Amphi B, feuille d'exercices n° 1 : exponentielle complexe, produit de Cauchy, normes et topologie sur $\mathbb{K}^n$, exponentielles de matrices

Exercice 1 (Exponentielle complexe)**.** Pour tout réel t on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$ les parties réelle et imaginaire de $\exp(it)$. D'après le cours, on a $|\exp(it)| = 1$,

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \sum_{n\geqslant 3}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad (\dagger)$$

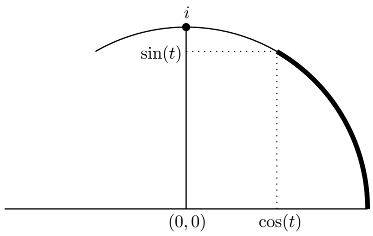
$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (\ddagger)$$

et cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $\cos'(t) = -\sin(t)$ et $\sin'(t) = \cos(t)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \,]0, 2]$ on a $\dfrac{t^n}{n!} > \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!}$.
2. En utilisant que les séries ($\dagger$) et ($\ddagger$) sont à termes de signes alternés, en déduire que pour tout $t \in \,]0, 2]$ on a

$$\sin(t) \geqslant t - \frac{t^3}{6} > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos(t) \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}.$$

Par conséquent, la fonction cos décroît strictement sur $[0, 2]$. Donc pour tout $t \in [0, 2]$ la fonction cos est une bijection décroissante de $[0, t]$ sur $[\cos(t), 1]$, et donc l'image par $s \mapsto \exp(is)$ de $[0, t]$ est l'arc de cercle situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$ **au-dessus** du segment $[\cos(t), 1]$, cf. la figure ci-dessous :



Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 2]$ tel que $e^{i\alpha} = i$, puis que $t \mapsto \exp(it)$ est périodique de période 4α.

3. En utilisant ce qui précède, montrer que $\cos(2) < \dfrac{-1}{3} < 0$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 2]$ tel que $\cos(\alpha) = 0$, et qu'alors on a :
   (a) $\sin(\alpha) = 1$ et donc $\exp(i\alpha) = i$.
   (b) L'image par $t \mapsto \exp(it)$ de $[0, \alpha]$ est le quart de cercle C joignant les nombres complexes 1 et i.
4. Montrer que $e^{4i\alpha} = 1$, puis que $\exp(i(t + 4\alpha)) = \exp(it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\exp(i\beta) = 1$. Remplaçant β par $\beta - 4k\alpha$, où k est le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $4k\alpha \leqslant \beta$, on peut supposer que $0 \leqslant \beta < 4\alpha$. Posons alors $z = \exp(i\beta/4)$.

5. Montrer, d'une part, que $z \in \{\pm 1, \pm i\}$ et, d'autre part, que $\cos(\beta/4) > 0$. En déduire que $z = 1$, puis que $\beta = 0$.

Ce qui précède montre que la période de $i \mapsto \exp(it)$ est exactement 4α. On **définit** π par $2\pi = 4\alpha$, d'où $\alpha = \pi/2$.

6. Montrer que l'application $z \mapsto iz$, c.-à-d. $x + iy \mapsto -y + ix$ est une bijection de C sur le quart de cercle C' joignant i à -1. En particulier, on a $\exp(i\pi) = -1$.

On note D le demi-cercle supérieur et D' le demi-cercle inférieur.

7. En utilisant que $D' = \{-z \mid z \in D\}$, montrer que l'application $t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de groupes **surjectif** de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité S^1, et que son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$.
8. Montrer que tout $z \in \mathbb{C}^\times$ s'écrit sous la forme $z = \rho \exp(i\theta)$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ unique et $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$.
9. En utilisant que $\exp(a + ib) = \exp(a)\exp(ib)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $z \mapsto \exp(z)$ est un morphisme de groupes **surjectif** de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^\times$ et que son noyau est le sous-groupe $2i\pi\mathbb{Z}$. (Commencer par observer que si $\exp(z) = 1$ alors $|\exp(z)| = 1$, puis utiliser la question (7).)

