Chapitre 2 : Foncteurs représentables et algèbres de Hopf

Références pour ce chapitre :

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011. (Exposé I, §§1-4)

[Ja] Jens-Carsten Jantzen, Representations of algebraic groups (2nd edition), Amer. Math. Soc. 2003. (chap. I.2)

[Wa] William C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer-Verlag, 1979. (chap. 1,3,16)

1. Cogèbres et algèbres de Hopf

[1] On énonce d'abord quelques définitions, valables pour tout anneau commutatif Λ (par exemple pour $\Lambda = \mathbb{Z}$) [2], mais assez rapidement on se limitera au cas où Λ est un corps k. On fixe donc un anneau commutatif Λ. Sauf indication contraire, les produits tensoriels sont pris sur Λ, i.e. $\otimes$ signifie $\otimes_\Lambda$.

1.1. Cogèbres et comodules. —

Définition 1.1. — Une Λ-**cogèbre** est un Λ-module C muni de deux applications Λ-linéaires $\Delta : C \to C \otimes C$ et $\varepsilon : C \to \Lambda$, vérifiant les deux axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_C \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_C)\Delta$,
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C)\Delta = \mathrm{id}_C = (\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon)\Delta$.

Δ, resp. ε s'appelle la comultiplication, resp. l'augmentation. L'axiome (1) exprime la coassociativité de la comultiplication, et on peut appeler (2) l'axiome de co-unité.

Un morphisme de Λ-cogèbres $\phi : C \to C'$ est une application Λ-linéaire vérifiant $\Delta_{C'} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_C$ et $\varepsilon_{C'} \circ \phi = \varepsilon_C$.

Définition 1.2. — Un C-**comodule** (à droite) est un Λ-module V, muni d'une application Λ-linéaire $V \to V \otimes C$, notée Δ_V ou μ_V, qui est une *coaction*, c.-à-d. qui vérifie les deux axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V = \mathrm{id}_V$,
(2) $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V = (\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C)\Delta_V$.

Noter que la comultiplication $\Delta : C \to C \otimes C$ fait de C un C-comodule à droite.

Un morphisme de C-comodules $f : V \to W$ est une application Λ-linéaire qui vérifie $\Delta_W \circ f = (f \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V$.

Le lemme suivant est l'analogue, pour les comodules, de la restriction des scalaires pour les modules (i.e. le fait que si $A \to B$ est un morphisme de Λ-algèbres et M un B-module, alors M est aussi un A-module).

Lemme 1.3 **(Corestriction des scalaires)**. — *Soit $\phi : C \to C'$ un morphisme de k-cogèbres. Si V est un C-comodule pour la coaction $\Delta_V : V \to V \otimes C$, alors c'est un C'-comodule pour la coaction $\Delta'_V = (\mathrm{id}_V \otimes \phi)\Delta_V$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

[1] Version du 17 février 2016.

[2] Tous les anneaux considérés sont munis d'un élément unité 1 et, sauf mention du contraire, ils seront commutatifs.

1.2. Algèbres de Hopf. —

Définition 1.4. — Soit A une Λ-algèbre commutative ; notons u le morphisme $\Lambda \to A$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$ et $m : A \otimes A \to A$ la multiplication de A. On dit que A est une **Λ-algèbre de Hopf** si l'on s'est donné trois morphismes d'algèbres

$$\Delta : A \to A \otimes A, \qquad \varepsilon : A \to \Lambda, \qquad \tau : A \to A$$

vérifiants les trois axiomes suivants :

(1) (Coassociativité) $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta$.
(2) (Neutre) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \mathrm{id}_A = (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta$.
(3) (Inverse) $m \circ (\tau \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes \tau) \circ \Delta$.

(En particulier, Δ et ε font de A une Λ-cogèbre.) Dans ce cas, Δ s'appelle la comultiplication, ε l'augmentation (ou co-unité), et τ l'antipode.[3]

2) Un morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\phi : A \to B$ est un morphisme de Λ-algèbres qui respecte la comultiplication, l'augmentation et l'antipode, c.-à-d., qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_B \circ \phi & = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_A ; \\ \varepsilon_B \circ \phi & = \varepsilon_A ; \\ \tau_B \circ \phi & = \phi \circ \tau_A . \end{cases}$$

Remarque et définition 1.5. — (1) Comme $\varepsilon : A \to \Lambda$ est un morphisme de Λ-algèbres, on a

$$\varepsilon(u(\lambda)) = \varepsilon(\lambda \cdot 1_A) = \lambda \cdot 1_\Lambda = \lambda$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc u est *injectif* et ε *surjectif.*

(2) $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est noté I_A et appelé *l'idéal d'augmentation.* On a donc une suite exacte :

$$0 \to I_A \to A \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0.$$

Terminologie. — Dans la suite, toutes les Λ-algèbres considérées seront supposées commutatives (sauf mention explicite du contraire) et l'on dira simplement « algèbre de Hopf » au lieu de « algèbre de Hopf commutative ».

Proposition 1.6. — *Soit A une Λ-algèbre de Hopf. Notons G le foncteur qui à toute Λ-algèbre R associe l'ensemble*

$$G(R) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-}alg.}(A, R)$$

et à tout morphisme de Λ-algèbres $\phi : R \to S$ associe l'application $G(\phi) : G(R) \to G(S)$, $g \mapsto \phi \circ g$. Alors G est un **foncteur en groupes***, i.e. chaque $G(R)$ est un groupe et chaque $G(\phi)$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. — Soit $\phi : R \to S$ un morphisme de Λ-algèbres ; notons m_R (resp. m_S) la multiplication de R (resp. S). Soient $g, h \in G(R)$, on définit gh comme étant le morphisme de Λ-algèbres :

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{g \otimes h} R \otimes R \xrightarrow{m_R} R$$

On laisse au lecteur la tâche de vérifier que les axiomes de la structure d'algèbre de Hopf entraînent que $G(R)$ est un groupe, dont l'élément unité est le morphisme $u_R \circ \varepsilon$ (où $u_R : \Lambda \to R$) et où l'inverse à droite et à gauche d'un élément $g \in G(R)$ est le morphisme d'algèbres $g \circ \tau : A \to R$. (Ceci justifie le nom des axiomes.)

Enfin, comme $\phi : R \to S$ est un morphisme d'algèbres, on a $\phi \circ m_R = m_S \circ (\phi \otimes \phi)$ et il en résulte que $G(\phi)(gh) = G(\phi)(g)G(\phi)(h)$, donc $G(\phi)$ est bien un morphisme de groupes. □

[3] On verra plus bas la signification des noms donnés à ces axiomes.

Exemples 1.7. — (1) Soit A la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hopf $\mathbb{Z}[X]$, munie de Δ, ε et τ définis par $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\varepsilon(X) = 0$ et $\tau(X) = -X$. Le foncteur en groupes qu'elle définit est noté $\mathbb{G}_a$ et appelé le **groupe additif**. En effet, pour tout anneau R [(4)] on a $G(R) = R$ et la loi de groupe est l'addition dans R.

(2) Soit B la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hopf $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, munie de Δ, ε et τ définis par $\Delta(T) = T \otimes T$, $\varepsilon(T) = 1$ et $\tau(T) = T^{-1}$. Le foncteur en groupes qu'elle définit est noté $\mathbb{G}_m$ et appelé le **groupe multiplicatif**. En effet, pour tout anneau R, $G(R)$ est l'ensemble $R^\times$ des éléments de R inversibles pour la multiplication et la loi de groupe est la multiplication dans $R^\times$.

Définition 1.8. — Soit A une algèbre de Hopf. Un **idéal de Hopf** est un idéal I qui vérifie $\Delta(I) \subset I \otimes A + A \otimes I$, $\tau(I) \subset I$ et $I \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Dans ce cas, on laisse au lecteur la tâche de vérifier que Δ, ε et τ passent au quotient et munissent A/I d'une structure d'algèbre de Hopf.

