Chapitre 3 : Théorème de Chevalley et quotients G/H

Références pour ce chapitre :

[DG] Michel Demazure & Pierre Gabriel, Groupes algébriques, Masson & North-Holland, 1970.

[Ja] Jens-Carsten Jantzen, Representations of algebraic groups (2nd edition), Amer. Math. Soc. 2003. (chap. I.2)

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011. (Exp. VI_A et VI_B)

[Wa] William C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer-Verlag, 1979.

Et aussi, pour des résultats d'algèbre commutative ou de théorie des schémas :

[Du] Antoine Ducros, Introduction à la théorie des schémas, Cours de M2 à l'UPMC 2014-2015, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros (II, §§4 & 6).

[EH] David Eisenbud & Joe Harris, The geometry of schemes, Springer-Verlag, 2001. (§§I.1-2 et III.2.5)

[EGA] Éléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck (avec la collaboration de J. Dieudonné), Publ. Math. I.H.É.S.

[Ha] Robin Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977. (II, §7).

[Ma] Hideyuki Matsumura, Commutative algebra (2nd ed.), Benjamin/Cummings, 1980. (§§4–6)

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups (2nd ed.), Birkäuser, 1998. (§1.5)

1. Algèbre de Lie et action adjointe

(1) Soit Λ un anneau, G un Λ-schéma en groupes affine, $A = \Lambda[G]$ et $\Delta, \varepsilon, \tau$ la comultiplication, l'augmentation et l'antipode de A.

Définition 1.1. — Soit M un Λ-module. On note $V(M)$, resp. $W(M)$, le foncteur qui à toute Λ-algèbre R associe $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) = \mathrm{Hom}_R(M \otimes R, R)$, resp. $M \otimes R$. D'autre part, on note M^* le Λ-module dual $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$.

On a un morphisme naturel $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda) \otimes R \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R)$, fonctoriel en la Λ-algèbre R, i.e. on a un morphisme de foncteurs $W(M^*) \to V(M)$. On peut montrer que c'est un isomorphisme *si et seulement si* M est un Λ-module projectif de type fini ; si Λ est un corps k, ceci signifie simplement que M est un k-ev de dimension finie.

***Définition 1.2* (G-module dual)**. — Soit M un G-module à gauche (i.e. un A-comodule à droite). Alors G agit à droite sur le foncteur $V(M)$ de la façon suivante : pour toute Λ-algèbre R, $g \in G(R)$ et $\phi : M \otimes R \to R$, $\phi \cdot g$ est l'application $\phi \circ g : M \otimes R \to R$. On peut convertir ceci en une action à gauche en posant $g\phi = \phi \cdot g^{-1}$, i.e. c'est l'application (R-linéaire !) qui envoie tout $m \in M \otimes R$ sur $\phi(g^{-1}m)$.

Si M est un Λ-module projectif de type fini, on obtient ainsi une action à gauche de G sur le foncteur $W(M^*)$, et en considérant l'action de l'élément $g = \mathrm{id}_A$ de $G(A)$, on obtient (exercice !) une structure de A-comodule à droite, i.e. de G-module à gauche, sur M^*. Explicitons-la lorsque M est un Λ-module libre Λ^n : notons (e_i) la base canonique et (e_i^*) la base duale et écrivons pour tout j :

$$\Delta_M(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_{ij},$$

(1) Version du 27 février 2016.

avec $c_{ij} \in A$. Pour toute Λ-algèbre R, $(e_i \otimes 1)$ est une base de $M \otimes R$, qu'on notera encore (e_i) pour alléger la notation, et de même pour la base duale $(e_i^* \otimes 1)$. Pour tout $g \in G(R)$ on a :

$$(ge_i^*)(e_j) = e_i^*(g^{-1}e_j) = g^{-1}(c_{ij}) = g(\tau(c_{ij})).$$

Ceci montre que

$$\Delta_{M^*}(e_i^*) = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes \tau(c_{ij}).$$

Donc, si $g \in G(R)$ agit sur $M \otimes R$ par la matrice $\rho(g) = (c_{ij}(g))$ alors g agit sur $M^* \otimes R$ par la matrice ${}^t g^{-1} = (c_{ji}(g^{-1}))$. On dit alors que M^* est le G-module **dual** de M.

