Feuille de TD no. 4

***Exercice 1* (Le groupe $\mathrm{SO}(2n)$).** — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Soit n un entier ≥ 2 et $N = 2n$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1})$ la base canonique de $V = k^N$ et l'on considère sur V la forme quadratique Q définie par

$$Q(x_1, \dots, x_{-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{-i}.$$

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique associée ; sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice J qui a des 1 sur la 2ème diagonale et des 0 partout ailleurs ; par exemple si $n = 2$ on a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noter que J est égale à sa transposée ${}^tJ$ et que J^2 est la matrice identité I_N. On note $\mathrm{SO}_N(k)$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_N(k)$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}_N(k) &= \{A \in \mathrm{SL}_N(k) \mid {}^tAJA = J\} \\ &= \{A \in \mathrm{SL}_N(k) \mid \forall X, Y \in k^N, \quad \phi(AX, AY) = \phi(X, Y)\}. \end{aligned}$$

On admet que c'est un k-groupe algébrique réduit, connexe et réductif.

(1) On note $\mathrm{diag}(z_1, \dots, z_{-1})$ la matrice diagonale de $\mathrm{GL}_N(k)$ de coefficients diagonaux $z_1, \dots, z_{-1}$. Montrer qu'elle appartient à $\mathrm{SO}_N(k)$ si et seulement si $z_i z_{-i} = 1$ pour $i = 1, \dots, n$.

On note $T \simeq \mathbb{G}_m^n$ le tore de $\mathrm{SO}_N(k)$ ainsi obtenu et, pour $i = 1, \dots, n$, on note ε_i le caractère de T qui à $t = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n, z_n^{-1} \dots, z_1^{-1})$ associe z_i. Alors $X(T) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$.

(2) Soit ϵ une variable de carré nul. En utilisant que $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_N(k)) \simeq \{M \in \mathfrak{sl}_N(k) \mid I_N + \epsilon M \in \mathrm{SO}_N(k[\epsilon])\}$, montrer que

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_N(k)) \simeq \{M \in \mathfrak{sl}_N(k) \mid {}^tMJ + JM = 0\}.$$

On admet que, pour tout $A \in M_N(k)$, ${}^\top A = J\,{}^tAJ$ est la « transposée de A par rapport à la deuxième diagonale » : par exemple, si $N = 4$ et si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,-2} & a_{1,-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,-2} & a_{2,-1} \\ a_{-2,1} & a_{-2,2} & a_{-2,-2} & a_{-2,-1} \\ a_{-1,1} & a_{-1,2} & a_{-1,-2} & a_{-1,-1} \end{pmatrix} \quad \textit{alors} \quad {}^\top A = J\,{}^tAJ = \begin{pmatrix} a_{-1,-1} & a_{-2,-1} & a_{2,-1} & a_{1,-1} \\ a_{-1,-2} & a_{-2,-2} & a_{2,-2} & a_{1,-2} \\ a_{-1,2} & a_{-2,2} & a_{2,2} & a_{1,2} \\ a_{-1,1} & a_{-2,1} & a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

De façon générale, pour tout $i, j \in \{1, \dots, -1\}$, on a $({}^\top A)_{i,j} = A_{-j,-i}$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$ on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire correspondante.

(3) En utilisant que $\mathrm{Lie}(T)$ est l'intersection de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_N(k))$ avec le sous-espace des matrices diagonales de $M_N(k)$, montrer que les matrices $H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$, pour $i = 1, \dots, n$, forment une base de $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$.

On note $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) l'intersection de $\mathfrak{g}$ avec le sous-espace de $M_N(k)$ formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) ayant des 0 sur la diagonale.

(4) Montrer que les matrices :

$$(\star) \qquad \begin{cases} E_{i,j} - E_{-j,-i} & 1 \le i < j \le n \\ E_{i,-j} - E_{j,-i} & 1 \le i < j \le n \end{cases}$$

forment une base de $\mathfrak{n}^+$, que leurs transposées forment une base de $\mathfrak{n}^-$ et que l'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$.

(5) Déterminer $\dim(\mathfrak{n}^+)$ et $\dim(\mathfrak{g})$.

(6) On pose $R^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ (les ε_i ayant été définis après la question 1) et $R^- = -R^+$. Montrer que $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}_\alpha$, avec chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ de dimension 1. (Considérer l'action par conjugaison d'un élément $t = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n, z_n^{-1}, \dots, z_1^{-1})$ de T sur les matrices $(\star)$.)

(7) Montrer que T est un tore maximal de $\mathrm{SO}_N(k)$.

Soit $X_*(T)$ le groupe des cocaractères de T. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on note η_i l'élément de $X_*(T)$ tel que, pour tout $z \in k^\times$, $\eta_i(z)$ est la matrice diagonale dont tous les coefficients valent 1 sauf celui d'indice i, qui vaut z, et celui d'indice $-i$, qui vaut z^{-1}. Pour tout $\alpha \in R$, on définit $\alpha^\vee$ par

$$\alpha^\vee = \begin{cases} \eta_i - \eta_j & \text{si } \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \\ \eta_i + \eta_j & \text{si } \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \end{cases}$$

et l'on pose $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$.

(8) Pour tout $i, j = 1, \dots, n$, calculer $\langle \varepsilon_i, \eta_j \rangle$. En déduire que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ pour tout α. On notera s_α (resp. $s_{\alpha^\vee}$) la réflexion correspondante de $X(T)$ (resp. $X_*(T)$).

(9) Pour tout $\alpha = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, calculer $s_\alpha(\varepsilon_\ell)$ pour tout ℓ. En déduire que $s_\alpha(R) = R$. Montrer de même que $s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee$.

(10) Montrer que $\mathscr{R} = (X(T), X_*(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle semi-simple.

(11) On pose $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$. Montrer que tout $\beta \in R^+$ s'écrit $\beta = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$ avec $m_i \in \mathbb{N}$, puis que $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de R.

(12) Pour $i = 1, \dots, n$, montrer que la « réflexion simple » $s_i = s_{\alpha_i}$ préserve l'ensemble $\{\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_n\}$, puis en déduire une description du groupe de Weyl $W = W(R)$. Montrer que le produit scalaire sur $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour lequel la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est orthonormée est W-invariant.

(13) Déterminer le diagramme de Dynkin de R. (On dit qu'il est de type D_n.)

(14) Déterminer $Q(R)$, le réseau des racines, et $P(R)$ le réseau des poids (dual du réseau $Q(R^\vee)$). Est-ce que $\mathrm{SO}(2n)$ est simplement connexe ? Est-il de type adjoint ? Pouvez-vous deviner quel est le groupe G de type adjoint correspondant ?

(15) En admettant qu'un k-groupe réductif est déterminé, à isomorphisme près, par sa donnée radicielle, montrez que $\mathrm{SO}(4) \simeq (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/\mu_2$, où μ_2 désigne le sous-groupe formé de (I_2, I_2) et $(-I_2, -I_2)$. Montrez de même que le groupe semi-simple simplement connexe de type D_3, noté $\mathrm{Spin}(6)$, est isomorphe à $\mathrm{SL}(4)$.