Pour le moment, on n'a pas besoin de définir ce qu'est un Λ-schéma ; nous nous contenterons de dire (même si c'est un peu artificiel à ce stade) que la catégorie des Λ-schémas **affines** est la catégorie opposée de celle des Λ-algèbres, i.e. les objets sont les mêmes et le sens des flèches est renversé. De même, on pose (provisoirement) la définition suivante :

Définition 1.9. — La catégorie des Λ-schémas en groupes affines est la catégorie opposée de celle des Λ-algèbres de Hopf, c.-à-d., si G (resp. H) est le « schéma en groupes affines » associé à l'algèbre de Hopf A (resp. B) alors un morphisme de Λ-schémas en groupes $G \to H$ « est » un morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\phi : B \to A$. [(5)]

Définition 1.10. — (i) Soient A, B deux Λ-algèbres et X, Y les Λ-schémas affines associés. On dit qu'un morphisme $Y \to X$ de Λ-schémas est une **immersion fermée** si le morphisme d'algèbres $A \to B$ qui lui correspond est surjectif, i.e. si B est le quotient de A par un certain idéal I. Dans ce cas, on dit que H est un sous-schéma fermé de G.

(ii) En particulier, si G, H sont des Λ-schémas en groupes affines et A, B leurs Λ-algèbres de Hopf, un morphisme $f : H \to G$ de Λ-schémas en groupes est une immersion fermée ssi le morphisme d'algèbres de Hopf $A \to B$ qui lui correspond est surjectif, i.e. si B est le quotient de A par un certain idéal de Hopf I. Dans ce cas, on dit que H est un sous-schéma en groupes fermé de G.

***Définitions 1.11* (Sous-groupes distingués).** — Soit G un Λ-schéma en groupes affine, A son algèbre de Hopf.

(i) Un *sous-foncteur en groupes* H de G est la donnée, pour toute Λ-algèbre R, d'un sous-groupe $H(R)$ de $G(R)$, ceci de façon fonctorielle en R, i.e. pour tout morphisme $R \to R'$ de Λ-algèbres, le morphisme de groupes $G(R) \to G(R')$ envoie $H(R)$ dans $H(R')$.

(ii) Si H est un sous-schéma en groupes fermé de G, défini par un idéal de Hopf I, alors H est un sous-foncteur en groupes de G. En effet, pour toute Λ-algèbre R, $H(R)$ est le sous-groupe de $G(R) = \mathrm{Hom}_{\Lambda-\mathrm{alg.}}(A, R)$ formé des $g : A \to R$ qui s'annulent sur I. [(6)]

(iii) Un sous-foncteur en groupes H de G est dit **distingué** si $H(R)$ est un sous-groupe distingué de $G(R)$ pour toute Λ-algèbre R.

[(4)] Pour $\Lambda = \mathbb{Z}$, une $\mathbb{Z}$-algèbre n'est rien d'autre qu'un anneau commutatif.

[(5)] Ceci sera rendu plus clair avec le Lemme de Yoneda plus bas.

[(6)] Attention, il peut exister des sous-foncteurs en groupes de G qui ne sont pas représentables par des sous-schémas de G.

(iv) Par exemple, soit $f : G \to G'$ un morphisme de Λ-schémas en groupes. On définit le sous-foncteur en groupes $K = \mathrm{Ker}(f)$ de G par $K(R) = \mathrm{Ker}\big(G(R) \to G'(R)\big)$, pour toute Λ-algèbre R. Il est clairement distingué. De plus, c'est un sous-schéma en groupes fermé de G, d'après la proposition suivante.

Proposition 1.12. — *Soit $\phi : B \to A$ le morphisme d'algèbres de Hopf correspondant au morphisme $f : G \to G'$. Le foncteur $R \mapsto K(R)$ provient de la Λ-algèbre de Hopf $C = A/A\phi(I_B)$, i.e. on a un isomorphisme $K(R) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-}alg.}(C, R)$, fonctoriel en R.*

Démonstration. — Soit R une Λ-algèbre. Un élément g de $G(R)$ appartient à $K(R)$ ssi son image $\phi \circ g$ dans $G'(R)$ est l'élément neutre, égal à $u_R \circ \varepsilon_B$. Ceci équivaut à dire que g est la restriction à A d'un morphisme d'algèbres $g' : A \otimes_B \Lambda \to R$, cf. le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "\phi"'] & \Lambda \arrow[d] \arrow[ddr, "u_R"] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, "g"'] & A \otimes_B \Lambda \arrow[dr, dashed] & \\
& & R.
\end{tikzcd}$$

De plus, on déduit de l'isomorphisme $\Lambda \simeq B/I_B$ que $A \otimes_B \Lambda \simeq A/A\phi(I_B)$ et l'on obtient donc que $K(R) \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg.}}(C, R)$. De plus, on vérifie facilement que I_B est un idéal de Hopf de B et que, ϕ étant un morphisme d'algèbres de Hopf, $A\phi(I_B)$ est un idéal de Hopf de A. Donc C est bien une algèbre de Hopf.

Pour être complet, il faudrait vérifier que la structure de groupe sur $K(R)$ définie par $K(R) = \mathrm{Ker}(G(R) \to G'(R))$ coïncide bien avec celle provenant de C. Ceci n'est pas difficile (car C est un quotient de A), mais en fait en utilisant le Lemme de Yoneda plus bas on peut se dispenser de cette vérification (et même de la vérification que C est une algèbre de Hopf.) $\square$

Exemples 1.13. — (1) Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Alors le morphisme de k-algèbres de $B = k[T]$ vers $A = k[X]$ défini par $T \mapsto X^p$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. L'idéal d'augmentation I_B est engendré par T donc, avec les notations précédentes, on a :

$$C \simeq A/AX^p = k[X]/(X^p).$$

C'est une k-algèbre non réduite (i.e. qui possède des éléments nilpotents $\neq 0$). Le foncteur correspondant est noté $\alpha_{p,k}$: il associe à toute k-algèbre R le sous-groupe

$$\alpha_{p,k}(R) = \{x \in R \mid x^p = 0\}$$

de $(R, +)$. Bien sûr, $\alpha_{p,k}(R) = \{0\}$ si R est réduite, mais par exemple $\alpha_{p,k}(C)$ est l'idéal d'augmentation I_C.

(2) Soient n un entier > 1. Alors le morphisme d'anneaux de $B = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ vers $A = \mathbb{Z}[X, X^{-1}]$ défini par $T \mapsto X^n$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. L'idéal d'augmentation I_B est engendré par $T - 1$ donc on a :

$$C \simeq A/A(X^n - 1) \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^n - 1),$$

le deuxième isomorphisme découlant du fait que X est inversible dans $\mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)$. Le foncteur correspondant est noté μ_n : il associe à tout anneau R le groupe

$$\mu_n(R) = \{x \in R \mid x^n = 1\}$$

des racines n-ièmes de l'unité dans R.

De même, si k est un corps, le schéma en groupes correspondant à $A = k[X, X^{-1}]$, resp. à $k[X]/(X^n - 1)$, est noté $\mathbb{G}_{m,k}$, resp. $\mu_{n,k}$. Si k est de caractéristique p divisant n, i.e. si $n = p^r m$ avec $r \geq 1$ et m premier avec p, on a :

$$C \simeq k[X]/(X^m - 1)^{p^r}$$

donc C n'est pas une k-algèbre réduite.

