Feuille de TD no. 3

Exercice 1 **(Matrices unitriangulaires)**. — Soit n un entier ≥ 2 et $U = U_{n,k}$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Posons $U_1 = U$ et, pour $d = 2, \dots, n$, soit U_d la sous-variété fermée définie par les équations $x_{ij} = 0$ pour $i+1 \leq j \leq i+d-1$, i.e. la sous-variété de U formée par les matrices qui ont $d-1$ diagonales de 0 au-dessus de la diagonale principale.

Le but de l'exercice est de montrer que chaque U_d est un sous-groupe fermé distingué et que chaque quotient U_d/U_{d+1} est central dans U/U_{d+1} et est isomorphe à $(\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$. Soit R une k-algèbre arbitraire. On note $\mathscr{B}(R)$ la sous-R-algèbre (non commutative !) de $M_n(R)$ formée des matrices triangulaires supérieures et $\mathscr{N}(R)$ l'idéal formé des matrices ayant des 0 sur la diagonale. D'autre part, on note $B(R)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{B}(R)$; alors $U(R)$ est un sous-groupe de $B(R)$ et est égal à $1 + \mathscr{N}(R)$.

(1) Montrer que, pour $d = 1, \dots, n-1$, les matrices élémentaires E_{ij} telles que $j \geq i+d$ forment une base du R-module $\mathscr{N}(R)^d$, et que $\mathscr{N}(R)^n = 0$.

(2) Pour tout $g = 1-x$ dans $U_1(R)$ et $h = 1-y$ dans $U_d(R)$, montrer que $ghg^{-1} \equiv 1-y \mod \mathscr{N}(R)^{d+1}$ et que $ghg^{-1}h^{-1} \in U_{d+1}(R)$. (Écrire que $(1-x)^{-1} = 1+x+u$, où $u = \sum_{i=2}^{n-1} x^i$ et de même pour $(1-y)^{-1}$.)

(3) En déduire que chaque U_d est distingué dans U et que, de plus, U_d/U_{d+1} est central dans U/U_{d+1}.

(4) Montrer que l'application ϕ de $U_d(R)$ dans $\mathbb{G}_{a,k}(R)^{n-d}$ qui à tout $g = 1 + \sum_{i=1}^{n-d} x_i E_{i,i+d} + u$, avec $u \in \mathscr{N}(R)^{d+1}$, associe le $(n-d)$-uplet $(x_1, \dots, x_{n-d})$ est un isomorphisme de groupes, de noyau $U_{d+1}(R)$. En déduire que $U_d/U_{d+1} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$.

Rappel. — Soit G un k-schéma en groupes affine de type fini. On dit que G est **unipotent** si pour tout G-module $V \neq (0)$ de dimension finie, le sous-module des invariants V^G est non nul.

On peut réappliquer ceci au G-module V/V^G, donc si $\dim(V) < \infty$ on obtient par récurrence sur $\dim(V)$ qu'il existe une suite strictement croissante de sous-G-modules :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$$

telle que chaque V_i/V_{i-1} soit un G-module trivial. En prenant une base de V adaptée à ce drapeau de sous-modules et en identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à GL_n au moyen de cette base, on voit alors que l'image de G dans GL_n est contenue dans le sous-groupe U_n des matrices unitriangulaires supérieures.

Prenant pour V un G-module fidèle, de sorte qu'on peut identifier G à un sous-groupe fermé de GL_n, on obtient alors que G est un sous-groupe fermé de U_n. On va démontrer dans les exercices suivants que la réciproque est vraie. Plus précisément, avec la définition adoptée plus haut, il est clair que si G est unipotent et si $G' = G/H$ est un schéma en groupes quotient de G alors G' est unipotent, car $k[G'] \subset k[G]$ donc si V est un $k[G']$-comodule non nul, c'est aussi un $k[G]$-comodule non nul donc il existe $v \neq 0$ tel que $\Delta_V(v) = v \otimes 1$. Par contre, il n'est pas évident qu'un sous-schéma en groupes H de G soit unipotent, et c'est l'objet des exercices qui suivent.

