Feuille de TD no. 1

Dans la suite, tous les anneaux considérés sont commutatifs et l'on écrira « Λ-algèbre » au lieu de « Λ-algèbre commutative ».

Exercice 1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles et, pour tout objet X de $\mathscr{C}$, on désigne par h_X l'objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ défini par

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \qquad \text{pour tout} \quad Y \in \mathscr{C}.$$

On rappelle le lemme de Yoneda : pour tout objet F de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a une bijection canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X), \qquad \phi \mapsto \phi_X(\mathrm{id}_X).$$

(1) Soit F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit F est *représentable* s'il existe un couple (X, ϕ) où X est un objet de $\mathscr{C}$ et ϕ un isomorphisme $h_X \xrightarrow{\sim} F$. Montrer que, dans ce cas, le couple (X, ϕ) est unique à isomorphisme unique près.

(2) On suppose que les produits finis existent dans $\mathscr{C}$ et que $\mathscr{C}$ possède un objet final ω. Soit X un objet de $\mathscr{C}$ tel que le foncteur h_X soit un foncteur en groupes, i.e. $h_X(Y)$ est un groupe pour tout objet Y et $h_X(f) : h_X(Y) \to h_X(Z)$ est un morphisme de groupes, pour tout morphisme $f : Z \to Y$ dans $\mathscr{C}$. Montrer alors que X est un *groupe* dans la catégorie $\mathscr{C}$, i.e. il existe dans $\mathscr{C}$ des morphismes $m : X \times X \to X$, $e : \omega \to X$ et $\iota : X \to X$ tels que les diagrammes ci-dessous soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "m\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \times m"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, e)"] \arrow[d, "(e, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, \iota)"] \arrow[d, "(\iota, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[dr, "e"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd}$$

où l'on a noté $e : X \to X$ la composée de l'unique morphisme $X \to \omega$ avec $e : \omega \to X$.

Exercice 2. — Soit Λ un anneau commutatif et $\mathscr{C}$ la catégorie des Λ-schémas affines. Un groupe dans $\mathscr{C}$ est appelé un Λ-schéma en groupes.

(1) Montrer qu'un objet $G = \mathrm{Spec}(A)$ de $\mathscr{C}$ est un Λ-schéma en groupes si et seulement si A est muni d'une structure de Λ-algèbre de Hopf.

(2) Soit $H = \mathrm{Spec}(B)$ un second Λ-schéma en groupes et soit $f : H \to G$ un morphisme de Λ-schémas, donné par un morphisme de Λ-algèbres $\phi : A \to B$. Montrer que f est un morphisme de schémas en groupes ssi ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf, et que ceci est le cas ssi $\Delta_B \circ \phi = (\phi \circ \phi) \circ \Delta_A$ (i.e. que les conditions $\varepsilon_B \circ \phi = \varepsilon_A$ et $\tau_B \circ \phi = \phi \circ \tau_A$ sont automatiquement vérifiées).

(3) Expliciter les structures d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}[\mathbb{G}_a]$, $\mathbb{Z}[\mathbb{G}_m]$ et $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n]$.

Exercice 3. — Soit k un anneau commutatif et $G = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma en groupes. On note $k[\epsilon] = k \oplus k\epsilon$, où $\epsilon^2 = 0$. (Cette variable de carré nul ϵ n'est pas à confondre avec l'augmentation $\varepsilon : A \to k$.) Pour toute k-algèbre R, on pose $R[\epsilon] = R \otimes_k k[\epsilon] = R \oplus R\epsilon$. Le morphisme de k-algèbres $R[\epsilon] \to R$ envoyant ϵ sur 0 induit un morphisme de groupes $G(R[\epsilon]) \to G(R)$ et l'on note $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ le noyau de ce morphisme. Ceci définit un foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ de la catégorie des k-algèbres dans celle des groupes.

(1) Montrer que $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ s'identifie au R-module $\mathrm{Der}_\varepsilon(A, R)$ des applications k-linéaires $\delta : A \to R$ telles que, pour tout $a, b \in A$,

$$\delta(ab) = \varepsilon(a)\delta(b) + \varepsilon(b)\delta(a).$$

Pour un tel δ, montrer que $\delta(1_A) = 0$.

(2) Soit $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Montrer que tout δ comme ci-dessus est déterminé par sa restriction à $\mathfrak{m}$, puis que $\mathrm{Der}_\varepsilon(A, R) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, R)$.

(3) Montrer que via l'identification précédente, la structure de groupe de $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ (induite par celle de $G(R[\epsilon])$) coïncide avec la structure de groupe abélien du R-module $\mathrm{Der}_\varepsilon(A, R)$.

(4) Si k est noethérien et si A est une k-algèbre de type fini, montrer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(k)$ sont des k-modules de type fini.

(5) Si $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un k-module **libre** de rang fini montrer que l'application naturelle $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(k) \otimes_k R \to \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ est un isomorphisme.

Exercice 4. — Soit R un système de racines dans V, irréductible et de rang ≥ 2. On fixe un produit scalaire $(\ ,\ )$ sur V invariant par $W = W(R)$ et pour tout $x \in V$ on pose $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

(1) On suppose R réduit. En utilisant la classification, montrer que l'ensemble des normes $\|\alpha\|$, pour $\alpha \in R$, a au plus deux éléments.

Désormais, on suppose R **non réduit**. On dit qu'une racine α est *indivisible* si $\alpha/2 \notin R$ et l'on note R' l'ensemble de ces racines. On suppose de plus que les éléments de R' de longueur minimale sont de longueur 1.

(2) Montrer que R' est un système de racines réduit dans V, que $W(R') = W(R)$, et que R' est irréductible.

(3) Soit $\alpha \in R'$ telle que $2\alpha \in R$. Montrer qu'il existe $\gamma \in R'$ non proportionnelle et non orthogonale à α. En utilisant la classification des systèmes de racines de rang 2, montrer que $\|\gamma\| = \sqrt{2}$.

(4) Pour $r = 1, \sqrt{2}, 2$, on note R_r l'ensemble des racines de longueur r. Montrer que $R = R_1 \cup R_{\sqrt{2}} \cup R_2$ et $R' = R_1 \cup R_{\sqrt{2}}$.

(5) Montrer que deux éléments non proportionnels de R_1 sont orthogonaux. En utilisant la classification des systèmes de racines réduits, montrer que R' est de type B_n.

(6) Réciproquement, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $V = \mathbb{R}^n$ montrer que $R = \{\pm e_i, \pm 2e_i \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ est un système de racines irréductible non réduit. On dit qu'il est de type BC_n.