1.3. A-comodules à droite et G-modules à gauche. —

Définition et proposition 1.14. — *Soit A une Λ-algèbre de Hopf et soit G le Λ-schéma en groupes correspondant. Une représentation de G, ou G-module, est un Λ-module V muni d'une structure de A-comodule à droite $\Delta_V : V \to V \otimes A$.*

Dans ce cas, pour toute Λ-algèbre R, le R-module $V \otimes R$ est muni d'une structure de $G(R)$-module (i.e. d'une action R-linéaire de $G(R)$) définie, pour tout $g \in G(R)$, $v \in V$ et $r \in R$, par

$$g \cdot (v \otimes r) = (\mathrm{id}_V \otimes m_R)(\mathrm{id}_V \otimes g \otimes \mathrm{id}_R)(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_R)(v \otimes r),$$

où m_R désigne la multiplication de R, c.-à-d., si $\Delta_V(v) = \sum_i v_i \otimes a_i$ alors $g \cdot (v \otimes r) = \sum_i v_i \otimes g(a_i) r$.

Démonstration. — L'élément neutre de $G(R)$ est $e = u_R \circ \varepsilon$ donc, pour tout $v \in V$, on a :

$$e \cdot (v \otimes 1) = (\mathrm{id}_V \otimes u_R)(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V(v) = (\mathrm{id}_V \otimes u_R)(v \otimes 1_\Lambda) = v \otimes 1.$$

Ceci montre que e agit bien comme l'identité.

Écrivons $\Delta_V(v) = \sum_i v_i \otimes a_i$ et soient $g, h \in G(R)$. Écrivant v au lieu de $v \otimes 1$ on a :

$$h \cdot v = \sum_i v_i \otimes h(a_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot v) &= \sum_i (\mathrm{id}_V \otimes m_R)(\mathrm{id}_V \otimes g \otimes h)(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_A)\Delta_V(v) \\ &= \sum_i (\mathrm{id}_V \otimes m_R)(\mathrm{id}_V \otimes g \otimes h)(\mathrm{id}_V \otimes \Delta_A)\Delta_V(v) \\ &= \sum_i (\mathrm{id}_V \otimes gh)\Delta_V(v) = (gh) \cdot v. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $V \otimes R$ est un $G(R)$-module à gauche. $\square$

Si l'on note $A = \Lambda[G]$, on retiendra donc le slogan : « un $\Lambda[G]$-comodule à droite est un G-module à gauche ».

Remarques 1.15. — (1) Réciproquement, on peut montrer que si $V \otimes R$ est muni d'une action R-linéaire de $G(R)$, de façon fonctorielle en R, alors V est un $\Lambda[G]$-comodule à droite. Voir par exemple SGA 3, Exp. I, 4.7.2 ou [Ja], I.2.8 ou [Wa], 3.2.

(2) Soit C une Λ-cogèbre, par exemple une algèbre de Hopf $A = \Lambda[G]$. Pour pouvoir parler commodément de « sous-comodules », il faut supposer que pour toute inclusion $N \subset M$ de Λ-modules, l'application $N \otimes C \to M \otimes C$ est *injective*, i.e. C est un Λ-module **plat**. C'est pourquoi on se limite en général à étudier les représentations des Λ-schémas en groupes affine $A = \Lambda[G]$ qui sont **plats** sur Λ. Bien entendu, la platitude est automatique si Λ est un corps k.

(3) On prendra garde que [Ja] contient deux assertions erronées sur les intersections infinies de sous-comodules (p.29 ligne 7 et p. 33 lignes 2-3), voir SGA 3, Exp. VI_B, 11.10.1 pour des contre-exemples.

***Définition 1.16* (Extension des scalaires).** — Soit G un Λ-schéma en groupes affine, correspondant à l'algèbre de Hopf A, et soit Λ' une Λ-algèbre. Alors $A' = A \otimes \Lambda'$ est une Λ'-algèbre de Hopf, et le Λ'-schéma en groupes affine correspondant est noté $G_{\Lambda'}$.

Par exemple, on a déjà défini les $\mathbb{Z}$-schémas en groupes $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$; pour tout corps k la k-algèbre de Hopf $k[X]$ (resp. $k[T, T^{-1}]$) correspond au k-schéma en groupes noté $\mathbb{G}_{a,k}$ (resp. $\mathbb{G}_{m,k}$).

D'autre part, si V est un A-comodule (i.e. un G-module) alors $V' = V \otimes \Lambda'$ est un A'-comodule (i.e. un $G_{\Lambda'}$-module). On utilisera ceci plus bas dans le cas où $\Lambda = k$ est un corps et $\Lambda' = \overline{k}$ est une clôture algébrique de k.

Désormais on suppose, sauf indication contraire, que Λ est un **corps** k.

***Proposition 1.17* (Propriété de finitude des comodules)**

Soient k un corps, C une k-cogèbre, V un C-comodule à droite et E un sous-espace vectoriel (en abrégé, sev) de V de dimension finie.

(1) *Il existe un* **plus petit sous-comodule** *de V contenant E. On dira que c'est le sous-comodule* **engendré** *par E et on le notera $\theta(E)$.*

(2) « La formation de $\theta(E)$ commute à l'extension des scalaires »*, i.e. pour toute k-algèbre k', $\theta(E) \otimes k'$ est le plus petit sous-comodule de $V \otimes k'$ contenant $E \otimes k'$.*

(3) *Par conséquent, V est réunion de ses sous-comodules de dimension finie.*

Démonstration. — Il est clair que (3) découle de (1), donc il suffit de prouver (1) et (2). Notons C^* l'espace vectoriel dual de C, ev : $C \otimes C^* \to k$ l'application d'évaluation, et $\theta(E)$ l'image de l'application linéaire ci-dessous :

$$E \otimes C^* \xrightarrow{\Delta_V \otimes \mathrm{id}} V \otimes C \otimes C^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}} V.$$

Soit $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une base de C. Alors, tout élément de $V \otimes C$ s'écrit de façon unique $\sum_\lambda v_\lambda \otimes c_\lambda$, pour des $v_\lambda \in V$ uniquement déterminés et nuls sauf pour un nombre fini de λ.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, écrivons

$$(*) \qquad \Delta_V(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda} \otimes c_\lambda.$$

Alors $\theta(E)$ est le sous-espace W de V engendré par les $v_{i\lambda}$; il est de dimension finie car seulement un nombre fini des $v_{i\lambda}$ sont non nuls. Il contient E puisque pour tout i on a $e_i = (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta_V(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda}\varepsilon(c_\lambda)$. Pour tout sous-comodule M contenant E, on a

$$\Delta_V(E) \subset \Delta_V(M) \subset M \otimes C$$

et donc $\theta(E) \subset M$. Donc $W = \theta(E)$ est contenu dans tout sous-comodule M contenant E. Reste à montrer que W est un sous-comodule, i.e. que $\Delta_V(W) \subset W \otimes C$.

Appliquant $\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C$ à $(*)$ on a, d'une part,

$$(**) \qquad (\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V(e_i) = \sum_\lambda \Delta_V(v_{i\lambda}) \otimes c_\lambda.$$

D'autre part, pour chaque $\nu \in \Lambda$, écrivons $\Delta(c_\nu) = \sum_\lambda \alpha_{\nu\lambda} \otimes c_\lambda$, où les $\alpha_{\nu\lambda} \in C$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Alors on a, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$(***) \qquad (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V(e_i) = \sum_\lambda \left(\sum_\nu v_{i\nu} \otimes \alpha_{\nu\lambda} \right) \otimes c_\lambda.$$

Comme $(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta_V = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V$, on en déduit que, pour tout i et λ, on a :

$$\Delta_V(v_{i\lambda}) = \sum_\nu v_{i\nu} \otimes \alpha_{\nu\lambda}.$$

On a donc $\Delta_V(W) \subset W \otimes C$, ce qui achève de prouver le point (1).

