Feuille de TD no. 5

Soit k un corps. Si H est un k-schéma en groupes affine, d'algèbre de Hopf A, et si V, W sont des H-modules, définis par des coactions Δ_V, Δ_W, alors $V \otimes W$ est un H-module, défini par la coaction :

$$V \otimes W \xrightarrow{\Delta_V \otimes \Delta_W} V \otimes A \otimes W \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{2,3} \otimes \mathrm{id}_A} V \otimes W \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W \otimes m_A} V \otimes W \otimes A$$

où $\sigma_{2,3}$ est l'échange des facteurs 2 et 3 et m_A est la multiplication de A. C'est-à-dire, si $\Delta_V = \sum_i v_i \otimes \phi_i$ et $\Delta_W(w) = \sum_j w_j \otimes \psi_j$, alors pour toute k-algèbre R et $g \in H(R)$, on a dans $V \otimes W \otimes R$ l'égalité :

$$g \cdot (v \otimes w \otimes 1) = \sum_{i,j} v_i \otimes w_j \otimes g(\phi_i \psi_j).$$

Si H est de type fini et réduit et $k = \overline{k}$, cette coaction est déterminée par l'action de $H(k)$, qui est définie par $h \cdot (v \otimes w) = hv \otimes hw$ pour tout $h \in H(k)$, $v \in V$ et $w \in W$.

Désormais, on suppose : $k = \overline{k}$, G est un k-schéma en groupes réduit de type fini et H un sous-schéma en groupe fermé réduit. Le foncteur d'induction Ind_H^G, de la catégorie des H-modules vers celle des G-modules, est défini pour tout H-module E par

$$\mathrm{Ind}_H^G(E) = (E \otimes k[G])^H,$$

qu'on identifie à l'ensemble des applications $f : G(k) \to E$ à valeurs dans un sev de E de dimension finie et telles que $f(gh) = h^{-1} f(g)$ pour tout $g \in G(k)$ et $h \in H(k)$. Il est muni de la structure de G-module définie par $(g \cdot f)(g') = f(g^{-1}g')$, pour tout $g, g' \in G(k)$ et l'on a le morphisme d'évaluation en l'élément neutre $\varepsilon : \mathrm{Ind}_H^G(E) \to E$, $f \mapsto f(e)$.

Exercice 1. — 1) Vérifier que pour tout $f \in \mathrm{Ind}_H^G(E)$ et $g \in G(k)$, on a bien $g \cdot f \in \mathrm{Ind}_H^G(E)$.

2) Montrer que $\varepsilon : \mathrm{Ind}_H^G(E) \to E$ est un morphisme de H-modules.

***Exercice 2* (Réciprocité de Frobenius)**. — Soit V un G-module.

(1) Pour tout G-morphisme $\Phi : V \to \mathrm{Ind}_H^G(E)$, montrer que l'application $\phi = \varepsilon \circ \Phi : V \to E$, $v \mapsto \Phi(v)(e)$ est un H-morphisme $V \to E$.

(2) Pour tout H-morphisme $\phi : V \to E$, montrer qu'en posant, pour tout $v \in V$ et $g \in G(k)$,

$$\Phi(v)(g) = \phi(g^{-1}v)$$

on définit une application $\Phi : V \to \mathrm{Ind}_H^G(E)$.

(3) Montrer que les applications précédentes $\Phi \mapsto \phi$ et $\phi \mapsto \Phi$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(4) Montrer que si I est un H-module injectif alors $\mathrm{Ind}_H^G(I)$ est un G-module injectif.

(5) Montrer que la catégorie des G-modules contient suffisamment d'objets injectifs. (Prendre $H = \{e\}$ et considérer $V \to \mathrm{Ind}_e^G(V)$.)

(6) De même, si H est un sous-groupe diagonalisable de G, montrer que $\mathrm{Ind}_H^G(E)$ est un G-module injectif, pour tout H-module E (utiliser que la catégorie des H-modules est semi-simple, donc tout H-module est injectif).