Exercice 2 (Produit de Cauchy)**.** Soit A la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrez que A est convergente, mais pas absolument convergente.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$. Montrer que $|c_n| \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 (Normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)**.** On utilise la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on note $|\lambda|$ sa valeur absolue. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall u \in E, \qquad N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

(ii) $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u).$

(iii) (Inégalité triangulaire) $\forall u, v \in E, \qquad N(u + v) \leqslant N(u) + N(v).$

1. Montrer que l'application $N_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle « norme du sup » ou « norme ∞ ».
2. On considère sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire standard, défini par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_2(x) = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. On « rappelle » que le produit scalaire est symétrique, i.e. $(y \mid x) = (x \mid y)$, linéaire en chaque variable, i.e. $(\lambda x + x' \mid y) = \lambda(x \mid y) + (x' \mid y)$ et de même pour la seconde variable, et vérifie

$(x \mid x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. En utilisant ces propriétés, montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $y \neq 0$, on a

$$0 \leqslant N_2\left(x - \frac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y\right)^2 = (x \mid x) - \frac{(x \mid y)^2}{(y \mid y)}$$

avec égalité si et seulement si $x = \dfrac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(*) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad |(x \mid y)| \leqslant N_2(x) N_2(y),$$

avec égalité si et seulement si $y = 0$ ou $x = \dfrac{(x \mid y)}{(y \mid y)} y$. En utilisant $(*)$, montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad N_2(x + y) \leqslant N_2(x) + N_2(y).$$

En déduire que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}^n$, appelée la norme **euclidienne**.

3. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

4. Pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $N_2(z) = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$. Montrer que N_2 est une norme sur $\mathbb{C}^n$. Indication : pour l'inégalité triangulaire, observer qu'en écrivant $z_k = a_k + i b_k$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, on a

$$N_2(z) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2}$$

donc, si l'on identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ via $(z_1, \dots, z_n) = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ alors N_2 coïncide avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{2n}$.

5. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, montrer que

$$N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{n} N_\infty(x).$$

6. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) la série $\sum_{k \geqslant 0} N_2(u_k)$ converge ; (b) la série $\sum_{k \geqslant 0} N_\infty(u_k)$ converge. Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ est **absolument convergente**.

7. Montrer que si la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ est absolument convergente, elle est convergente. (Utiliser que $\mathbb{R}^d$ est complet.)

   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application $I \to \mathbb{R}^d$ et $f_1, \dots, f_d$ ses composantes, i.e. $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$ pour tout $t \in I$. Soit $t_0 \in I$.

8. On dit que f est **continue** en t_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $N_\infty(f(t) - f(t_0)) < \varepsilon$ pour tout $t \in I$ tel que $|t - t_0| < \delta$. Montrer que f est continue en t_0 si et seulement si chaque f_i l'est.

9. On dit que f est **dérivable** en t_0, de vecteur dérivé $u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big) = u$$

c.-à-d. si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$N_\infty\Big(\frac{1}{t - t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big) - u\Big) < \varepsilon$$

pour tout $t \in I$ tel que $|t - t_0| < \delta$. Montrer que ceci est le cas si et seulement si chaque f_i est dérivable en t_0, de dérivée u_i.

Exercice 4 (Boules ouvertes et ouverts)**.** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, N une norme sur E. Pour tout $u_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$B_N(u_0, r) = \{u \in E \mid N(u - u_0) < r\}$$

et on l'appelle la *boule ouverte* de centre u_0 et de rayon r. On définit de même la *boule fermée* :

$$\overline{B}_N(u_0, r) = \{u \in E \mid N(u - u_0) \leqslant r\}.$$

1. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner les boules de centre $u_0 = (0, 0)$ et de rayons 1 et $\sqrt{2}$, pour les normes N_2 et N_∞.
2. On dit qu'une partie U de E est un **ouvert** si pour tout $u \in U$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule $B(u, r)$ soit contenue dans U. Montrer que toute boule ouverte est un ouvert. (Utiliser l'inégalité triangulaire.)

Exercice 5 (Exponentielles de matrices)**.** On utilise la lettre $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_d(\mathbb{K})$ on pose :

$$\|A\| = N_\infty(A) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant d} |a_{ij}|.$$

1. Pour tout $A, B \in M_d(\mathbb{K})$, montrer que $\|AB\| \leqslant d\,\|A\|\,\|B\|$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^n\| \leqslant d^{n-1}\,\|A\|^n \leqslant d^n\,\|A\|^n$.
2. Montrer que la série $\exp(A) = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente (cf. exercice 3).
3. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la série de fonctions $f_n : t \mapsto (t^n/n!)A^n$ converge normalement sur $[-R, R]$. Puis montrer que l'application $\mathbb{R} \to M_d(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tA)$ est continue.
4. Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a $\exp((s + t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$.
5. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to M_d(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable en 0, puis en tout $t \in \mathbb{R}$.