Prouvons (2). Soit k' une k-algèbre. Alors $W' = \theta(E) \otimes k'$ est un sous-comodule de $V' = V \otimes k'$ contenant $E' = E \otimes k'$, et comme les $c_\lambda \otimes 1$ forment une base de V' sur k', il résulte de $(*)$ que tout sous-comodule de V' contenant E' contient W'. Ceci prouve que W' est le plus petit sous-comodule de V' contenant E'. □

Remarques 1.18. — Si $k = \overline{k}$ est un corps algébriquement clos, on définit une variété algébrique affine X comme étant l'ensemble des zéros dans k^n (pour un certain entier $n \geq 1$) communs à tous les polynômes appartenant à un certain idéal J de $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Notons que J n'est pas unique en général, car pour tout entier $r \geq 1$ l'idéal J^r définit le même ensemble de zéros que J. Mais comme on ne s'intéresse qu'aux fonctions polynomiales sur l'ensemble X et que f^r s'annule sur X ssi f s'y annule, on associe à X la k-algèbre de type fini $B = A/I$ où $I = \sqrt{J}$ est l'idéal de A formé des f dont une puissance est dans J. La k-algèbre B est réduite, i.e. n'a pas d'éléments nilpotents $\neq 0$.

(i) D'une part, si X' est une seconde variété algébrique affine, correspondant à la k-algèbre B', on montre qu'un morphisme de variétés de X' vers X est « la même chose » qu'un morphisme de k-algèbres $B \to B'$. On voit donc qu'on peut définir la catégorie des variétés algébriques affines sur k comme étant la catégorie opposée de celle des k-algèbres de type fini réduites. La généralisation aux k-schémas affines (de type fini) consiste simplement à s'autoriser à considérer des k-algèbres (de type fini) non réduites, comme $k[T]/(T^n - 1)$ qui n'est pas réduite si $\mathrm{car}(k)$ divise n.

(ii) D'autre part, on dit que le morphisme $X' \to X$ est une *immersion fermée* si c'est un isomorphisme de X' sur une sous-variété fermée de X, ce qui équivaut à dire que le morphisme d'algèbre $B \to B'$ est surjectif, i.e. que B' est le quotient de B par un certain idéal. (Ceci justifie la terminologie introduite en 1.10.)

On pourrait dès maintenant déduire de la proposition précédente le théorème disant que sur un corps k, tout k-schéma en groupes G affine de type fini est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ (cf. 2.12 plus loin), mais on va d'abord introduire les stabilisateurs, afin de mettre en valeur la force du Lemme de Yoneda (cf. Section 2).

***Définition et proposition 1.19* (Stabilisateurs)**. — Soient k un corps, G un k-schéma en groupes affines, $A = k[G]$ la k-algèbre de Hopf correspondante, V un A-comodule, $v \in V$ et W un sev de V. Le **stabilisateur** de W (resp. de v), noté G_W (resp. G_v) est le sous-foncteur de G défini comme suit : pour toute k-algèbre R,

$$\begin{aligned} G_W(R) &= \{g \in G(R) \mid g(W \otimes R) = W \otimes R\} \\ &= \{g \in G(R) \mid g(W \otimes R) \subset W \otimes R \quad \textit{et} \quad g^{-1}(W \otimes R) \subset W \otimes R\} \end{aligned}$$

$$G_v(R) = \{g \in G(R) \mid g(v \otimes 1) = v \otimes 1\}.$$

Alors G_W et G_v sont des sous-schémas en groupes fermés de G, i.e. chacun d'eux provient d'une certaine algèbre de Hopf quotient de A.

Démonstration. — Faisons-la pour G_W ; le cas de G_v est analogue et est laissé au lecteur. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de W, complétons-la en une base $(v_i)_{i \in I'}$ de V, où $I' \supset I$. Pour tout $j \in I$, on peut écrire de façon unique

$$\Delta_V(v_j) = \sum_{i \in I} v_i \otimes a_{ij} + \sum_{i \in I' - I} v_i \otimes b_{ij}$$

avec les a_{ij} et b_{ij} dans A, nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Soient R une k-algèbre et $g \in G(R)$, i.e. g est un morphisme de k-algèbres $A \to R$. Alors dans $V \otimes R$ on a l'égalité :

$$g(v_j \otimes 1) = \sum_{i \in I} v_i \otimes g(a_{ij}) + \sum_{i \in I' - I} v_i \otimes g(b_{ij})$$

donc on voit que $g(W \otimes R) \subset W \otimes R$ ssi g s'annule sur tous les b_{ij}. De même, comme $g^{-1} = g \circ \tau$ (où τ est l'antipode de A), on voit que $g^{-1}(W \otimes R) \subset W \otimes R$ ssi g s'annule sur tous les $\tau(b_{ij})$. Notons alors $\mathcal{I}$ l'idéal de A engendré par les b_{ij} et $\tau(b_{ij})$. Comme un morphisme de k-algèbres $A \to R$ qui s'annule sur $\mathcal{I}$ est « la même chose » qu'un morphisme de k-algèbres $A/\mathcal{I} \to R$, on obtient donc un isomorphisme canonique

$$G_W(R) = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg.}}(A/\mathcal{I}, R)$$

qui est fonctoriel en R. On pourrait montrer directement que $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf, mais ceci va résulter du Lemme de Yoneda (cf. Section 2). $\square$

Afin de traiter le cas (important par la suite) où W est un sev de dimension 1 de V, introduisons dès maintenant le groupe des caractères de G.

Définition 1.20. — Soient Λ un anneau, G un Λ-schéma en groupes affine, A son algèbre de Hopf.

(i) Un **caractère** de G est un morphisme de Λ-schémas en groupes $G \to \mathbb{G}_m$, i.e. un morphisme d'algèbres de Hopf $\Lambda[T, T^{-1}] \to A$, ce qui revient à se donner un élément inversible χ de A tel que $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ et $\varepsilon(\chi) = 1$. (Comme $1 = \varepsilon(\chi) = \chi\tau(\chi)$, ceci entraîne que $\tau(\chi) = \chi^{-1}$.)

(ii) L'ensemble des caractères de G forme un groupe, noté $X(G)$ et appelé le **groupe des caractères** de G. Il s'identifie, d'après ce qui précède, au sous-groupe du groupe multiplicatif $A^\times$ formé des $\chi \in A^\times$ tels que $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ et $\varepsilon(\chi) = 1$.

(iii) Comme $X(G)$ est commutatif, il est d'usage de noter additivement sa loi, i.e. on note $\chi + \chi'$ le caractère qui correspond à l'élément $\chi\chi'$ de $A^\times$, i.e. pour tout Λ-algèbre R et $g \in G(R)$, on a $(\chi + \chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$. (Faire attention à cela !)

Remarque. — Si Λ ne contient pas d'idempotents autres que 0 et 1 (par exemple si Λ est intègre), alors les conditions $\chi \neq 0$ et $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ entraînent $\varepsilon(\chi) = 1$. En effet, les hypothèses entraînent $\chi = \varepsilon(\chi)\chi \neq 0$ et $\varepsilon(\chi) = \varepsilon(\chi)^2$, donc $\varepsilon(\chi)$ est un idempotent $\neq 0$.

Proposition 1.21. — *Soient k un corps, H un k-schéma en groupes, $k[H]$ son algèbre de Hopf. Les caractères de H sont linéairement indépendants dans $k[H]$.*

Démonstration. — Supposons qu'on ait une égalité $t_0\chi_0 + \cdots + t_r\chi_r = 0$ avec les $\chi_i \in X(H)$ deux à deux distincts, les $t_i \in k$ non nuls et r minimal. Alors, par minimalité de r, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ sont linéairement indépendants. Remplaçant t_i par $-t_i/t_0$ pour tout $i \geq 1$, l'égalité se récrit $\chi_0 = \sum_{i=1}^r t_i\chi_i$. Alors on a

$$\sum_{i=1}^r t_i\chi_i \otimes \chi_i = \Delta(\chi_0) = \chi_0 \otimes \chi_0 = \sum_{i,j=1}^r t_it_j\chi_i \otimes \chi_j$$

et comme les $\chi_i \otimes \chi_j$ sont linéairement indépendants ceci donne $t_i = t_i^2$ et $t_it_j = 0$ si $i \neq j$. Comme les $t_i \in k$ sont non nuls, ceci donne $r = 1$ et $t_1 = 1$, d'où $\chi_0 = \chi_1$, contredisant l'hypothèse que les χ_i étaient deux à deux distincts. $\square$

Définition et proposition 1.22 **(Espaces de poids et invariants)**

Soient k un corps, H un k-schéma en groupes, V un H-module.