Définition 1.3 **(Foncteur algèbre de Lie)**. — Notons provisoirement G_1 et G_2 deux copies de G, et A_1, A_2 leurs algèbres de Hopf. Alors l'algèbre de Hopf de $H = G_1 \times G_2$ est $k[H] = A_1 \otimes A_2$, et le sous-groupe diagonal G est le sous-schéma en groupes fermé défini par l'idéal J noyau du morphisme de multiplication $k[H] = A \otimes A \to A$.

Le groupe $H = G_1 \times G_2$ agit à gauche sur G par $(g_1, g_2) \cdot g = g_1^{-1} g g_2$ et ceci correspond à la coaction $\eta : A \to A \otimes k[H]$ définie comme suit : si l'on note $\Delta^2 = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, et si pour tout $\phi \in A$ on écrit

$$\Delta^2(\phi) = \sum \alpha_i \otimes \beta_j \otimes \gamma_\ell$$

alors pour tous $g_1, g, g_2 \in G(R)$ on a $\phi(g_1^{-1} g g_2) = \sum \tau(\alpha_i)(g_1)\beta_j(g)\gamma_\ell(g_2)$ donc on voit que

$$\eta(\phi) = \sum \beta_j \otimes \big(\tau(\alpha_i) \otimes \gamma_\ell\big) \in A \otimes k[H].$$

Enfin, l'action par conjugaison de G sur G est obtenue en composant l'inclusion diagonale $G \subset H$ avec l'action de H, et l'on obtient ainsi l'action par conjugaison de G sur A, donnée par :

$$\mu : A \to A \otimes A, \qquad \phi \mapsto \sum \beta_j \otimes \tau(\alpha_i)\gamma_\ell.$$

Soit $I = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ l'idéal d'augmentation de A ; comme $A = k \oplus I$ on peut écrire, pour tout $\phi \in I$, $\mu(\phi) = 1 \otimes \psi$ modulo $I \otimes A$; alors pour tout $g \in G(R)$ on a

$$0 = \phi(geg^{-1}) = \psi(g)$$

et en appliquant ceci à $R = A$ et $g = \mathrm{id}_A$ on obtient $\psi = 0$. Ceci montre que $\mu(I) \subset I \otimes A$; i.e. I est un sous-G-module de A. De plus, comme l'action de H et donc de G sur A respecte la multiplication (i.e. $g \cdot (\phi_1\phi_2) = (g \cdot \phi_1)(g \cdot \phi_2)$) on obtient, en notant π la projection $I \to I/I^2$, que $(\pi \otimes \mathrm{id}_A) \circ \mu : I \to (I/I^2) \otimes A$ se factorise par π et munit donc I/I^2 d'une structure de G-module.

On obtient donc une action à gauche (appelée action adjointe) de G sur le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) = \mathrm{Hom}_\Lambda(I/I^2, R)$. En particulier, on pose $\mathrm{Lie}(G) = \underline{\mathrm{Lie}}(G)(\Lambda) = (I/I^2)^*$ et on l'appelle la Λ-algèbre de Lie de G

Si I/I^2 est un Λ-module projectif de type fini, on a vu que le foncteur précédent coïncide avec le foncteur $R \mapsto \mathrm{Lie}(G) \otimes R$ et que $\mathrm{Lie}(G)$ est muni d'une structure de G-module qu'on appelle **l'action adjointe** de G sur $\mathrm{Lie}(G)$. Ceci s'applique, en particulier, lorsque Λ est un corps k et que G est de type fini sur k ; dans ce cas, l'idéal I est de type fini et comme $A/I = k$ on obtient que I/I^2 est un k-espace vectoriel de dimension finie. On a donc obtenu la proposition suivante.

