et si les limites :

$$f'_d(a_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a_i + h) - f(a_i)}{h} \quad \text{et} \quad f'_g(a_{i+1}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a_{i+1} - h) - f(a_{i+1})}{h}$$

existent.

(3) On dit que  $f$  est **de classe  $C^1$  par morceaux** sur  $[a, b]$  si elle vérifie la condition précédente et si de plus, pour chaque  $i = 0, \dots, N-1$ , l'application  $g_i$  définie sur  $]a_i, a_{i+1}[$  par  $g_i(a_i) = f'_d(a_i)$ ,  $g_i(a_{i+1}) = f'_g(a_{i+1})$  et  $g_i(x) = f'(x)$  pour  $x \in ]a_i, a_{i+1}[$  est continue. Ceci équivaut à dire que  $f$  se prolonge sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  en une fonction  $h_i$  de classe  $C^1$ , telle que  $h_i(a_i) = f(a_i+)$ ,  $h_i(a_{i+1}) = f(a_{i+1}-)$ , et que  $f'_d(a_i)$  (resp.  $f'_g(a_{i+1})$ ) soit la dérivée de  $h_i$  à droite en  $a_i$  (resp. à gauche en  $a_{i+1}$ ).

Enfin, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction périodique de période  $P$ , on dit qu'elle est continue, dérivable ou  $C^1$  par morceaux si sa restriction à l'intervalle  $[0, P]$  (ou à n'importe quel intervalle de longueur  $P$ ) l'est.

**Exemples 20.22.** — (1) Toute fonction en escaliers sur  $[a, b]$  est  $C^1$  par morceaux. La fonction  $x \mapsto |x|$  est  $C^1$  par morceaux sur tout intervalle  $[-N, N]$ , avec  $N > 0$ .

(2) La fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x$  pour  $x \in ]-\pi, \pi[$  et  $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$  est  $C^1$  par morceaux.

(3) Considérons sur l'intervalle  $[0, 1]$  les fonctions  $f, g, h$  définies par  $f(x) = 1/x$ ,  $g(x) = \sin(1/x)$  et  $h(x) = x^2 \sin(1/x)$  pour  $x \in ]0, 1]$  et  $f(0) = 0 = g(0) = h(0)$ . Alors  $f$  (resp.  $g$ ) n'est pas  $C^0$  par morceaux, car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0. Quant à  $h$ , elle est continue mais n'est pas  $C^1$  par morceaux, car  $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$  n'admet pas de limite à droite en 0. De même, la fonction continue  $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2\sqrt{x}$  n'est pas  $C^1$  par morceaux, car sa dérivée  $k'(x) = -1/\sqrt{x}$  ne tend pas vers une limite finie quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**Notation 20.23.** — Soient  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $\mathcal{M}^0([a, b], \mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont  $C^0$  par morceaux, et définissons de même  $\mathcal{M}^1([a, b], \mathbb{C})$ .

**Remarques 20.24.** — Revenons au cas où  $[a, b] = [0, 2\pi]$  et, pour abrégé, désignons les deux espaces précédents par  $\mathcal{M}^0$  et  $\mathcal{M}^1$ . Comme toute fonction continue par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  est intégrable, alors pour deux telles fonctions  $f, g$  on peut encore définir :

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

C'est une forme hermitienne positive sur  $\mathcal{M}_0$  et les résultats précédents restent valables avec les modifications suivantes :

(1) L'application  $f \mapsto \|f\| = \sqrt{(f | f)}$  vérifie encore l'inégalité triangulaire, mais n'est plus une norme car  $\|f\| = 0$  n'entraîne pas que  $f = 0$ , mais simplement que  $f$  est nulle sauf en un nombre fini de points.

(2) Ceci mis à part, le théorème de Pythagore reste valable, et le théorème de projection 20.11 et son corollaire 20.14 restent valables si  $W$  est un sous-espace possédant une base orthonormée, ce qui est le cas pour le sous-espace  $W_N$  de  $\mathcal{M}^0$  engendré par les  $e_k$ , pour  $k \in [-N, N]$ .

Les coefficients de Fourier et la série de Fourier d'une fonction  $f \in \mathcal{M}_0$  sont définis comme en 20.16 et 20.17 et l'on a encore l'inégalité de Bessel 20.18 et son corollaire 20.20.

## 21. Théorèmes de Dirichlet et Fejér, égalité de Parseval

Pour démontrer plus bas le théorème de convergence de Dirichlet, on aura besoin du lemme suivant, qui est immédiat si  $f$  est continue.

**Lemme 21.1.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique de période  $P$ , continue par morceaux. Alors la fonction  $G : x \mapsto \int_x^{x+P} f(t) dt$  est constante. En d'autres termes, l'intégrale de  $f$  calculée sur un intervalle de longueur  $P$ , est la même pour tout tel intervalle.

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Alors  $G(x) = F(x+P) - F(x)$ . Si  $f$  est continue, le résultat est immédiat : d'après le « théorème fondamental du calcul intégral »,  $F$  est dérivable de dérivée  $f$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$G'(x) = f(x+P) - f(x) = 0$$

puisque  $f$  est  $P$ -périodique, et donc  $G$  est constante. La démonstration est analogue si  $f$  est seulement continue par morceaux. En fait, la démonstration du théorème précité montre que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F$  est dérivable à gauche (resp. à droite) en  $x$ , de dérivée à gauche  $F'_g(x) = f(x-)$  (resp. à droite  $F'_d(x) = f(x+)$ ). Par conséquent,  $G$  est dérivable à gauche et à droite en tout  $x \in \mathbb{R}$  et l'on a

$$G'_g(x) = f((x+P)-) - f(x-), \quad G'_d(x) = f((x+P)+) - f(x+)$$

et ces deux quantités sont nulles puisque  $f$  est  $P$ -périodique. Par conséquent,  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée nulle, et donc  $G$  est constante.  $\square$

**Rappel 21.2.** — Soit  $\phi$  (resp.  $h$ ) une application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  (resp. continue par morceaux). Alors, pour tout  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a la formule de changement de variables

$$\int_a^b h(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(u) du.$$

En particulier, si  $\phi$  est une translation  $t \mapsto t - x$ , pour un certain  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^b h(t-x) dt = \int_{a-x}^{b-x} h(u) du.$$

Soit maintenant  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_0^{2\pi} f(t) e^{in(x-t)} dt.$$

Comme on somme  $n$  de  $-N$  à  $N$ , on peut remplacer  $n$  par  $-n$  et donc  $n(x-t)$  par  $n(t-x)$ . Faisant alors, pour  $x$  fixé et  $n$  fixés, le changement de variable  $u = t - x$  pour la fonction  $h_n : u \mapsto f(u+x) e^{inu}$ , on obtient :

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-x}^{2\pi-x} f(u+x) e^{inu} du.$$

Comme chaque fonction  $h_n$  est  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux, on a donc, d'après le lemme 21.1 :

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) e^{int} dt.$$

Enfin, comme il s'agit d'une somme finie (et que l'intégrale est linéaire), on peut récrire ceci sous la forme :

$$(1) \quad S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_N(t) dt,$$

où l'on a posé, pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$  :

$$(2) \quad D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{int}.$$

Cette fonction  $D_N$  s'appelle le  $N$ -ième « noyau de Dirichlet ». D'une part, on a

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \cos(t) + \dots + 2 \cos(Nt) \right)$$

et donc, tenant compte du fait que  $D_N$  est une fonction paire, on a :

$$(3) \quad \int_{-\pi}^0 D_N(t) dt = \int_0^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, on a  $D_N(0) = 2N + 1$  et, pour  $t \neq 0$  :

$$(4) \quad 2\pi D_N(t) = e^{-iNt} (1 + \dots + e^{2iNt}) = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}}{e^{it} - 1}.$$

On peut maintenant démontrer le :



**Théorème 21.3 (Dirichlet).** — Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique et dérivable par morceaux, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S_N(f)(x)$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  vers  $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ , donc vers  $f(x)$  si  $f$  est continue en  $x$ .