(i) *Soit* $D = kv$ *une droite de* V. *Alors* D *est stable par* H *(i.e. est un sous-*H*-module) si et seulement si* $\Delta_V(v) = v \otimes \chi$, *pour un certain* $\chi \in X(H)$.

(ii) *Pour tout* $\chi \in X(H)$, *on pose* $V_\chi = \{v \in V \mid \Delta_V(v) = v \otimes \chi\}$ *et on l'appelle* **l'espace de poids** χ *dans* V *(il peut bien sûr être nul). Les éléments de* V_χ *s'appellent les* **semi-invariants** *de poids* χ.

(iii) *C'est le sous-espace formé des* $v \in V$ *tels que pour toute* k*-algèbre* R *et tout* $h \in H(R)$ *on ait dans* $V \otimes R$ *l'égalité* $h(v \otimes 1) = v \otimes \chi(h)$. *(En particulier, pour tout* $h \in H(k)$ *on a* $hv = \chi(h)v$.*)*

(iv) *Si* $\chi = 0$ *en notation additive, c.-à-d. si* χ *est l'élément* 1 *de* $k[H]$, *on pose* $V_0 = V^H$ *et on l'appelle le sous-espace des* H-**invariants** *: d'après ce qui précède, il est formé des* $v \in V$ *tels que pour toute* k*-algèbre* R *et tout* $h \in H(R)$ *on ait dans* $V \otimes R$ *l'égalité* $h(v \otimes 1) = v \otimes 1$.

(v) *Les espaces de poids sont en* **somme directe**, *i.e. si* $\chi_1, \dots, \chi_r \in X(H)$ *sont deux à deux distincts et si des* $v_i \in V_{\chi_i}$ *vérifient* $v_1 + \cdots + v_r = 0$, *alors* $v_i = 0$ *pour tout* i.

Démonstration. — (i) D'après la proposition 1.19, D est un sous-H-module ssi $\Delta_V(v) = v \otimes \chi$ pour un certain $\chi \in k[H]$. Mais dans ce cas, χ est nécessairement un caractère car on a $v = \varepsilon(\chi)v$ d'où $\varepsilon(\chi) = 1$, et en complétant v en une base de V, on voit que l'égalité

$$v \otimes \Delta(\chi) = \Delta_V(v) \otimes \chi = v \otimes \chi \otimes \chi$$

entraîne $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$.

(iii) Supposons que pour tout $h \in H(R)$ on ait dans $V \otimes R$ l'égalité $h(v \otimes 1) = v \otimes \chi(h)$. Alors $D = kv$ est un sous-H-module de V et donc, d'après 1.19, on a $\Delta_V(v) = v \otimes \phi$ pour un certain $\phi \in k[H]$. En prenant $R = k[H]$ et $h = \mathrm{id}_R$, on voit alors que $\phi = \chi$.

(iv) Supposons $v_1 + \cdots + v_r = 0$. Alors on a :

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \Delta_V(v_i) = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \chi_i$$

et, les χ_i étant linéairement indépendants dans $k[H]$, ceci entraîne $v_i = 0$ pour tout i. □

Proposition 1.23. — *Soient* k *un corps,* G *un* k*-schéma en groupes affine,* H *un sous-schéma en groupes fermé distingué,* V *un* G*-module. Alors le sev* V^H *des* H*-invariants est un sous-*G*-module, i.e. on a* $\Delta_V(V^H) \subset V^H \otimes k[G]$.

Démonstration. — Soient $A = k[G]$, $B = k[H]$, $\Delta_V : V \to V \otimes A$ et Δ'_V la composée de Δ_V avec le morphisme $A \to B$. Alors $V^H = \{v \in V \mid \Delta'(v) = v \otimes 1_B\}$.

Soit $v \in V^H$; écrivons $\Delta_V(v) = \sum_i v_i \otimes a_i$ avec les $a_i \in A$ linéairement indépendants. Pour tout morphisme de k-algèbres $R \to R'$, $g \in G(R)$ et $h \in H(R')$ on a l'égalité suivante dans $(V \otimes R) \otimes_R R' = V \otimes R'$, où l'on a noté g' l'image de g dans $G(R')$:

$$(*) \qquad h\big(g(v \otimes 1_R) \otimes_R 1_{R'}\big) = g'(g'^{-1}hg')(v \otimes 1_{R'}) = g'(v \otimes 1_{R'}) ,$$

ceci puisque $H(R')$ est distingué dans $G(R')$ et que $v \in V^H$. Appliquons ceci à $R = A$ et $g = \mathrm{id}_A$, puis au morphisme $A \to R' = B \otimes A$, $a \mapsto 1_B \otimes a$ et à $h : B \to R'$, $b \mapsto b \otimes 1_A$. Dans ce cas, on a $g(v \otimes 1_A) = \Delta_V(v)$ et

$$(1) \qquad h\big(\Delta_V(v) \otimes_R R'\big) = h\big(\sum_i v_i \otimes 1_B \otimes a_i\big) = \sum_i \Delta'(v_i) \otimes a_i$$

tandis que

$$(2) \qquad g'(v \otimes 1_B \otimes 1_A) = \sum_i v_i \otimes 1_B \otimes a_i.$$

Comme les $a_i \in A$ sont linéairement indépendants, on en déduit que pour tout i on a $\Delta'(v_i) = v_i \otimes 1_B$, i.e. $v_i \in V^H$. On a donc $\Delta_V(v) \in V^H \otimes A$. □

Dans le même ordre d'idée, démontrons le lemme suivant. Soient k un corps, G un k-schéma en groupes affine, $A = k[G]$. La comultiplication $\Delta : A \to A \otimes A$ munit $V = A$ de deux structures de G-module à gauche : pour $\phi \in A$, un morphisme de k-algèbres $R \to R'$ et $g \in G(R)$, $g\phi$ (resp. $g * \phi$) est la fonction qui à tout $g' \in G(R')$ associe $\phi(g'g)$ (resp. $\phi(g^{-1}g')$), c.-à-d. si $\Delta(\phi) = \sum_i \phi_i \otimes \psi_i$ alors

$$g\phi = \sum_i \phi_i \otimes g(\psi_i) \in A \otimes R \qquad \text{et} \qquad g * \phi = \sum_i g^{-1}(\phi_i) \otimes \psi_i = \sum_i g(\tau(\phi_i)) \otimes \psi_i \in R \otimes A.$$

Pour un sous-schéma en groupes fermé H de G (pas nécessairement distingué), on note $k[G]^H$ et $k[G]^{*H}$ la sous-algèbre des H-invariants pour ces deux actions.