Proposition 1.4 **(Algèbre de Lie et action adjointe)**. — *Soit k un corps, G un k-schéma en groupes affine de type fini et I l'idéal d'augmentation de $k[G]$. Alors $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = (I/I^2)^*$ est un G-module de dimension finie, appelé la* représentation adjointe. *Le morphisme correspondant $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est noté* Ad.

On peut également montrer la proposition suivante (cf. la feuille de TD n°1). Soit ϵ une variable de carré nul, i.e. $\Lambda[\epsilon] = \Lambda \oplus \Lambda\epsilon$, avec $\epsilon^2 = 0$. [2] Pour toute Λ-algèbre R, on pose $R[\epsilon] = R \otimes \Lambda[\epsilon] = R \oplus R\epsilon$. Le morphisme de Λ-algèbres $R[\epsilon] \to R$ envoyant ϵ sur 0 induit un morphisme de groupes $G(R[\epsilon]) \to G(R)$; notons $G_\epsilon(R)$ son noyau.

Proposition 1.5. — *$G_\varepsilon(R)$ est commutatif et s'identifie à $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ (ce dernier étant considéré comme groupe abélien).*

Exemples 1.6. — (1) Soit $G = \mathrm{GL}_n$. Pour toute Λ-algèbre R, on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) = \{I_n + \epsilon M \mid M \in M_n(R)\} \simeq M_n(R)$$

et l'isomorphisme précédent est bien un isomorphisme de groupes, puisque $(I_n + \epsilon M)(I_n + \epsilon M') = I_n + \epsilon(M + M')$. De plus, le morphisme naturel $M_n(\Lambda) \otimes R \to M_n(R)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Lie}(G) = M_n(\Lambda)$ est munie de l'action adjointe, définie pour tout $M \in M_n(\Lambda)$ et $g \in G(R)$ par $g \cdot M = gMg^{-1} \in M_n(R)$.

(2) Soit $G = \mathrm{SL}_n$. Pour tout $M \in M_n(R)$, on voit facilement que $\mathrm{dét}(I_n + \epsilon M) = 1 + \epsilon \,\mathrm{Tr}(M)$. Notant $\mathfrak{sl}_n(R)$ le sous-R-module de $M_n(R)$ formé des matrices de trace nulle, on en déduit que

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) = \{I_n + \epsilon M \mid M \in \mathfrak{sl}_n(R)\} \simeq \mathfrak{sl}_n(R).$$

À nouveau, le morphisme naturel $\mathfrak{sl}_n(\Lambda) \otimes R \to \mathfrak{sl}_n(R)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sl}_n(\Lambda)$ est munie de l'action adjointe, définie pour tout $M \in \mathfrak{sl}_n(\Lambda)$ et $g \in G(R)$ par $g \cdot M = gMg^{-1} \in \mathfrak{sl}_n(R)$.

(3) On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n, e_{-n}, \ldots, e_{-1})$ la base canonique de $V = \Lambda^{2n}$. Soit ϕ la forme bilinéaire alternée sur V définie par $\phi(X, Y) = \sum_{i=1}^n (x_i y_{-i} - x_{-i} y_i)$ et soit $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ le groupe symplectique correspondant, i.e. pour toute Λ-algèbre R,

$$\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid {}^t g K g = K\},$$

où $K = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ est le foncteur noté $\mathfrak{sp}_{2n}$ ci-dessous :

$$\mathfrak{sp}_{2n}(R) = \{B = I_n + \epsilon M \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid {}^t B K B = K\} \simeq \{M \in M_{2n}(R) \mid {}^t M K + K M = 0\}.$$

On a $K = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$, où J est la matrice carrée de taille n ayant des 1 sur la seconde diagonale et des 0 partout ailleurs, et en faisant un calcul explicite on peut voir que $\mathfrak{sp}_{2n}(R)$ est le sous-R-module de $M_{2n}(R)$ engendré par les matrices $E_{ii} - E_{-i,-i}$, $E_{i,-i}$ et $E_{-i,i}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $E_{ij} - E_{-j,-i}$ et $E_{i,-j} + E_{j,-i}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$. (En particulier, c'est un R-module libre de rang $2n^2 + n$.)