*Démonstration.* — Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . D'après (1) et (3), on a

$$(5) \quad S_N(f)(x) - \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-)) D_N(t) dt \\ + \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+)) D_N(t) dt.$$

Définissons la fonction  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  par  $h(0) = 0$  et :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x-)}{e^{it} - 1} = \frac{f(x+t) - f(x-)}{t} \times \frac{t}{e^{it} - 1} & \text{si } t \in [-\pi, 0[ \\ \frac{f(x+t) - f(x+)}{e^{it} - 1} = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \times \frac{t}{e^{it} - 1} & \text{si } t \in ]0, \pi]. \end{cases}$$

Alors  $h$  est évidemment continue sur les intervalles  $[-\pi, 0[$  et  $]0, \pi]$ . Comme  $f$  est dérivable par morceaux,  $h$  admet une limite à gauche (resp. à droite) en 0, qui vaut  $f'_g(x)/i$  (resp.  $f'_d(x)/i$ ). Par conséquent,  $h$  est continue par morceaux sur  $[-\pi, \pi]$  et, d'après (4), l'égalité (5) peut s'écrire :

$$S_N(f)(x) - \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) (e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}) dt = c_{-N-1}(h) - c_N(h).$$

D'après le corollaire 20.20 de l'inégalité de Bessel, ceci tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ . Ceci prouve le théorème.  $\square$

Illustrons le théorème de Dirichlet par les figures suivantes<sup>(5)</sup> qui montrent les graphes des fonctions  $S_N(f)$  pour  $N = 2, 3, 4, 5, 10, 20$ , lorsque  $f$  est la fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux, définie par :

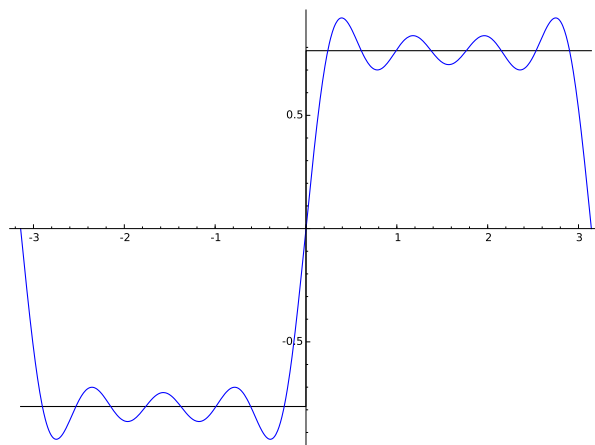
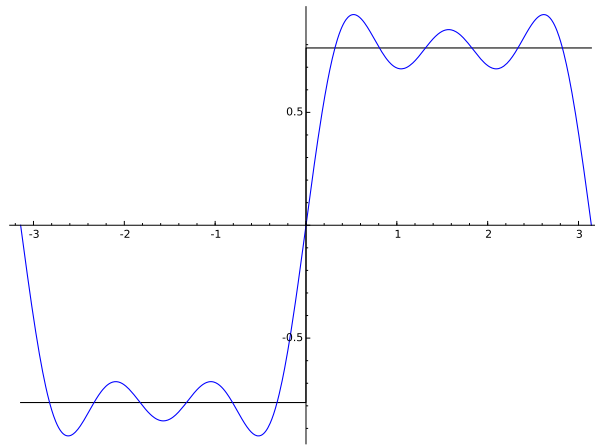
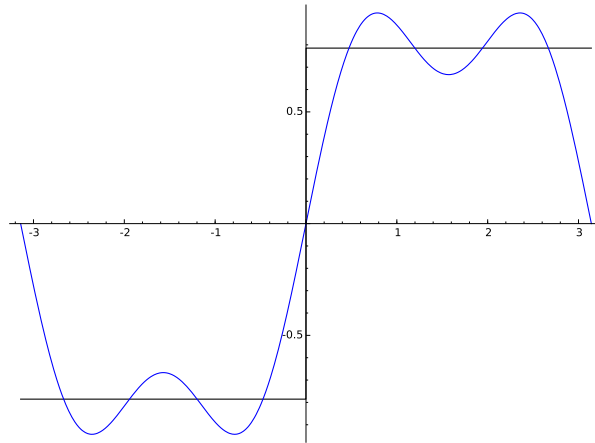
$$f(x) = \begin{cases} \pi/4 & \text{pour } x \in ]0, \pi[ \\ -\pi/4 & \text{pour } x \in ]-\pi, 0[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi. \end{cases}$$

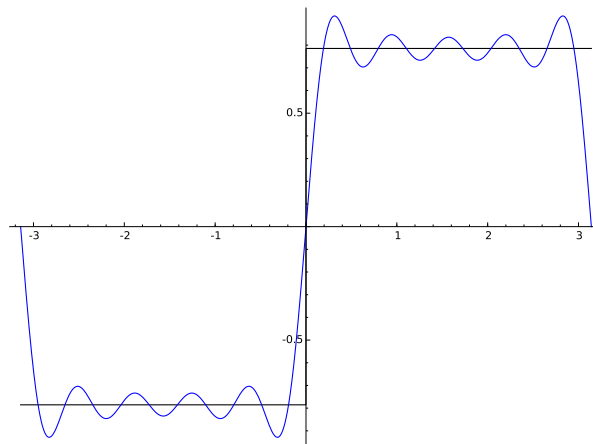
REMARQUES. 1) Comme les  $S_N(f)$  sont des fonctions continues, tandis qu'ici la limite  $f$  n'est pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

2) Le fait que les « bosses » restent élevées à proximité des points de discontinuité de  $f$  illustrent ce qu'on appelle le « phénomène de Gibbs » (le lecteur intéressé par ce phénomène pourra consulter, par exemple, [Vre03], §4.7).

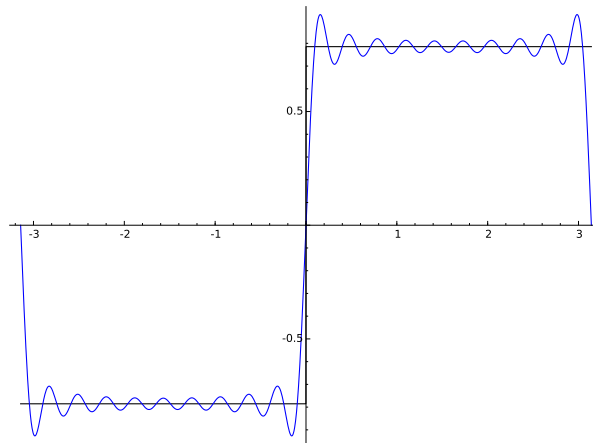
Dans les figures qui suivent, le graphe de  $f$  est en noir et le graphe de  $S_N(f)$  en bleu ; l'indice  $N$  se lit sur le nombre de maxima dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , i.e. on donne d'abord  $S_N(f)$  pour  $N = 2, 3, 4, 5$  :

<sup>(5)</sup>Ceci répond à une question de Lorenzo Cardenaz, merci à lui !

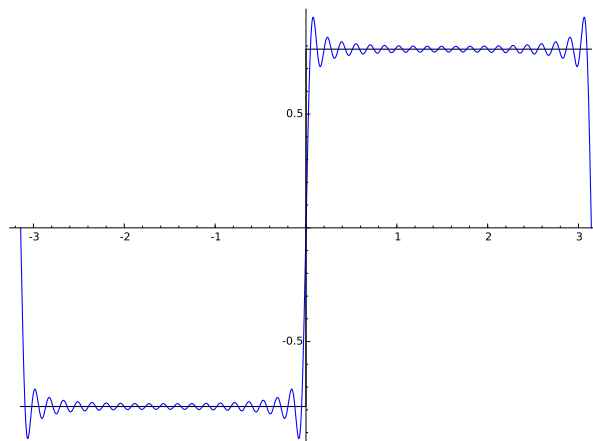




puis pour  $N = 10$  :



et pour  $N = 20$  :



**Remarque 21.4 (importante).** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique.

(a) Si  $f$  est *impair* alors  $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (puisque  $f \cos_n$  est impair).