Lemme 1.24. — *Soit $\phi \in k[G]$. Alors ϕ appartient à $k[G]^H$ (resp. à $k[G]^{*H}$) $\iff$ pour tout morphisme de k-algèbres $R \to R'$, $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$, on a $\phi(gh) = \phi(g)$ (resp. $\phi(hg) = \phi(g)$).*

Démonstration. — L'implication $\Rightarrow$ est claire, prouvons l'autre. Soit $\phi \in k[G]$ telle que pour tout $h \in H(R)$ l'application $h\phi \in k[G] \otimes R$ vérifie $(h\phi)(g) = \phi(gh) = \phi(g)$, pour tout $g \in G(R')$, où R' est une R-algèbre. Appliquant ceci à $R' = k[G] \otimes R$ et $g =$ le morphisme $k[G] \to R'$, $a \mapsto a \otimes 1_R$ on obtient que $h\phi = \phi \otimes 1_R$, d'où $\phi \in k[G]^H$. La démonstration est analogue pour $k[G]^{*H}$. □

Théorème 1.25. — *Soient k un corps, G un k-schéma en groupes affine, H un sous-schéma en groupes fermé* **distingué**.

(i) *$B = k[G]^H$ est une sous-algèbre de Hopf de $A = k[G]$, donc définit un k-schéma en groupes $G' = \mathrm{Spec}(B)$.*

(ii) *L'inclusion $B \subset A$ définit un morphisme de k-schémas en groupes $\pi : G \to G'$ et l'on a $H \subset \mathrm{Ker}(\pi)$.* [7]

(iii) *Tout morphisme de k-schémas en groupes affines $\gamma : G \to G''$ tel que $H \subset \mathrm{Ker}(\gamma)$ se factorise de façon unique à travers π, i.e. l'image du morphisme $k[G''] \to k[G]$ est contenue dans B.*

Démonstration. — (i) Soit $\phi \in B$. Soit $R \to R'$ un morphisme de k-algèbres, $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$. On a

$$(h^{-1} * \phi)(g) = \phi(hg) = \phi(gg^{-1}hg) = \phi(g)$$

(la dernière égalité car $g^{-1}hg \in H(R')$ et $\phi \in B$. D'après le lemme, ceci montre que $h^{-1} * \phi = \phi$ et donc $\phi \in k[G]^{*H}$. Au passage, un calcul similaire montre que $\tau(\phi) \in B$. On montre de même que $k[G]^{*H} \subset B$, d'où $B = k[G]^H = k[G]^{*H}$.

Alors, la proposition précédente, appliquée aux deux actions de G sur A, entraîne :

$$(**) \qquad \Delta(B) \subset (B \otimes A) \cap (A \otimes B).$$

Notant C un supplémentaire de B dans A, on a

$$A \otimes A = (B \otimes B) \oplus (B \otimes C) \oplus (C \otimes B) \oplus (C \otimes C)$$

d'où on déduit que $(B \otimes A) \cap (A \otimes B) = B \otimes B$, et donc $(**)$ entraîne que $\Delta(B) \subset B \otimes B$. Par conséquent, B est une sous-algèbre de Hopf de A.

(ii) Notons $I = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ l'idéal d'augmentation de A ; alors $I_B = I \cap B$ est celui de B. Pour toute k-algèbre R, le noyau $K(R)$ de $G(R) \to G'(R)$ est formé des $g : A \to R$ dont la

[7] En fait on a $H = \mathrm{Ker}(\pi)$ mais cette égalité ne pourra être prouvée que plus tard.

restriction à B coïncide avec ε (i.e. des g qui s'annulent sur l'idéal AI_B engendré par I_B). Or, si $h \in H(R)$ et $\phi \in B$ on a $h(\phi) = \phi(h) = \phi(e) = \varepsilon(h)$, donc $H(R) \subset K(R)$.

(iii) Soit $\gamma : G \to G''$ un morphisme de k-schémas en groupes affines, correspondant à un morphisme de k-algèbres de Hopf $\theta : A'' \to A$; supposons que $H \subset \mathrm{Ker}(\gamma)$. Soit $\psi \in A''$. Pour tout morphisme de k-algèbres $R \to R'$, $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$ on a :

$$\theta(\psi)(gh) = \psi\big(\gamma(g)\gamma(h)\big) = \psi(\gamma(g)) = \theta(\psi)(g)$$

(la 2ème égalité car $H \subset \mathrm{Ker}(\gamma)$). Ceci montre que $\theta(\psi) \in B$. $\square$

Remarque. — Lorsque G est de type fini sur k, on verra plus loin qu'il existe un morphisme de k-schémas en groupes $\gamma : G \to \mathrm{GL}(W)$ tel que $\mathrm{Ker}(\gamma) = H$. D'après le point (iii) ci-dessus, γ se factorise par $\pi : G \to G'$ et donc les inclusions $H \subset \mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{Ker}(\gamma) = H$ entraînent $\mathrm{Ker}(\pi) = H$. On pourra alors poser $G' = G/H$; on verra de plus, dans ce cas, que G' est de type fini sur k.

2. Lemme de Yoneda et conséquences

2.1. Lemme de Yoneda et foncteurs représentables. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On notera $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie des foncteurs *contravariants*[8] de $\mathscr{C}$ dans la catégorie (Ens) des ensembles. Pour tout objet X de $\mathscr{C}$, on notera h_X l'élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ défini par $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$, et pour toute flèche $f : Z \to Y$ dans $\mathscr{C}$, $h_X(f)$ est l'application :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X), \qquad g \mapsto g \circ f.$$

Rappelons que si G, F sont des objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, un morphisme de foncteurs $\phi : G \to F$ est la donnée, pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, d'une application $\phi_Y : G(Y) \to F(Y)$, telle que pour tout morphisme $f : Z \to Y$ le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\phi_Y"'] & G(Z) \arrow[d, "\phi_Z"] \\ F(Y) \arrow[r, "F(f)"] & F(Z). \end{tikzcd}$$

En particulier, si l'on a un morphisme de foncteurs $\phi : h_X \to F$ alors, comme id_X est un élément de $h_X(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$, on peut considérer l'élément $\phi_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$.

***Théorème 2.1* (Lemme de Yoneda)**. — *Soit X (resp. F) un objet de $\mathscr{C}$ (resp. $\widehat{\mathscr{C}}$). On a une bijection canonique*

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X), \qquad \phi \mapsto \phi_X(\mathrm{id}_X).$$

Démonstration. — Soit ϕ un morphisme de foncteur $h_X \to F$ et soient Y un objet de $\mathscr{C}$ et f un élément de $h_X(Y)$ i.e. un morphisme $f : Y \to X$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X) \arrow[r, "h_X(f)"] \arrow[d, "\phi_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

Or f est l'image par $h_X(f)$ de id_X et donc $\phi_Y(f) = F(f)\big(\phi_X(\mathrm{id}_X)\big)$. Ceci montre que ϕ est déterminé par l'élément $u = \phi_X(\mathrm{id}_X)$, i.e. que l'application θ du lemme est *injective*.

Réciproquement, fixons u dans $F(X)$ et pour tout objet Y de $\mathscr{C}$ définissons

$$\phi^u_Y : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \to F(Y), \qquad f \mapsto F(f)(u).$$

(8) Ce choix sera justifié plus bas.

Soit $g : Z \to Y$ un morphisme de $\mathscr{C}$; considérons le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X) \arrow[r, "h_X(g)"] \arrow[d, "\phi^u_Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,X) \arrow[d, "\phi^u_Z"] \\
F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z).
\end{tikzcd}$$

Soit $f : Y \to X$. Alors $\phi^u_Y(f) = F(f)(u)$ et donc $(F(g)\circ\phi^u_Y)(f) = (F(g)\circ F(f))(u)$. D'autre part, $h_X(g)(f) = g \circ f$ et donc $(\phi^u_Z \circ h_X(g))(f) = F(g \circ f)(u)$. Le diagramme précédent est donc commutatif, et ceci montre que $\phi^u : h_X \to F$ est bien un morphisme de foncteurs. Ceci montre que l'application injective θ est aussi *surjective* ; c'est donc une bijection. □

Remarquons que toute flèche $f : X \to Y$ dans $\mathscr{C}$ induit un morphisme de foncteurs $h_f : h_X \to h_Y$, défini par $h_f(g) = f \circ g$ pour tout $g : Z \to X$. Par conséquent, $X \mapsto h_X$ est un foncteur covariant de $\mathscr{C}$ dans $\widehat{\mathscr{C}}$.