Il en résulte que le morphisme naturel $\mathfrak{sp}_{2n}(\Lambda) \otimes R \to \mathfrak{sp}_{2n}(R)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sp}_{2n}(\Lambda)$ est munie de l'action adjointe, définie pour tout $M \in \mathfrak{sp}_{2n}(\Lambda)$ et $g \in G(R)$ par $g \cdot M = gMg^{-1}$. Comme ${}^t g K = K g^{-1}$ on a bien :

$${}^t(gMg^{-1})K + KgMg^{-1} = {}^t g^{-1}({}^t M K + K M) g^{-1} = 0.$$

Observons aussi que la base donnée plus haut montre que $\mathfrak{sp}_{2n}(R) \subset \mathfrak{sl}_{2n}(R)$; en fait on peut montrer que $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{SL}_{2n}$.

Remarque 1.7. — Comme son nom l'indique, $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ est muni d'une structure de R-algèbre de Lie. Même si l'on n'en aura guère besoin dans la suite, indiquons brièvement comment elle est définie. Soient ϵ, ϵ' deux variables de carré nul ; pour $X, Y \in \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$,

[2] Cette variable de carré nul ϵ n'est pas à confondre avec l'augmentation $\varepsilon : A \to \Lambda$.

notons $e + \epsilon X$ l'élément de $G_\epsilon(R) = \mathrm{Ker}\big(G(R[\epsilon]) \to G(R)\big)$ qui lui correspond, et définissons de même $e + \epsilon' Y \in G_{\epsilon'}(R)$. Alors l'inverse de $e + \epsilon X$ (resp. $e + \epsilon' Y$) est $e - \epsilon X$ (resp. $e - \epsilon' Y$) et l'on peut montrer (cf. [DG, §II.4.4]) que le commutateur

$$(e + \epsilon X)(e + \epsilon' Y)(e - \epsilon X)(e - \epsilon' Y)$$

appartient à $G_{\epsilon\epsilon'}(R)$, i.e. est de la forme $e + \epsilon\epsilon' U$ pour un certain $U \in \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ et l'on pose $[X, Y] = U$. On obtient ainsi une application R-bilinéaire alternée $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) \times \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) \to \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$, qui vérifie l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

donc munit $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R)$ d'une structure de R-algèbre de Lie, fonctorielle en R.

Exemples 1.8. — (1) Si $G = \mathrm{GL}_n$, le crochet de Lie sur $M_n(R)$ est $[X, Y] = XY - YX$ (les produits XY et YX étant calculés dans l'algèbre associative $M_n(R)$).

(2) Si H est un sous-schéma en groupes fermé de GL_n, alors $\underline{\mathrm{Lie}}(H)(R)$ est une sous-algèbre de Lie de $M_n(R)$, i.e. pour tout $X, Y \in \underline{\mathrm{Lie}}(H)(R)$ le crochet $[X, Y] = XY - YX$ (calculé dans $M_n(R)$) appartient à $\underline{\mathrm{Lie}}(H)(R)$. On laisse au lecteur le soin de le vérifier dans les cas de SL_n et de Sp_{2n}.

2. k-schémas en groupes de type fini

On fixe un corps k et une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Cette section a deux objectifs. D'une part, définir la composante connexe de l'élément neutre e dans un k-schéma en groupes de type fini G et montrer que c'est un sous-schéma en groupes ouvert et fermé, *géométriquement irréductible* et invariant par tout automorphisme de G préservant e. D'autre part, définir et donner une caractérisation des k-schémas en groupes *géométriquement réduits*.