(b) De même, si  $f$  est *pair* alors  $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  (puisque  $f \sin_n$  est impair).

Supposons de plus que  $f$  soit continue et  $C^1$  par morceaux, de sorte que le théorème précédent s'applique. Alors, si  $f$  est impair (resp. pair) on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n(f) \sin(nx) \quad \text{resp.} \quad f(x) = c_0(f) + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(nx).$$

On peut maintenant répondre à une question posée dans la section 19, sous l'hypothèse additionnelle que  $f$  soit dérivable par morceaux :

**Corollaire 21.5.** — Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dérivable par morceaux, telle que  $f(0) = 0 = f(\pi)$ . Alors on a, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx), \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

*Démonstration.* — Prolongeons  $f$  en une fonction impaire  $h$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  en posant  $h(x) = -f(-x)$  pour  $x \leq 0$ ; ceci est possible car  $f(0) = 0$ . De plus, comme  $f(\pi) = 0$  on a  $h(-\pi) = 0$ , donc  $h$  se prolonge en une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , impaire, continue et dérivable par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet et la remarque précédente, on a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h(x) = \sum_{n \geq 1} b_n(h) \sin(nx).$$

De plus, comme  $h$  est impaire, donc  $h \sin_n$  pair, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Le corollaire en découle. □

**Définition 21.6.** — Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit qu'elle converge *au sens de Cesàro* si la suite définie pour  $n \geq 1$  par

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(u_0 + \cdots + u_{n-1})$$

converge vers une limite  $L$ . On peut montrer (exercice!) que si  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  alors elle converge aussi au sens de Cesàro vers  $\ell$ . Par contre, la suite définie par  $u_n = (-1)^n$  ne converge pas, mais elle converge au sens de Cesàro vers  $1/2$  (exercice!).

On va maintenant démontrer le théorème suivant :

**Théorème 21.7 (Fejér (1900)).** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux.

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(S_n(f))(x)$  converge vers  $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$  au sens de Cesàro, i.e. si l'on pose pour  $N \geq 1$

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N} \left( S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x) \right)$$

alors on a  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ .

(b) De plus, si  $f$  est continue en tout point d'un intervalle  $[a, b]$ , alors la suite  $(\sigma_N(f))$  converge **uniformément** vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* — Rappelons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le « noyau de Dirichlet »  $D_n$  est la fonction continue  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$2\pi D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2 \cos(t) + \cdots + 2 \cos(nt).$$

Pour  $t \neq 0$ , on a montré que  $2\pi D_n(t) = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1}$  et en mettant en facteur  $e^{it/2}$  au numérateur et au dénominateur puis en simplifiant, on obtient que :

$$(1) \quad 2\pi D_n(t) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin(t/2)}.$$

Noter que la limite de cette expression lorsque  $t$  tend vers 0 est  $2n + 1$ , qui est bien égal à  $2\pi D_n(0)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a montré que

$$(2) \quad S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Introduisant le « noyau de Fejér »  $\delta_N : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$(3) \quad \delta_N(t) = \frac{1}{N} \left( D_0(t) + \cdots + D_{N-1}(t) \right)$$

on déduit de (2) la formule :

$$(4) \quad \sigma_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \delta_N(t) dt.$$

Rappelons aussi que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a montré que  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$ . On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t) dt = \frac{1}{N} (1 + \cdots + 1) = 1.$$

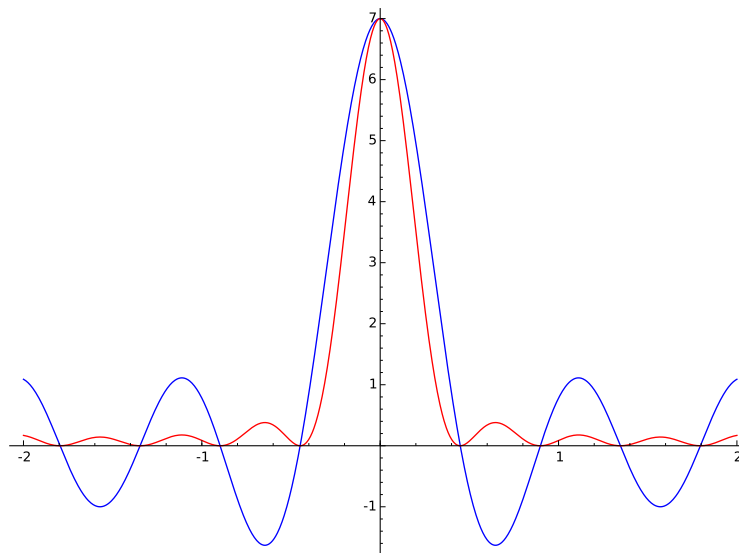
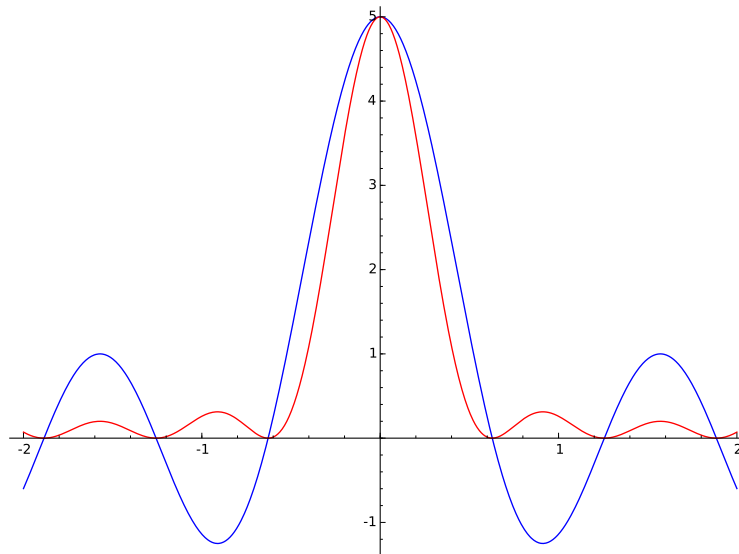
De plus, comme la fonction  $\delta_N$  est paire (comme chaque  $D_n$ ) on obtient plus précisément :

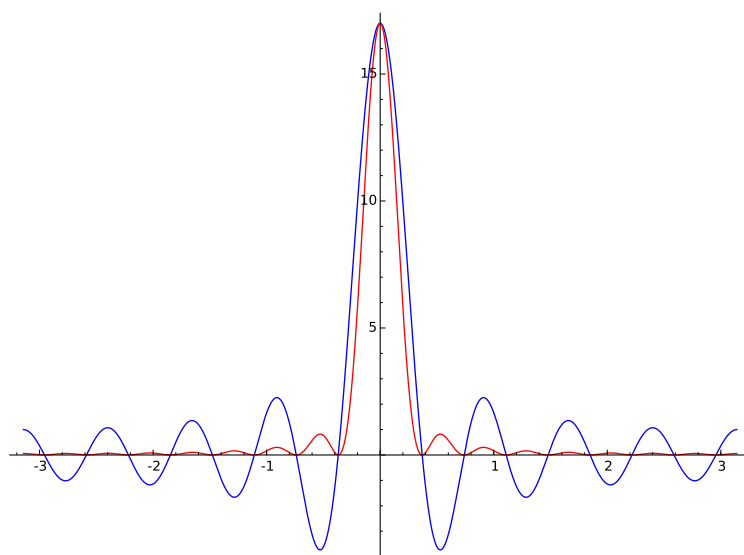
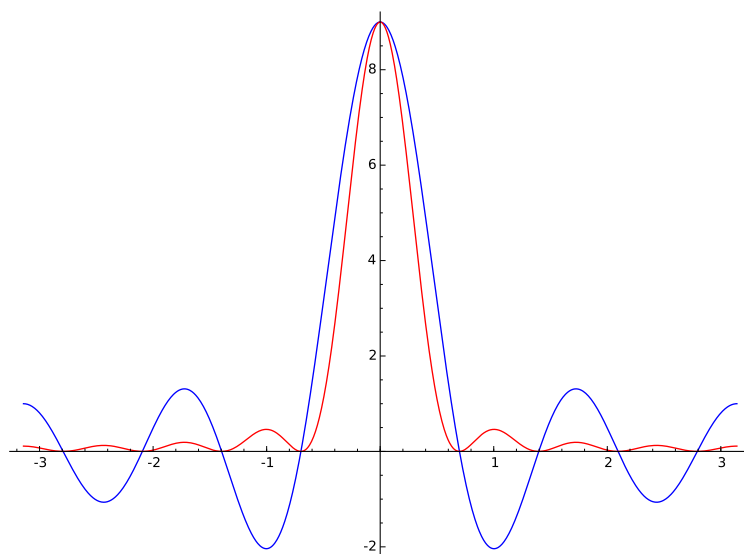
$$(5) \quad \int_{-\pi}^0 \delta_n(t) dt = \frac{1}{2} = \int_0^{\pi} \delta_n(t) dt.$$