Corollaire 2.2. — *Pour tous objets X, Y de $\mathscr{C}$, on a* $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, h_Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$. *Par conséquent, le foncteur $X \mapsto h_X$ est pleinement fidèle et permet d'identifier $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 2.1, on a $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(h_X, h_Y) = h_Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$. Ceci prouve la première assertion, et la seconde n'en est qu'une reformulation. □

Définition et proposition 2.3 **(Foncteurs représentables)**

Soit F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que F est **représentable** s'il existe un couple (X, ϕ) où X est un objet de $\mathscr{C}$ et ϕ un isomorphisme $h_X \xrightarrow{\sim} F$.

Dans ce cas, le couple (X, ϕ) est unique à isomorphisme unique près, i.e. si (X', ϕ') est un autre couple représentant F, il existe un unique *morphisme $f : X' \to X$ tel que $\phi \circ h_f = \phi'$ et f est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme ϕ est un isomorphisme, il existe un unique morphisme de foncteur $\alpha : h_{X'} \to h_X$ tel que $\phi \circ \alpha = \phi'$, à savoir $\alpha = \phi^{-1} \circ \phi'$, et d'après la pleine fidélité prouvée plus haut, il existe un *unique* morphisme $f : X' \to X$ tel que $h_f = \alpha$.

De même, il existe un unique morphisme $g : X \to X'$ tel que $h_g = \phi'^{-1} \circ \phi$. Alors $h_g \circ h_f$ est l'identité de $h_{X'}$ et $h_f \circ h_g$ est l'identité de h_X. Par pleine fidélité à nouveau, ceci entraîne que $g \circ f = \mathrm{id}_{X'}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Ceci montre que g est l'inverse de f. □

Remarque 2.4. — On obtient des résultats analogues si à tout objet X de $\mathscr{C}$ on associe le foncteur *covariant* $h^X : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$. Mais dans ce cas $X \mapsto h^X$ est *contravariant* donc il identifie la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ à une sous-catégorie pleine de celle des foncteurs covariants $\mathscr{C} \to (\mathrm{Ens})$. C'est pour cette raison qu'on a considéré les foncteurs h_X plutôt que les h^X.

Proposition 2.5. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie possédant un objet final ω et dans laquelle les produits finis existent. Soit X un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que le foncteur $h_X : \mathscr{C} \to (\mathrm{Ens})$ est un foncteur en groupes, i.e. $h_X(Y)$ est un groupe pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, et pour toute flèche $f : Z \to Y$ dans $\mathscr{C}$, l'application $h_X(f) : h_X(Y) \to h_X(Z)$ est un morphisme de groupes. Alors X est un* groupe *dans la catégorie $\mathscr{C}$, i.e. il existe dans $\mathscr{C}$ des morphismes $m : X \times X \to X$, $e : \omega \to X$ et $\iota : X \to X$ tels que les diagrammes ci-dessous soient* *commutatifs :*

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "m\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \times m"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\
X \times X \arrow[r, "m"] & X
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, e)"] \arrow[d, "(e, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\
X \times X \arrow[r, "m"] & X
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, \iota)"] \arrow[d, "(\iota, \mathrm{id}_X)"'] \arrow[dr, "e"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\
X \times X \arrow[r, "m"] & X
\end{tikzcd}
$$

où l'on a noté $e : X \to X$ la composée de l'unique morphisme $X \to \omega$ avec $e : \omega \to X$. [9]

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, $h_\omega(Y)$ est l'ensemble à un élément $\{\mathrm{pt}\}$. Alors la structure de groupe sur les $h_X(Y)$, fonctorielle en Y, revient à se donner :

(i) Un morphisme de foncteurs $m : h_X \times h_X \to h_X$ qui est « associatif », i.e. qui vérifie $m \circ (m \times \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \times m)$.

(ii) Des morphismes « élément neutre » $e : h_\omega \to h_X$ et « inverse » $\iota : h_X \to h_X$ qui vérifient les propriétés indiquées dans les diagrammes précédents.

Comme les produits existent dans $\mathscr{C}$ alors $h_X \times h_X$ (resp. $h_X \times h_X \times h_X$) est représenté par $X \times X$ (resp. $X \times X \times X$). Par pleine fidélité, e, ι, m proviennent de morphismes $\omega \to X$, $X \to X$ et $X \times X \to X$ que l'on notera encore e, ι et m, et l'on a les diagrammes commutatifs indiqués. □

Corollaire 2.6. — *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie possédant un objet initial α et dans laquelle les coproduits finis existent, et soit A un objet de $\mathscr{A}$. On suppose que le foncteur* covariant *$h^A : \mathscr{A} \to (\mathrm{Ens})$, $R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, R)$ est un foncteur en groupes. Alors A est muni d'une structure de « cogroupe » dans $\mathscr{A}$, i.e. il existe dans $\mathscr{A}$ des morphismes $\Delta : A \to A \sqcup A$ (où $\sqcup$ désigne le coproduit), $\varepsilon : A \to \alpha$ et $\tau : A \to A$ tels que les diagrammes ci-dessous soient commutatifs :*

$$
\begin{tikzcd}
A \sqcup A \sqcup A & A \sqcup A \arrow[l, "\Delta\times \mathrm{id}_A"'] \\
A \sqcup A \arrow[u, "\mathrm{id}_A \times \Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
A & A \sqcup A \arrow[l, "(\mathrm{id}_A, \varepsilon)"'] \\
A \sqcup A \arrow[u, "(\varepsilon, \mathrm{id}_A)"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\mathrm{id}_A"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
A & A \sqcup A \arrow[l, "(\mathrm{id}_A, \tau)"'] \\
A \sqcup A \arrow[u, "(\tau, \mathrm{id}_A)"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}
$$

où l'on a noté $\varepsilon : A \to A$ la composée de $\varepsilon : A \to \alpha$ avec l'unique morphisme $\alpha \to A$.

Soient Λ un anneau commutatif et $\mathscr{A}$ la catégorie des Λ-algèbres. Alors Λ est objet initial et le coproduit est donné par le produit tensoriel. On en déduit :

Corollaire 2.7. — (i) *Soit A une Λ-algèbre. Se donner une structure de foncteur en groupes sur le foncteur h^A* **équivaut** *à se donner une structure d'algèbre de Hopf sur A.*

(ii) *Supposons que h^B soit un second foncteur en groupes et soit $h^A \to h^B$ un morphisme de foncteurs en groupes. Alors le morphisme de Λ-algèbres $\phi : B \to A$ qui lui correspond est un morphisme d'algèbres de Hopf.*

Corollaire 2.8. — *Dans la proposition* 1.19*, la k-algèbre $A/\mathcal{I}$ qui représente le foncteur en groupes G_W (resp. G_v) est une algèbre de Hopf quotient de A, i.e. $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf.*

Définition 2.9 **(GL_n et SL_n).** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le foncteur GL_n qui à tout anneau R associe le groupe $\mathrm{GL}_n(R)$ des matrices de taille n à coefficients dans R et de déterminant inversible dans R, et à tout morphisme $f : R \to S$ associe le morphisme

[9] Et où $m \times \mathrm{id}_X$ désigne le morphisme de $Y = X \times X \times X$ vers $X \times X$ donné par le couple de morphismes $m \circ \mathrm{pr}_{1,2}$ et $\mathrm{id}_X \circ \mathrm{pr}_3$, où pr_* est la projection sur les facteurs $*$ de Y.