2.1. Composante connexe d'un k-schéma en groupes de type fini. — Soit G un k-schéma en groupes de type fini. Le but de cette sous-section est de définir la **composante** (connexe de l'élément) **neutre** G^0 de G et de montrer que c'est un sous-schéma en groupes ouvert (et fermé), et que $G_0 \otimes \overline{k}$ est irréductible. Commençons par définir la notion de k-schéma géométriquement connexe ou irréductible. Même si l'on n'en aura guère besoin en dehors du cas où $X = G$ est affine, rappelons qu'un k-schéma X est dit de type fini s'il est recouvert par un nombre *fini* d'ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, où chaque A_i est une k-algèbre de type fini. Si X est un tel schéma, on notera $X_{\text{réd}}$ le schéma réduit sous-jacent, i.e. l'espace topologique est le même et le faisceau d'anneaux est $\mathscr{O}_X/\mathscr{N}$ où $\mathscr{N}$ désigne le faisceau d'idéaux formé par les éléments nilpotents.

***Définition 2.1* (Espaces topologiques noethériens)**. — (i) Soient A une k-algèbre *de type fini* et $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Comme les fermés de Y sont les $V(I)$, pour I un idéal de A tel que $I = \sqrt{I}$, que pour deux tels idéaux I, J on a $V(I) \supset V(J) \Leftrightarrow I \subset J$ et que toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire, on voit que Y vérifie la propriété suivante :

$(\star)$ Toute suite décroissante de fermés de Y est stationnaire.

Un espace topologique vérifiant cette propriété est dit **noethérien**.

(ii) Remarquons que cette propriété est aussi vérifiée par tout k-schéma de type fini X (pas nécessairement affine). En effet, par hypothèse X est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, avec A_i une k-algèbre de type fini. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de X. Pour chaque i, $F_n \cap U_i$ est un fermé de U_i donc cette suite est stationnaire à partir d'un certain n_i. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts U_i, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire pour $n \geq \mathrm{Max}(n_i)$. Ceci prouve que X est un espace topologique noethérien.

(iii) Remarquons aussi que la propriété ($\star$) est équivalente à la suivante :

($\star'$) Tout ensemble non vide de fermés de Y possède au moins un élément minimal.

***Définitions 2.2* (Espaces topologiques irréductibles ou connexes)**
Soit X un espace topologique. On dira qu'un sous-ensemble de X est strict s'il est distinct de X.

(i) On dit que X est **irréductible** s'il n'est pas réunion de deux fermés stricts E, F, i.e. si la condition $X = E \cup F$ avec E, F fermés entraîne que $E = X$ ou $F = X$. Par passage aux complémentaires, ceci équivaut à dire que si U, V sont deux ouverts non vides de X, alors $U \cap V$ est non vide ; ceci équivaut aussi à dire que tout ouvert non vide U est *dense*. Et aussi, on voit par récurrence sur n que si X est irréductible et égal à une réunion de fermés $X_1, \ldots, X_n$, alors il est égal à l'un d'eux.

(ii) On dit qu'une partie Y de X est irréductible si, munie de la topologie induite c'est un espace topologique irréductible. Ceci équivaut à dire que si E, F sont deux fermés de X tels que $Y \subset E \cup F$, alors Y est contenu dans E ou dans F. On voit ainsi que : Y est irréductible si et seulement si son adhérence $\overline{Y}$ l'est. On voit aussi que si Y est irréductible et contenu dans une réunion de fermés $F_1, \ldots, F_n$ de X, alors il est contenu dans l'un d'eux.

(iii) D'autre part, on rappelle la notion plus familière suivante : X est dit *connexe* s'il n'est pas réunion *disjointe* de deux fermés stricts E, F, i.e. si la condition $X = E \sqcup F$ avec E, F fermés (et donc aussi ouverts) entraîne que $E = X$ (et $F = \varnothing$) ou $F = X$ (et $E = \varnothing$). Ceci équivaut à dire que toute partie à la fois ouverte et fermée de X est soit vide soit égale à X.