Exercice 2. — Soit G un k-schéma en groupes affine et $A = k[G]$. On suppose que A est réunion d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels C_i tels que $C_0 = k1$ et que :

$$(*) \qquad \Delta(C_r) \subset \sum_{i=0}^{r} C_i \otimes C_{r-i}$$

pour tout r.

Soit V un G-module non nul. Pour tout r, posons $V_r = \{v \in V \mid \Delta_V(v) \in V \otimes C_r\}$.

(1) Montrer que $V^G = V_0$.

Comme A est la réunion des C_i, il existe un entier r tel que $V_r \neq 0$. Si $r = 0$, c'est gagné, donc supposons $r > 0$. Notons π la projection $A \to \overline{A} = A/C_{r-1}$ et $\overline{\Delta}_V$ la composée $(\mathrm{id}_V \otimes \pi) \circ \Delta_V : V \to V \otimes \overline{A}$.

(2) Montrer que $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V(V_r) \subset V \otimes (C_{r-1} \otimes A + A \otimes C_{r-1})$.

(3) En considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Delta_V"] \arrow[dr, "\overline{\Delta}_V"'] & V \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_V \otimes \Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \pi"] & V \otimes A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes \pi \otimes \pi"] \\
& V \otimes \overline{A} \arrow[r, "\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_{\overline{A}}"] & V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}
\end{tikzcd}$$

en déduire que $V_{r-1} \neq \{0\}$.

(4) Montrer que G est unipotent, ainsi que tout sous-schéma en groupes fermé de G.

(5) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, le groupe U_n des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale vérifie $(*)$, donc est unipotent. Indication : on a $k[U_n] = k[X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$; déterminer $\Delta(X_{ij})$ puis en déduire une graduation de k-algèbre $A = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A_r$ telle que la filtration associée $C_r = \bigoplus_{i \leq r} A_i$ vérifie $(*)$.

(6) Soit H un sous-groupe fermé distingué de G tel que H et G/H soient unipotents. Montrer que G l'est aussi.

Exercice 3. — Soit G un k-groupe algébrique (affine, de type fini et réduit) tel que tout élément de $G(k)$ est unipotent. Le but de l'exercice est de montrer que G est unipotent. Soit V un G-module *simple* (donc de dimension finie) ; on va montrer que V est un G-module trivial. Soit $G'(k)$ l'image de $G(k)$ dans $\mathrm{GL}(V)$ (c'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$). On note A la sous-algèbre de $\mathrm{End}_k(V)$ engendrée par les éléments de $G'(k)$.

(i) En reprenant un résultat utilisé en cours, montrer que V est un A-module simple.

D'après un théorème de Wedderburn, que l'on admettra, ceci entraîne que $A = \mathrm{End}_k(V)$.

(ii) Pour tout $g \in G'(k)$, montrer que $\mathrm{Tr}(g) = \dim(V)$. En déduire que pour tout $h \in G'(k)$, on a $\mathrm{Tr}((g - \mathrm{id}_V)h) = 0$.

(iii) En utilisant le théorème de Wedderburn, en déduire que $g = \mathrm{id}_V$. Conclure que $G' = \{e\}$ et donc que V est un G-module trivial.

(iv) En déduire que G est unipotent.

***Exercice 4* (Sous-groupes de Borel).** — Soit $G = \mathrm{SL}_{n,k}$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ formé des matrices de déterminant 1 et soit B le sous-groupe fermé de G formé des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1.

(i) Montrer que B est un sous-groupe résoluble connexe.

(ii) Soit $\mathcal{F}\ell(V)$ la variété des drapeaux complets de $V = k^n$ et soit F_0 le drapeau standard de k^n. Montrer que le stabilisateur de F_0 dans G est B.

(iii) D'après le cours, le morphisme $G \to \mathcal{F}\ell(V)$, $g \mapsto gF_0$ induit donc un isomorphisme de G/B sur une sous-variété localement fermée Y de $\mathcal{F}\ell(V)$. Montrer que l'application $G(k) \to \mathcal{F}\ell(V)(k)$, $g \mapsto gF_0$ est surjective et en déduire que $Y = \mathcal{F}\ell(V)$. (Utiliser que si X est une k-variété, toute sous-variété fermée non vide contient au moins un k-point.)

(iv) En déduire que B est un sous-groupe de Borel de G.