# Feuille de TD no. 6

Soient $k$ un corps, $G$ un $k$-schéma en groupes réductif déployé, $T$ un tore maximal, $R = R(G,T)$, $W$ le groupe de Weyl, $\Delta$ une base de $R$, $R^+$ et $R^-$ les racines positives correspondantes, $B$ le sous-groupe de Borel contenant $T$ correspondant à $R^-$,

$$X(T)^+ = \{\lambda \in X(T) \mid \forall\alpha \in \Delta, \quad (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{N}\},$$

et $w_0$ l'unique élément de $W$ tel que $w_0(R^+) = R^-$.

***Exercice 1***. — Soit $\lambda \in X(T)^+$.

(1) Montrer que l'ensemble des $\mu \in X(T)$ tels que $w_0\lambda \leq \mu \leq \lambda$ est fini.

(2) En utilisant des résultats vus en cours, en déduire que $\dim H^0(\lambda) < \infty$.

Soit $\rho \in X(T) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $(\rho, \alpha^\vee) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Pour la suite, on admet que $\dim H^0(\lambda)$ est donné par la formule des dimensions de Weyl :

$$\dim H^0(\lambda) = \prod_{\beta\in R^+} \frac{(\lambda+\rho, \beta^\vee)}{(\rho, \beta^\vee)}.$$

***Exercice 2***. — On suppose que $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ et l'on note $V = k^{2n}$ la représentation naturelle.

(1) Déterminer les poids de $T$ dans $V$, puis le plus haut poids $\omega_i$ de $\Lambda^i V$ pour $i = 1, \ldots, n$. Déterminer $(\omega_i, \alpha^\vee)$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

(2) Pour $i = 1, \ldots, n$, calculer $\dim \Lambda^i V$ et $\dim H^0(\omega_i)$. (On pourra le faire, par exemple, pour $n = 4$.) Si $\mathrm{car}(k) = 0$, qu'est-ce que cela suggère ?

***Exercice 3***. — Même exercice que le précédent pour $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ et $i = 1, \ldots, n-1$, puis pour $G = \mathrm{SO}_{2n}$ (avec $n \geq 3$) et $i = 1, \ldots, n-2$. [(1)]

***Exercice 4***. — Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note $P_\alpha$ le sous-groupe parabolique engendré par $B$ et $U_\alpha$. Alors $P_\alpha/B \simeq \mathbb{P}^1$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in X(T)$, on pose

$$H^i_\alpha(\lambda) = R^i\mathrm{Ind}_B^{P_\alpha}(k_\lambda) \simeq H^i(P_\alpha/B, \mathscr{L}(\lambda)).$$

$$H^i(\lambda) = R^i\mathrm{Ind}_B^G(k_\lambda) \simeq H^i(G/B, \mathscr{L}(\lambda)).$$

Plus généralement, pour tout $B$-module $E$, on pose $H^i(E) = R^i\mathrm{Ind}_B^G(E)$.

Comme $k$-ev, on a

$$(*) \qquad H^i_\alpha(\lambda) \simeq \begin{cases} H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(n)) & \text{si } n = (\lambda, \alpha^\vee) \geq 0 \text{ et } i = 0, \\ H^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(n)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(-n-2))^* & \text{si } n = (\lambda, \alpha^\vee) \leq -2 \text{ et } i = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier, et l'on admettra, que les poids de $T$ dans $H^i_\alpha(\lambda)$ sont dans les deux premiers cas, respectivement :

$$\lambda, \lambda - \alpha, \ldots, \lambda - n\alpha = s_\alpha\lambda$$

$$\mu = s_\alpha\lambda - \alpha, \mu - \alpha, \ldots, s_\alpha\mu = \lambda + \alpha.$$

Pour tout $w \in W$, on pose $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ ; alors $\mu = s_\alpha \cdot \lambda$.

[(1)] Pour la solution de cet exercice et du précédent voir, par exemple, Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 7-8, §VIII.13.

(1) En utilisant la propriété universelle des foncteurs d'induction (réciprocité de Frobenius), montrer qu'on a un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G \circ \mathrm{Ind}_B^{P_\alpha} = \mathrm{Ind}_B^G$. (On pourra admettre cette question pour faire la suite.)

Soit $\lambda \in X(T)$. On considère une résolution $0 \to k_\lambda \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$ de $k_\lambda$ par des $B$-modules injectifs.

(2) En utilisant $(*)$ et le fait que $\mathrm{Ind}_B^{P_\alpha}$ transforme injectifs en injectifs, montrer qu'on a un isomorphisme

$$H^i(\lambda) \simeq \begin{cases} R^i\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G(H^0_\alpha(\lambda)) & \text{si } n = (\lambda, \alpha^\vee) \geq 0, \\ R^{i-1}\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G(H^1_\alpha(\lambda)) & \text{si } n = (\lambda, \alpha^\vee) \leq -2, \\ 0 & \text{si } n = (\lambda, \alpha^\vee) = -1. \end{cases}$$

Désormais, on suppose $\mathrm{car}(k) = 0$. Dans ce cas, si $(\lambda, \alpha^\vee) \leq -2$ on a un isomorphisme $H^1_\alpha(\lambda) \simeq H^0_\alpha(s_\alpha \cdot \lambda)$ (tous deux sont des $P_\alpha$-modules simples de plus haut poids $s_\alpha \cdot \lambda$).

Soit $w \in W$ et soit $w = s_\ell \cdots s_1$ une décomposition réduite de $w$, c.-à-d. chaque $s_i$ est une réflexion simple $s_{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \Delta$ et $\ell$ **minimal**.(2) On peut montrer (Chap. 1 du cours) que toutes les décompositions réduites de $w$ ont la même longueur, notée $\ell(w)$.

Alors, posant $w_i = s_i \cdots s_1$ pour tout $i = 1, \ldots, \ell$, on peut montrer que $(w_i(\lambda+\rho), \alpha_i^\vee) < 0$ pour tout $\lambda \in X(T)^+$.

(3) Soient $\lambda \in X(T)^+$ et $w \in W$. En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$H^i(w \cdot \lambda) \simeq H^{i-\ell(w)}(\lambda)$$

(le terme de droite étant nul si $i < \ell(w)$.

(4) En utilisant que tout $w \in W$ est de longueur $\leq N = \ell(w_0) = |R^+|$ et que $H^i(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in X(T)$ et $i > N$, montrer que :

$$H^i(w \cdot \lambda) \simeq \begin{cases} H^0(\lambda) & \text{si } i = \ell(w), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est le théorème de (Borel-Weil et) Bott. (3)

---

(2) Les $\alpha_i$ ne sont pas nécessairement distincts ; par exemple pour $\mathrm{SL}_3$, $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha$ est une décomposition réduite.

(3) Voir par exemple : J.-C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Part II, Cor. 5.5