Feuille de TD no. 2 (version révisée du 4/2/2016)

Dans la suite, k désigne un **corps** et l'on écrira « k-algèbre » au lieu de « k-algèbre commutative ». Par ailleurs, $\otimes$ signifie $\otimes_k$. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

Soit $G = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma en groupes affine. On dira que G est **algébrique** (resp. **réduit**) si la k-algèbre A est de type fini (resp. réduite). On utilisera parfois « G-module » comme synonyme de « A-comodule ».

Exercice 1. — Soit V un A-comodule à droite, i.e. un G-module. On dit qu'un sev W de V est un sous-G-module de V si $\Delta_V(W) \subset W \otimes A$.

(1) Dans ce cas, montrer que V/W est muni d'une structure de A-comodule à droite.

(2) Montrer que tout $v \in V$ est contenu dans un sous-G-module de dimension finie. (Soit $(\phi_i)_{i\in I}$ une base de A ; écrire $\Delta_V(v) = \sum_{i\in I} v_i \otimes \phi_i$ avec les $v_i \in V$ nuls sauf pour un nombre fini d'indices, et montrer que $W = \mathrm{Vect}(v_i)$ est un sous-G-module contenant v.)

(3) Montrer que si $\dim(W) < \infty$, une structure de G-module sur W est la même chose qu'un morphisme de k-schémas en groupes $G \to \mathrm{GL}(W)$. Indication : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de W ; écrire $\Delta_V(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes c_{ij}$ et déterminer $\Delta(c_{ij})$.

(4) Montrer que si G est algébrique, c'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$ pour un certain V de dimension finie. (Prendre pour V le sous-G-module de A engendré par un système de générateurs de A comme k-algèbre. Pour montrer la surjectivité de $k[\mathrm{GL}(V)] \to A$, utiliser l'égalité $\mathrm{id}_A = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta$.)

Pour tout k-ev E, on pose $E_{\overline{k}} = E \otimes \overline{k}$. On pose $G_{\overline{k}} = \mathrm{Spec}(A_{\overline{k}})$; c'est le $\overline{k}$-schéma en groupes affine déduit de G par extension des scalaires de k à $\overline{k}$. Soit W un sev de V.

(5) Montrer que $V_{\overline{k}}$ est un $G_{\overline{k}}$-module.

(6) Montrer que W est un sous-G-module de V ssi $W_{\overline{k}}$ est un sous-$G_{\overline{k}}$-module de $V_{\overline{k}}$.

On suppose G algébrique et $G_{\overline{k}}$ réduit. On rappelle que, dans ce cas, le nilradical de $A_{\overline{k}}$ (l'idéal formé des éléments nilpotents) est l'intersection des morphismes d'évaluation $\varepsilon_g : A_{\overline{k}} \to \overline{k}$, $\phi \mapsto \phi(g)$, pour $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k}) = G(\overline{k})$.

(7) Montrer que W est un sous-G-module de V ssi pour tout $v \in W$ et $g \in G(\overline{k})$, on a $gv \in W \otimes \overline{k}$.

Soit H un sous-groupe fermé réduit de $G_{\overline{k}}$.

(8) Montrer l'égalité $(V_{\overline{k}})^H = \{v \in V_{\overline{k}} \mid \forall h \in H(\overline{k}), \quad hv = v\}$. (Utiliser le rappel plus haut.)

(9) On suppose de plus H distingué dans G. Montrer alors que $(V_{\overline{k}})^H$ est un sous-$G_{\overline{k}}$-module de $V_{\overline{k}}$.

Exercice 2. — Démontrer le lemme de Yoneda (cf. feuille de TD no. 1).

Exercice 3. — Soit $k = \mathbb{F}_p(T)$ et soit G le sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_a^2 = \mathrm{Spec}(k[X,Y])$ défini par l'équation $X^p = TY^p$. Montrer que G est réduit mais que $G_{\overline{k}}$ ne l'est pas.