Par conséquent, comme dans la démonstration du théorème de Dirichlet, on obtient l'égalité :

$$(6) \quad \sigma_N(f)(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-))\delta_N(t) dt + \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+))\delta_N(t) dt.$$

Pour comprendre la suite de la démonstration, il est utile de visualiser les graphes des fonctions  $D_N(t)$  (en bleu) et  $\delta_N(t)$  (en rouge) pour  $N = 2, 3, 4, 8$  :





Toutes les fonctions  $D_N$  et  $\delta_N$  sont d'intégrale égale à 1, mais les fonctions  $\delta_N$  sont positives et les figures ci-dessus suggèrent que lorsque  $N$  tend vers l'infini, l'intégrale est de plus en plus « concentrée » au voisinage de 0. Pour démontrer cela, commençons par exprimer  $\delta_N(t)$  comme suit. Pour  $t = 0$ ,  $\delta_N(0)$  vaut  $(1/2\pi N)$  fois la somme des  $N$  premiers entiers positifs impairs, qui vaut  $N^2$  (exercice : démontrer cela !) donc  $\delta_N(0) = N/2\pi$ . Pour  $t \neq 0$ , on a

$$2\pi\delta_N(t) = \frac{1}{N \sin(t/2)} \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)$$

et donc  $2\pi N \sin(t/2)\delta_N(t)$  est la partie imaginaire de la somme

$$\Delta_N(t) = e^{it/2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{int} = e^{it/2} \frac{e^{iNt} - 1}{e^{it} - 1}$$

et comme  $e^{it/2} - e^{-it/2} = 2i \sin(t/2)$  on obtient

$$\Delta_N(t) = \frac{1}{2i \sin(t/2)} (e^{iNt} - 1) = \frac{i}{2 \sin(t/2)} (1 - e^{iNt})$$

et donc sa partie imaginaire est  $\frac{1}{2 \sin(t/2)} (1 - \cos(Nt))$ . Comme  $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$  on obtient donc, pour  $t \neq 0$  dans  $[-\pi, \pi]$  :

$$(7) \quad \delta_N(t) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

(La limite lorsque  $t$  tend vers 0 de cette expression est  $(1/2\pi N)N^2 = N/2\pi = \delta_N(0)$ , ce qui est en accord avec le fait que  $\delta_N$  est continue sur  $[-\pi, \pi]$ , comme somme de fonctions continues.)

De la formule (7) on déduit le :

**Lemme 21.8.** — Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\alpha > 0$  il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  on ait :

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} \delta_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} \delta_N(t) dt < \varepsilon.$$

*Démonstration du lemme.* — Pour tout  $t \in [\alpha, \pi]$  on a  $\sin(Nt/2) \leq 1$  et  $\sin(t/2) \geq \sin(\alpha)/2$  (car la fonction sin est croissante sur  $[0, \pi/2]$ ), d'où

$$\int_{\alpha}^{\pi} \delta_N(t) dt \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2(\alpha/2)} \int_{\alpha}^{\pi} 1 dt \leq \frac{1}{2N \sin^2(\alpha/2)}$$

et ceci est  $< \varepsilon/2$  pour tout  $N > \frac{1}{\varepsilon \sin^2(\alpha/2)}$ . Comme la fonction  $\delta_N$  est paire on a l'inégalité désirée pour tout tel  $N$ .  $\square$

On peut maintenant achever la démonstration du théorème de Fejér. Comme la fonction  $f$  est continue par morceaux elle est bornée sur  $[-\pi, \pi]$ , donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier par  $2\pi$ -périodicité, donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$(8) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)| \leq M.$$

Prouvons le point (a) du théorème. Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  est continue par morceaux, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $y \in [x - \alpha, x[$  et  $z \in ]x, x + \alpha]$  on ait  $|f(y) - f(x-)| < \varepsilon$  et  $|f(z) - f(x+)| < \varepsilon$ . On a alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$

$$(9) \quad \begin{aligned} \left| \int_{-\alpha}^0 (f(x+t) - f(x-)) \delta_N(t) dt \right| &\leq \int_{-\alpha}^0 |f(x+t) - f(x-)| \delta_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\alpha}^0 \delta_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^0 \delta_N(t) dt = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$



et de même

$$(9') \quad \left| \int_0^\alpha (f(x+t) - f(x+)) \delta_N(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour cet  $\alpha$  fixé, il existe d'après le lemme précédent  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  on ait

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} \delta_N(t) + \int_\alpha^\pi \delta_N(t) dt < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Comme  $|f(y)| \leq M$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$  on a aussi, par passage à la limite,  $|f(x-)| \leq M$  et  $|f(x+)| \leq M$  et donc, pour tout  $N \geq N_0$  :

$$(10) \quad \left| \int_{-\pi}^{-\alpha} (f(x+t) - f(x-)) \delta_N(t) + \int_\alpha^\pi (f(x+t) - f(x+)) \delta_N(t) dt \right| \\ \leq \int_{-\pi}^{-\alpha} |f(x+t) - f(x-)| \delta_N(t) + \int_\alpha^\pi |f(x+t) - f(x+)| \delta_N(t) dt \\ \leq 2M \int_{-\pi}^{-\alpha} \delta_N(t) + 2M \int_\alpha^\pi \delta_N(t) dt < \varepsilon.$$

Combinant (6), (9), (9') et (10) on obtient que pour tout  $N \geq N_0$  on a

$$\left| \sigma_N(f)(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ , i.e. le point (a) du théorème est démontré.

Pour prouver le point (b), nous aurons besoin du théorème suivant. Pour la démonstration, on renvoie à [Po17], Chap. 2, Th. 6.2 ou [LFA], Th. III.10.9.

**Théorème 21.9 (Lebesgue).** — Soient  $a < b$  dans  $\mathbb{R}$ , soit  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'intervalles ouverts paramétrée par un ensemble arbitraire  $\Lambda$ . On suppose que l'intervalle  $[a, b]$  est contenu dans la réunion des  $U_\lambda$ . Alors il existe un sous-ensemble fini  $J$  de  $\Lambda$  tel que  $[a, b]$  soit déjà contenu dans la réunion des  $U_\mu$ , pour  $\mu \in J$ .

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 21.10 (Heine).** — Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que  $f$  est continue en tout point d'un intervalle  $[a, b]$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| < \alpha$  on ait  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Démonstration du théorème de Heine.* — Pour une démonstration utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass voir, par exemple, [Po17], Chap. 1, Th. 2.11. On donne ici une autre démonstration, utilisant le théorème de Lebesgue ci-dessus.

Pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\beta_x$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}$  vérifiant  $|x - y| < \beta_x$  on ait  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ . Alors  $[a, b]$  est contenu dans la réunion des intervalles ouverts  $I_x = ]x - \beta_x/2, x + \beta_x/2[$ . D'après le théorème de Lebesgue,  $[a, b]$  est donc contenu dans

un nombre fini de ces intervalles, correspondant à des points  $x_1, \dots, x_n$  de  $[a, b]$ . Posons  $\alpha_i = \beta_{x_i}/2$  et  $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Soient  $x \in [a, b]$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| < \alpha$ . Il existe au moins un indice  $i$  tel que  $x \in I_{x_i}$ , d'où  $|x - x_i| < \alpha_i$ . Comme  $\alpha \leq \alpha_i$  l'inégalité triangulaire entraîne :

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| \leq \alpha + \alpha_i \leq 2\alpha_i = \beta_{x_i}.$$

On a donc  $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$  et  $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2$  d'où, d'après l'inégalité triangulaire,  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .  $\square$

On peut maintenant achever la démonstration du point (b) du théorème de Fejér. Supposons que  $f$  soit continue en tout point d'un intervalle  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Heine, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$  et  $t \in ]-\alpha, \alpha[$  on ait  $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ . Comme dans la démonstration du point (a) on obtient alors, d'une part, que pour tout  $x \in [a, b]$  et  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$(9'') \quad \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x+t) - f(x)) \delta_N(t) dt \right| < \varepsilon$$

et, d'autre part, qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  on ait les inégalités (10), avec  $f(x-) = f(x) = f(x+)$  puisque  $f$  est continue sur  $[a, b]$ . En combinant (9'') et (10) on obtient donc que pour tout  $N \geq N_0$  et tout  $x \in [a, b]$  on a

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite de fonctions  $(S_N(f))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . Ceci achève la démonstration du théorème de Fejér.<sup>(6)</sup>  $\square$

Au passage, une conséquence du théorème de Fejér est le corollaire suivant.

**Corollaire 21.11.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux. Si, pour un réel  $x$ , la suite  $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell$ , alors  $\ell = (f(x+) + f(x-))/2$ .

*Démonstration.* — Si  $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , elle converge aussi vers  $\ell$  au sens de Cesàro (cf. 21.6). Or d'après le théorème de Fejér elle converge au sens de Cesàro vers  $(f(x+) + f(x-))/2$ .  $\square$

On déduit du théorème de Fejér le théorème suivant.

**Théorème 21.12 (Égalité de Parseval).** — Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique et continue par morceaux, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= \|f\|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \\ &= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2). \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup>Lipót Fejér, 1880-1959; il a démontré son théorème à l'âge de 20 ans.

*Démonstration.* — Compte tenu de la proposition 20.18, il s'agit de montrer que la suite croissante définie par  $u_N = \|S_N(f)\|^2$  converge vers  $\|f\|^2$ . D'après le point (1) du corollaire 20.14, on a

$$(1) \quad \|f\|^2 - \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2.$$

Supposons d'abord  $f$  **continu**. Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Fejér, il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ , on ait :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout  $N \geq N_0$ , on a

$$\|f - \sigma_N(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - \sigma_N(f)(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2.$$

D'autre part, la fonction  $\sigma_N(f)$  appartient au sous-espace  $W_N$  engendré par les fonctions  $e_n$ , pour  $n = -N, \dots, N$  et comme  $S_N(f)$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $W_N$ , le point (2) du corollaire 20.14 entraîne :

$$(2) \quad \|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sigma_N(f)\| \leq \varepsilon.$$

Combiné avec (1), ceci montre que  $\|S_N(f)\|^2$  converge vers  $\|f\|^2$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

Supposons maintenant que  $f$  soit seulement continue par morceaux (et toujours  $2\pi$ -périodique). Soit  $\varepsilon > 0$ . On voit facilement qu'il existe une fonction continue et  $2\pi$ -périodique  $g_\varepsilon$  telle que :

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_\varepsilon(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2 \quad \text{d'où} \quad \|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Voir la figure ci-dessous où le graphe de  $f$  (resp. de  $g_\varepsilon$ ) est représenté en noir (resp. en rouge) :

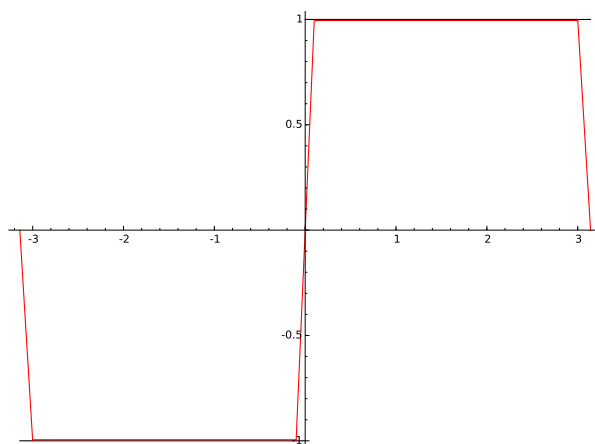


FIGURE 1. Approximation de  $f$  (en noir) par une fonction continue  $g_\varepsilon$  (en rouge)

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , notons  $S_N = S_N(f)$  et  $T_N = S_N(g_\varepsilon)$ . Alors  $S_N - T_N$  est la projection de  $f - g_\varepsilon$  sur  $W_N$  donc, d'après le point (1) du corollaire 20.14, on a

$$(4) \quad \|S_N - T_N\| \leq \|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après le résultat déjà prouvé pour la fonction continue  $g_\varepsilon$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  on ait

$$(5) \quad \|g_\varepsilon - T_N\| \leq \varepsilon.$$

On utilisant l'inégalité triangulaire et (3), (4) et (5), on obtient :

$$\forall N \geq N_0, \quad \|f - S_N\| \leq \|f - g_\varepsilon\| + \|g_\varepsilon - T_N\| + \|T_N - S_N\| \leq 3\varepsilon.$$

Combiné avec l'égalité (1), ceci montre que  $\|S_N(f)\|^2$  converge vers  $\|f\|^2$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . Ceci prouve le théorème de Parseval.  $\square$

**Compléments.** La suite de cette section donne des compléments, qui ne sont pas au programme de l'examen. On note encore  $V$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux. Il est muni de la semi-norme  $N_2$  définie par  $N_2(f) = \sqrt{(f | f)}$ , où

$$(f | f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

**Définition 21.13.** — On dit qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V$  « tend au sens  $L^2$  » vers une fonction  $f \in V$  si l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_2(f - f_n) = 0.$$

**Exemple 21.14.** — Le théorème de Parseval (ou sa démonstration) montre que pour tout  $f \in V$ , la suite de fonctions continues  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f$  au sens  $L^2$ .

**Remarque 21.15.** — **Attention**, il ne faut pas croire que si une suite de fonctions  $(f_n)$  tend au sens  $L^2$  vers une fonction  $f \in V$ , alors la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$  pour tout  $x$ .

Pour donner un contre-exemple simple, considérons plutôt l'espace des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continues par morceaux, muni de la semi-norme  $N_2$  définie par

$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Considérons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie comme suit : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x)$  est nul sauf dans les cas indiqués ci-dessous :

- $f_1(x) = 1$  pour tout  $x \in [0, 1]$ ,
- $f_2(x) = 1$  pour tout  $x \in [0, 1/2]$ ,
- $f_3(x) = 1$  pour tout  $x \in [1/2, 1]$ ,
- $f_4(x) = 1$  pour tout  $x \in [0, 1/3]$ ,
- $f_5(x) = 1$  pour tout  $x \in [1/3, 2/3]$ ,
- $f_6(x) = 1$  pour tout  $x \in [2/3, 1]$ ,
- $f_7(x) = 1$  pour tout  $x \in [0, 1/4]$ , etc.

i.e. pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k = 1, \dots, n$ ,  $f_{1+\dots+(n-1)+k}$  vaut 1 sur l'intervalle  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$  et 0 en dehors. Alors la suite  $(N_2(f_n))$  converge vers 0, donc la suite  $(f_n)$  tend au sens  $L^2$  vers la fonction nulle. Mais pour chaque  $x \in [0, 1]$  la suite  $(f_n(x))$  ne converge pas, car elle prend les valeurs 0 et 1, chaque valeur étant prise un nombre infini de fois.