$\mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S)$ obtenu en appliquant f à chaque coefficient de la matrice ; ceci est bien un morphisme de groupes car $\sum_{k=1}^n f(a_{ik})f(b_{kj}) = f\big(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\big)$. Ce foncteur est représenté par l'anneau

$$A = \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n] = \mathbb{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}, \mathrm{dét}^{-1}] = \mathbb{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}, T]/(T\,\mathrm{dét}(X_{ij}) - 1).$$

Plus précisément, l'isomorphisme de foncteurs $\phi : h^A \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$ s'obtient en associant à tout morphisme $\chi : A \to R$ l'élément de $\mathrm{GL}_n(R)$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $\chi(X_{ij})$; ceci revient à évaluer χ sur la matrice « générique »

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

qui est l'élément de $\mathrm{GL}_n(A)$ correspondant à l'isomorphisme de foncteur $\phi : h^A \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$.

Vu la formule donnant le coefficient d'indice (i,j) d'un produit de matrices, on voit que la comultiplication est donnée par

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}.$$

Et comme l'élément neutre est la matrice identité I_n, on voit que l'augmentation est donnée par $\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$. Enfin, vu la formule $A^{-1} = \mathrm{dét}(A)^{-1}\, {}^t\mathrm{Com}(A)$, où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs, on voit que l'antipode est donnée par

$$\tau(X_{ij}) = \mathrm{dét}(A)^{-1}(-1)^{i+j}\Delta_{j,i}(A),$$

où $\Delta_{j,i}(A)$ désigne le mineur de A d'indice (j,i). Bien sûr, on peut vérifier par un calcul direct que ceci définit une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n]$, mais on sait sans calcul qu'il en est bien ainsi car Δ, ε et τ reflètent (et induisent) la structure de groupe connue sur $\mathrm{GL}_n(R)$ pour tout anneau R. (10)

Pour tout corps k (plus généralement, pour tout anneau k) on notera $\mathrm{GL}_{n,k}$ le k-foncteur en groupes représenté par l'algèbre de Hopf

$$k[X_{11}, \dots, X_{nn}, \mathrm{dét}^{-1}] = k[X_{11}, \dots, X_{nn}, T]/(T\,\mathrm{dét}(X_{ij}) - 1),$$

i.e. le foncteur qui à toute k-algèbre R associe le groupe $\mathrm{GL}_n(R)$.

On définit de même le foncteur en groupes SL_n qui à tout anneau R associe le groupe $\mathrm{SL}_n(R)$ des matrices de taille n à coefficients dans R et de déterminant 1. Il est représenté par

$$\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_n] = \mathbb{Z}[X_{11}, \dots, X_{nn}]/(\mathrm{dét}(X_{ij}) - 1).$$

et l'on définit de même le foncteur $\mathrm{SL}_{n,k}$.

Remarque 2.10. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. On peut définir, sans choisir de base de V, le k-foncteur en groupes $\mathrm{GL}(V)$ qui associe à toute k-algèbre R le groupe des R-automorphismes du R-module $V \otimes R$. Posons $E = V \otimes V^*$ et soit $S(E)$ son algèbre symétrique. Alors le déterminant dét est un élément bien défini de $S^n(E)$ et $\mathrm{GL}(V)$ est représenté par la k-algèbre $S(E)[\mathrm{dét}^{-1}] = S(E)[T]/(T\,\mathrm{dét} - 1)$.

Proposition 2.11. — *Soit k un corps, G un k-schéma en groupes affine et V un G-comodule de dimension n. Alors la structure de comodule définit un morphisme de k-schémas en groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$, i.e. un morphisme d'algèbres de Hopf $k[\mathrm{GL}(V)] \to k[G]$.*

(10) Par ailleurs, comme $\mathrm{dét} : \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ est un caractère, on sait que $\Delta(\mathrm{dét}) = \mathrm{dét} \otimes \mathrm{dét}$.

Démonstration. — Ceci résulte du Lemme de Yoneda, car la structure de comodule définit un morphisme de groupes $\rho(R) : G(R) \to \mathrm{GL}(V)(R)$, fonctoriel en R.

Une autre démonstration, plus directe mais basée sur la même idée, est la suivante. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V ; il existe des $c_{ij} \in k[G]$, uniquement déterminés, tels que pour $j = 1, \dots, n$ on ait :

$$(*) \qquad \Delta_V(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_{ij}.$$

Notons D le déterminant de la matrice $\big(c_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq n}$. Pour tout morphisme de k-algèbres $g : k[G] \to R$, on a $g(e_j \otimes 1) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes g(c_{ij})$ donc l'image de $g \in G(R)$ dans $\mathrm{GL}_n(R)$ est la matrice $\big(g(c_{ij})\big)_{1\leq i,j\leq n}$ et son déterminant, égal à $g(D)$, est un élément inversible de R. Appliquant ceci au morphisme $\mathrm{id} : k[G] \to k[G]$, on obtient que D est un élément inversible de $k[G]$. Par conséquent, le morphisme de k-algèbres $k[X_{11}, \dots, X_{nn}] \to k[G]$ défini par $\phi(X_{ij}) = c_{ij}$ se prolonge en morphisme de k-algèbres $\phi : k[\mathrm{GL}_n] \to k[G]$. Alors, pour toute k-algèbre R et $g \in G(R)$ on a $\rho(R)(g) = g \circ \phi$.

Il reste à vérifier que ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Notons Δ la comultiplication de $k[G]$ et Δ' celle de $k[\mathrm{GL}_n]$. Soient R une k-algèbre et $g, h \in G(R)$; comme $\rho(R)$ est un morphisme de groupes on a $\rho(R)(gh) = \rho(R)(g)\rho(R)(h)$, i.e. le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
k[G] \arrow[r, "\Delta"] & k[G]\otimes k[G] \arrow[r, "g\otimes h"] & R\otimes R \arrow[r, "m_R"] & R \\
k[\mathrm{GL}_n] \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\Delta'"] & k[\mathrm{GL}_n]\otimes k[\mathrm{GL}_n] \arrow[urr, "m_R\circ(g\phi\otimes h\phi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Appliquant ceci à $R = k[G] \otimes k[G]$, $g(a) = a \otimes 1$ et $h(b) = 1 \otimes b$, on obtient que $\Delta \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \otimes \Delta'$.

On laisse au lecteur la tâche de vérifier de même que $\varepsilon \circ \phi = \varepsilon'$ et $\tau \circ \phi = \phi \circ \tau'$. (En règle générale, il vaut mieux appliquer le Lemme de Yoneda que de chercher explicitement R, g, h comme ci-dessus.) □

Théorème 2.12. — *Soient k un corps et G un k-schéma en groupes affine* de type fini, *i.e. $k[G]$ est une k-algèbre de type fini. Alors G est linéaire, c.-à-d. c'est un sous-schéma en groupes fermé d'un certain* $\mathrm{GL}(V)$.

Démonstration. — La comultiplication $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$ fait de $k[G]$ un $k[G]$-comodule à droite. Soient $x_1, \dots, x_s$ des générateurs de $k[G]$ comme k-algèbre. D'après la proposition 1.17 ils engendrent un sous-comodule V de dimension finie. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V ; il existe des $c_{ij} \in k[G]$, uniquement déterminés, tels que pour $j = 1, \dots, n$ on ait : $\Delta(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes c_{ij}$ et d'après la preuve de la proposition précédente, il y a un morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : k[\mathrm{GL}_n] \to k[G]$ défini par $\phi(X_{ij}) = c_{ij}$.

Pour montrer que ϕ est surjectif, on utilise le fait que V est contenu dans $k[G]$ et l'axiome $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}$. Pour tout $j = 1, \dots, n$ on a donc :

$$e_j = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(e_i) c_{ij} = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(e_i) X_{ij}\Big)$$

et donc l'image de ϕ contient les e_j donc V et donc les générateurs $x_1, \dots x_s$. Il en résulte que ϕ est surjective. □