**Remarque 21.16.** — Par contre, un théorème très difficile de Lennart Carleson (1966) montre que si  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue par morceaux, alors la suite  $(S_n(f)(x))$  converge vers  $f(x)$  pour « presque tout »  $x \in [-\pi, \pi]$ . Ceci signifie que le sous-ensemble  $E$  des  $x \in [-\pi, \pi]$  pour lesquels cela n'est pas vrai est *de mesure nulle*, c.-à-d. vérifie la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est  $< \varepsilon$  et telle que  $E$  est contenu dans la réunion des  $U_n$ . (Pour la théorie de la mesure et les espaces  $L^p$ , voir le cours d'intégration 3M263 de L3 ou [Rudin], Chapitres 1–3.)

## 22. Convergence normale pour les fonctions de classe $C^1$

**Théorème 22.1 (Dérivation).** — Soit  $f$  continue,  $2\pi$ -périodique, et  $C^1$  par morceaux. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $c_n(f') = inc_n(f)$ , et donc  $a_n(f') = nb_n(f)$  et  $b_n(f') = -na_n(f)$ .

On peut retenir ceci avec le slogan : « la série de Fourier de  $f'$  s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de  $f$  ».

*Démonstration.* — Pour commencer, supposons seulement que  $f$  est  $C^1$  par morceaux. On va calculer  $c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt$  par intégration par parties. Pour cela, on se place sur des intervalles où  $f$  est  $C^1$  : par hypothèse, il existe une subdivision finie  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_N = 2\pi$  telle que sur chaque intervalle  $[p_k, p_{k+1}]$ ,  $f$  coïncide avec une fonction  $h_k$  de classe  $C^1$ , telle que  $h_k(p_k) = f(p_k+)$  et  $h_k(p_{k+1}) = f(p_{k+1}-)$ . En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}} f'(t)e^{-int} dt = (f(p_{k+1}-)e^{-inp_{k+1}} - f(p_k+)e^{-inp_k}) + in \int_{p_k}^{p_{k+1}} f(t)e^{-int} dt.$$

Comme  $f$  est de plus supposée *continue*, on a  $f(p_k-) = f(p_k) = f(p_k+)$  pour tout  $k = 0, \dots, N$ , avec aussi  $f(p_N) = f(2\pi) = f(0) = f(p_0)$ . Par conséquent, en sommant les égalités ci-dessus, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = f(2\pi) - f(0) + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Le théorème en découle. □

**Remarque 22.1.1.** — Le théorème précédent est faux si  $f$  est seulement supposée  $C^1$  par morceaux : la fonction  $f$  de l'exemple 23.1 est constante par morceaux mais pas continue, on a  $b_n(f) \neq 0$  pour  $n$  impair tandis que  $c_n(f') = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Corollaire 22.2.** — Si  $f$  est continue,  $2\pi$ -périodique, et  $C^1$  par morceaux et si  $f'$  est dérivable par morceaux, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\frac{f'(x-) + f'(x+)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} in(c_n(f)e^{inx} - c_{-n}(f)e^{-inx}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(b_n(f)\cos(nx) - a_n(f)\sin(nx)).$$

*Démonstration.* — Comme  $f'$  est dérivable par morceaux alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S_N(f')(x)$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  vers  $(f'(x-) + f'(x+))/2$ , d'après le théorème de Dirichlet 21.3. D'autre part, d'après le théorème précédent, on a  $c_n(f') = inc_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  (d'où en particulier  $c_0(f') = 0$ ). Le corollaire en découle.  $\square$

**Corollaire 22.3 (Intégration).** — Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} F(x) - c_0(f)x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{in} (c_n(f)e^{inx} - c_{-n}(f)e^{-inx}). \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (-b_n(f)\cos(nx) + a_n(f)\sin(nx)). \end{aligned}$$

Si de plus  $f$  est continue, on peut retenir ceci avec le slogan : « une primitive de  $f$  s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de  $f$  (même si celle-ci ne converge pas en tout point vers  $f$ ) ».

*Démonstration.* — Posons  $c_0 = c_0(f)$ . Comme  $f$  est continue par morceaux, la fonction  $G : x \mapsto F(x) - c_0x$  est continue. D'autre part, elle est  $2\pi$ -périodique car pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a, d'après le lemme 21.1 :

$$G(x + 2\pi) - G(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt - 2\pi c_0 = \int_0^{2\pi} f(t) dt - 2\pi c_0 = 0.$$

De plus, d'après la preuve du lemme 21.1,  $G$  est  $C^1$  par morceaux : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$G'_g(x) = f(x-) - c_0, \quad G'_d(x) = f(x+) - c_0.$$

Donc, d'après le théorème de Dirichlet 21.3,  $G$  est en tout point  $x$  la somme de sa série de Fourier et, d'après le théorème 22.1, on a :

$$\forall n \neq 0, \quad c_n(f) = c_n(f - c_0) = inc_n(G)$$

d'où  $c_n(G) = c_n(f)/in$  pour  $n \neq 0$ . Enfin, on a

$$c_0(G) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(t) - c_0t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt - \frac{c_0}{4\pi} [t^2]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt.$$

Le corollaire en découle.  $\square$

**Théorème 22.4 (Convergence normale).** — Soit  $f$  continue,  $2\pi$ -périodique et  $C^1$  par morceaux. Alors :

- (i) La série  $|c_0(f)| + \sum_{n \geq 1} (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$  converge.  
(ii) Par conséquent, la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ .

*Démonstration.* — Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , posons  $c_n = c_n(f)$  et  $c'_n = c_n(f')$ . D'après le théorème 22.1, on a  $c_n = c'_n/in$  pour tout  $n \neq 0$ , et  $c'_0 = 0$ . Comme  $f'$  est continue par morceaux, l'inégalité de Bessel entraîne que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{n=-N}^N |c'_n|^2 \leq \|f'\|^2.$$

D'autre part, comme  $2ab \leq a^2 + b^2$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a pour tout  $n \neq 0$  :

$$|c_n| = \frac{|c'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left( |c'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Donc, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|c_0| + \sum_{n=1}^N (|c_n| + |c_{-n}|) \leq |c_0| + \frac{\|f'\|^2}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, ceci entraîne l'assertion (i). Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

Par conséquent, l'assertion (i) entraîne que la série de fonctions  $(S_N(f))$  converge normalement. D'autre part, d'après le théorème de Dirichlet 21.3, sa limite en tout point  $x$  est  $f(x)$ . Le théorème en découle.  $\square$

### 23. Exemples et applications

Dans cette section, on donne quelques exemples de calculs de coefficients de Fourier, avec des applications au calcul de la somme de certaines séries.

**Exemple 23.1.** — Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique,  $C^1$  par morceaux, définie par  $f(t) = -1$  pour  $t \in ]-\pi, 0[$ ,  $f(t) = 1$  pour  $t \in ]0, \pi[$  et  $f(-\pi) = 0 = f(0) = f(\pi)$ . Elle est impaire, donc on a  $a_n(f) = 0$  pour tout  $n$  et, pour  $n > 0$  :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Par conséquent,  $b_{2k}(f) = 0$  et  $b_{2k+1}(f) = \frac{4}{(2k+1)\pi}$ . D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Parseval 21.12, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \frac{4^2}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Notons  $I_2$  la somme ci-dessus, i.e. la somme des  $1/n^2$  pour  $n > 0$  impair, et notons  $P_2$  (resp.  $T_2$ ) la somme des  $1/n^2$  pour  $n > 0$  pair (resp. pour tout  $n > 0$ ). Alors  $T_2 = P_2 + I_2$  et, comme  $P_2 = (1/4)T_2$ , on en déduit que  $3T_2/4 = I_2$ , d'où :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} I_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exemple 23.2.** — Soit  $g$  la fonction  $2\pi$ -périodique telle  $g(t) = |t|$  pour  $t \in [-\pi, \pi]$ . Elle est  $C^1$  par morceaux et continue. De plus, elle est paire, donc pour tout  $n$  on a  $b_n(f) = 0$  et :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt.$$

Pour  $n = 0$ , on obtient  $a_0(g) = \pi$ . Pour  $n > 0$ , on intègre par parties :

$$\int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \left[ \frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{1}{n} \left[ \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

On a donc  $a_{2k+1}(g) = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}$  pour tout  $k \geq 0$  et  $a_{2k}(g) = 0$  pour  $k \geq 1$ . D'après le théorème de Dirichlet, on a donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Notons que pour  $x = \pi$ , ceci redonne l'égalité  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

D'autre part,  $\|g\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$  et, d'après l'égalité de Parseval 21.12, ceci est égal à :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{12} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}.$$

À nouveau, notons  $I_4$  la somme ci-dessus et  $P_4$  (resp.  $T_4$ ) la somme des  $1/n^4$  pour  $n > 0$  pair (resp. pour tout  $n > 0$ ). On a  $T_4 = P_4 + I_4$  et  $P_4 = (1/16)T_4$ , d'où  $15T_4/16 = I_4$  et



donc :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} I_4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour d'autres exemples, voir 6.3.11–14 dans [Delab09] ou [Delab10], ou [LFA], §XII.4.

## 24. L'exemple de du Bois-Reymond

Dans cette section,  $f$  désigne une fonction continue  $2\pi$ -périodique et  $(S_n)$  désigne la suite des sommes partielles de la série de Fourier de  $f$ . Le théorème de Dirichlet montre si  $f$  est  $C^1$  par morceaux alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(S_n(x))$  converge vers  $f(x)$ . On peut montrer qu'il en est de même si  $f$  est *monotone par morceaux*, i.e. s'il existe une subdivision finie  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_N = \pi$  telle que  $f$  soit monotone (croissante ou décroissante) sur chaque intervalle  $[a_{i-1}, a_i]$  (voir par exemple [Zyg59], Chap. II, Th. 8.1).

Le premier exemple de fonction continue  $2\pi$ -périodique dont la série de Fourier diverge en un point a été donné en 1871 par Paul du Bois-Reymond. Nous donnons ici une variante de cet exemple, dû à Henri Lebesgue (voir [Leb06], Chap. IV, §44).

On va construire une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $2\pi$ -périodique et paire, telle que la suite  $(S_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite qui tend vers  $+\infty$ . D'après les formules (1) et (2) dans la preuve du théorème de Fejér on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} dt.$$

Pour estimer  $S_n(0)$ , on va remplacer l'intégrale ci-dessus par une intégrale plus simple. Pour  $t \neq 0$  dans  $[-\pi, \pi]$ , on a

$$\frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} = \sin(nt) \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} + \cos(nt).$$

Considérons la fonction  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour  $t \neq 0$  par

$$g(t) = \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t} = \frac{t \cos(t/2) - 2 \sin(t/2)}{t \sin(t/2)}.$$

Comme, pour  $u$  tendant vers 0, on a  $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$  et  $\sin(u) = u + o(u^2)$ , on voit que  $g(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0, donc  $g$  se prolonge en une fonction continue sur  $[-\pi, \pi]$ . On a donc

$$S_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt + b_n(fg) + a_n(f),$$

où  $a_n(h)$  et  $b_n(h)$  désignent les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction continue  $h$ . D'après le corollaire 20.20,  $b_n(fg)$  et  $a_n(f)$  tendent vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  donc

pour montrer qu'une sous-suite de  $(S_n(0))$  tend vers  $+\infty$ , il suffit de montrer cela pour la suite de terme général

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

(la 2ème égalité résultant de la parité de  $f$ ). Désormais, on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T_n = \int_0^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt.$$

Pour définir  $f$  sur  $[0, \pi]$ , on fixe une suite strictement croissante  $(n_k)_{k \geq 1}$  d'entiers  $\geq 2$  et une suite strictement décroissante  $(c_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs convergeant vers 0. On pose  $a_0 = 1$  et  $a_k = n_1 \cdots n_k$  pour tout  $k \geq 1$ ; on a donc  $a_k/a_{k-1} = n_k$  pour tout  $k \geq 1$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on définit l'intervalle  $I_k$  par :

$$I_k = \left[ \frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}} \right]$$

et l'on pose  $f(x) = c_k \sin(a_k x)$  pour  $x \in I_k$  et  $f(0) = 0$ . Alors  $f$  est continue sur chaque  $I_k$  et nulle en chaque extrémité, donc continue sur  $]0, \pi]$ . De plus, comme les  $c_k$  tendent vers 0,  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, donc  $f$  est aussi continue en 0.

Pour tout  $k \geq 1$ , posons

$$(1) \quad J_k = T_{a_k} = \int_0^{\pi/a_k} f(t) \frac{\sin(a_k t)}{t} dt + \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} f(t) \frac{\sin(a_k t)}{t} dt + \int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} f(t) \frac{\sin(a_k t)}{t} dt$$

et montrons que, pour un choix approprié des  $n_k$  et  $c_k$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = +\infty$ . Notons  $J'_k$ ,  $J''_k$  et  $J'''_k$  les trois intégrales ci-dessus. On sait que  $|\sin(x)| \leq x$  pour tout  $x \geq 0$ , d'où  $|\sin(a_k t)/t| \leq a_k$ .

Pour tout  $t \in [0, \pi/a_k]$  on a  $|f(t)| \leq c_{k+1}$ , et donc

$$(2) \quad |J'_k| \leq \frac{\pi}{a_k} a_k c_{k+1} = \pi c_{k+1}.$$

Par conséquent,  $J'_k$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ .

Pour  $p < k$ , on a

$$\left| \int_{\pi/a_p}^{\pi/a_{p-1}} f(t) \frac{\sin(a_k t)}{t} dt \right| \leq c_p \left| \int_{\pi/a_p}^{\pi/a_{p-1}} \frac{dt}{t} \right| = c_p \log(a_p/a_{p-1}) = c_p \log(n_p)$$

et donc

$$(3) \quad |J'''_k| \leq \sum_{p=1}^{k-1} c_p \log(n_p).$$

Enfin, comme  $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ , on a

$$(4) \quad J''_k = \frac{c_k}{2} \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{1}{t} dt - \frac{c_k}{2} \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos(2a_k t)}{t} dt.$$

Si l'on pose  $h_k(t) = \cos(2a_k t)$  alors pour tout  $x < y$  dans  $\mathbb{R}$  on a

$$\int_x^y h_k(t) dt = \frac{\sin(a_k y) - \sin(a_k x)}{2a_k}$$

et ceci est majoré en valeur absolue par  $K = 1/a_k$ . Comme la fonction  $g : t \mapsto 1/t$  est décroissante, il résulte de l'inégalité d'Abel pour les intégrales (Chap. 4, Th. 18.1) que l'on a :

$$\left| \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos(2a_k t)}{t} dt \right| \leq g(\pi/a_k)K = \frac{1}{\pi}.$$

Par conséquent, le terme le plus à droite dans (4) est majoré en valeur absolue par  $c_k/2\pi$  donc tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ .

Enfin, le premier terme du membre de droite dans (4) est  $\frac{c_k}{2} \log(a_k/a_{k-1}) = \frac{c_k}{2} \log(n_k)$ . En négligeant les termes qui tendent vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ , il suffit donc de montrer que

$$A_k = \frac{c_k \log(n_k)}{2} + J_k'''$$

tend vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Or, d'après (3), on a :

$$A_k \geq \frac{c_k \log(n_k)}{2} - |J_k'''| \geq \frac{c_k \log(n_k)}{2} - \sum_{p=1}^{k-1} c_p \log(n_p) = B_k.$$

Choisissons maintenant la suite  $u_p = c_p \log(n_p)$  de façon à ce que  $B_k$  tende vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ . L'idée de Lebesgue ([Leb06], Chap. IV, §44) est de prendre  $u_p = Cr^p$  avec  $C > 0$  et  $r > 1$ ; alors

$$B_k = \frac{C}{2} r^p - C \frac{r^p - 1}{r - 1} = Cr^p \frac{r - 3}{2(r - 1)} + \frac{C}{r - 1}$$

et ceci tend vers  $+\infty$  si  $r > 3$ . Prenons donc  $r = 4$  et, par exemple,  $c_p = 1/p$ , alors  $\log(n_p) = pC 4^p$  et pour que  $n_p$  soit un entier on peut prendre  $C = \log(2)$ , d'où finalement  $n_p = 2^{p4^p}$ .

Références citées dans ce chapitre :

[Delab09] Sylvie Delabrière, Suites, séries, intégrales, Ellipses, 2009.

[Delab10] Sylvie Delabrière, polycopié de LM260 (Séries et intégrales), cours de L2 à l'UPMC, 2010-2014, disponible à l'adresse : [www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/](http://www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/)

[Leb06] Henri Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, 1906 (disponible en ligne).

[LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, Cours de mathématiques, t. 2 Analyse (4<sup>e</sup> édition), Dunod, 1977.

[Po17] Patrick Polo, polycopié de 2M216, cours de L2 à l'UPMC 2016-2018, disponible sur la page web de l'auteur.

[Vre03] Anders Vretblad, Fourier analysis and its applications, Springer-Verlag, 2003.

[Zyg59] Antoni Zygmund, Trigonometric series (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, 1959.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>0. Rappels sur les séries numériques et les suites de fonctions</b> .....	1
1. Suites numériques et complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ .....	1
2. Séries numériques : critères de convergence absolue.....	3
3. Séries numériques : l'inégalité d'Abel.....	4
4. Convergence uniforme de suites et séries.....	7
<b>1. Séries normalement convergentes et exponentielle complexe</b> .....	11
5. Fonctions $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continues ou dérivables.....	11
6. Séries absolument convergentes et produit de Cauchy.....	13
7. Séries normalement convergentes ; cas de l'exponentielle.....	14
8. Autres exemples, fonction $\zeta$ .....	17
<b>2. Séries entières</b> .....	19
9. Continuité, dérivation et primitivation sur le disque de convergence.....	19
10. Convergence en un point du bord : théorème d'Abel.....	26
11. Séries de Dirichlet et théorème d'Abel.....	30
<b>3. Intégrales dépendant d'un paramètre</b> .....	35
12. Rappels sur les fonctions de plusieurs variables.....	35
13. Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre.....	41
<b>4. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre</b> .....	45
15. Intégrales uniformément convergentes.....	45
16. Convolution et équation de la chaleur.....	55
17. Transformées de Fourier et de Laplace.....	59
18. L'inégalité d'Abel pour les intégrales.....	67
<b>5. Séries de Fourier</b> .....	73

19. Motivation : équation de la chaleur dans une barre.....	73
20. Coefficients de Fourier et inégalité de Bessel.....	76
21. Théorèmes de Dirichlet et Fejér, égalité de Parseval.....	87
22. Convergence normale pour les fonctions de classe $C^1$ .....	101
23. Exemples et applications.....	103
24. L'exemple de du Bois-Reymond.....	105
<b>6. Équations différentielles.....</b>	<b>109</b>
23. Généralités.....	109
24. Séries entières solutions d'une EDO linéaires à coefficients analytiques.....	113
25. EDO linéaires à coefficients constants.....	118
26. EDO d'une variable complexe.....	124
<b>Bibliographie.....</b>	<b>129</b>

## BIBLIOGRAPHIE

- [Abel] Niels Henrik Abel, Recherches sur la série  $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$ , paru en allemand dans le Journal de Crelle, t.1 (1826) et n°XIV (p. 219) de ses Oeuvres complètes, tome I, Grøndahl & Søn, 1881 (disponible en ligne).
- [Baire] René Baire, Leçons sur les théories générales de l'analyse, tome II, Gauthier-Villars, 1908 (disponible en ligne).
- [Bromwich] Thomas John l'Anson Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, Mac Millan, 1908 (disponible en ligne).
- [Cartan] Henri Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961.
- [Cauchy] Augustin-Louis Cauchy, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1ère partie Analyse algébrique, 1821 (disponible en ligne).
- [Chem16] Sophie Chemla, Notes de cours 2M260 (2016-17), disponible sur la page de l'auteure.
- [Delab09] Sylvie Delabrière, Suites, séries, intégrales, Ellipses, 2009.
- [Delab10] Sylvie Delabrière, Séries et intégrales, cours LM260 à l'UPMC, 2010-2014, disponible à l'adresse : [www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/](http://www.licence.math.upmc.fr/UE/LM260/)
- [Delab16] Sylvie Delabrière, Initiation aux suites, aux intégrales et à l'algèbre linéaire en L1, Ellipses, 2016.
- [Dirichlet] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, F. Vieweg und Sohn, 1863 (disponible en ligne).
- [dS17] Joao Pedro dos Santos, polycopié de 2M261, cours de L2 à l'UPMC, 2016-17, disponible sur la page de l'auteur.
- [Goursat] Édouard Goursat, Cours d'Analyse mathématique, tome I, 3ème édition, Gauthier-Villars, 1917 (la 2ème édition, de 1910, est disponible en ligne).

- [Hoch] Harry Hochstadt, *Differential equations*, Dover, 1975.
- [Knopp] Konrad Knopp, *Theory and application of infinite series* (transl. from German), Blackie & Son, 1928, 2nd ed. 1951 (disponible en ligne).
- [Lang96] Serge Lang, *Undergraduate Analysis* (2nd edition), Springer-Verlag, 1996.
- [Leb06] Henri Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Gauthier-Villars, 1906 (disponible en ligne).
- [LD16] Hervé Le Dret, polycopié de 3M236, cours de L3 à l'UPMC, 2012-2016, disponible sur la page de l'auteur.
- [LFA] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques, t. 2 Analyse* (éditions ultérieures par J.-M. Arnaudiès et Henri Fraysse), Dunod, 1977.
- [LFA4] Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques, t. 4 Équations différentielles et intégrales multiples* (éditions ultérieures par J.-M. Arnaudiès et Henri Fraysse), Dunod, 1977.
- [Lerner] Nicolas Lerner, *Fonctions classiques*, Cours de M1 à l'UPMC (2016-17), disponible sur la page de l'auteur.
- [Newton] Isaac Newton, *The Method of Fluxions and infinite series* (traduit du texte original en latin par John Colson), 1736, disponible en ligne.
- [Po13] Patrick Polo, polycopié de LM270, cours de L2 à l'UPMC, 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur.
- [Po17] Patrick Polo, polycopié de l'UE 2M216, cours de L2 à l'UPMC, 2016-2018, disponible sur la page de l'auteur.
- [Riemann] Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Habilitationsschrift, 1854), trad. française : Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, p.225 in : *Oeuvres mathématiques de Riemann* (trad. L. Laugel), Gauthiers-Villars, 1898 (disponible en ligne).
- [Rudin] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1980.
- [Vre03] Anders Vretblad, *Fourier analysis and its applications*, Springer-Verlag, 2003.
- [WW] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson, *A course of modern analysis*, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1920 (disponible en ligne).
- [Zyg59] Antoni Zygmund, *Trigonometric series* (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, 1959.