(iv) Il est clair que tout espace irréductible est connexe, mais la réciproque est fausse en général. Par exemple, soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathbb{C}[T_1, T_2]/T_1T_2$; alors X est la réunion des deux fermés stricts $F_i = \mathrm{Spec}(A/(T_i))$, chacun isomorphe à la droite affine $\mathbb{A}_1$ (donc irréductible et a fortiori connexe). Donc X n'est pas irréductible, mais comme F_1, F_2 sont connexes et d'intersection non vide (ils ont en commun l'idéal maximal (T_1, T_2)), alors $X = F_1 \cup F_2$ est connexe.

Lemme 2.3. — *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Si X est irréductible (resp. connexe), il en est de même de $f(X)$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

***Définition et proposition 2.4* (Composantes irréductibles et composantes connexes)**
Soit X un espace topologique noethérien.

(i) *On peut écrire $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ où les X_i sont des fermés irréductibles, et avec n minimal. Ces X_i sont uniquement déterminés et s'appellent les* composantes irréductibles *de X. Ce sont les fermés irréductibles maximaux, i.e. tout fermé irréductible est contenu dans au moins l'un des X_i.*

(ii) *X est réunion d'un nombre fini de composantes connexes. Chacune d'elles est réunion des X_i qu'elle contient et est fermée et* **ouverte**.

Démonstration. — (i) Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Si $\mathscr{F}$ était non vide, alors d'après ($\star'$) il contiendrait un élément minimal Z, nécessairement non irréductible. Donc Z est réunion de deux fermés stricts Z_1 et Z_2 et par minimalité de Z, Z_1 et Z_2 sont des réunions finies de fermés irréductibles, et donc il en est de même de Z, contradiction ! Cette contradiction montre que $\mathscr{F} = \varnothing$ et donc X est réunion finie de fermés irréductibles.

Considérons alors une écriture $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ où les X_i sont des fermés irréductibles, avec n **minimal**. Si Y est un sous-espace irréductible de X, l'inclusion $Y \subset X_1 \cup \cdots \cup X_n$

entraîne que $Y \subset X_j$ pour un certain j. Par conséquent, tout sous-espace irréductible maximal de X est égal à l'un des X_j. Comme de plus on a choisi n minimal, alors aucun X_i n'est contenu dans un X_j avec $j \neq i$, donc chaque X_i est un sous-espace irréductible maximal de X. Ceci prouve l'unicité des X_i et achève la démonstration de (i).

(ii) Les X_i sont irréductibles donc connexes, et l'on sait que si C, D sont deux parties connexes ayant un point commun alors $C \cup D$ est connexe. Considérons alors le graphe Γ de sommets les entiers $1, \dots, n$ et où (i, j) est une arête ssi $X_i \cap X_j \neq \varnothing$. Notons $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$ les composantes connexes de ce graphe et notons C_s la réunion des X_i pour $i \in \Gamma_s$. Alors chaque C_s est fermé et connexe, et X est la réunion disjointe des C_s. Comme les C_s sont en nombre fini, il en résulte que chacun est aussi ouvert. Enfin, il est clair que les C_s sont les composantes connexes de X, i.e. les parties connexes maximales, car si D est une partie connexe non vide, elle est la réunion disjointe des parties ouvertes et fermées $D \cap C_s$, donc ces parties sont toutes vides sauf l'une d'elles qui égale D, donc on a $D \subset C_s$ pour un certain s. $\square$

Remarque 2.5 **(Idempotents)**. — Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ un k-schéma *affine* de type fini et soient $X_1, \dots, X_r$ ses composantes connexes. pour $i = 1, \dots, r$, notons e_i l'élément de $A = \mathscr{O}_X(X)$ égal à 1 sur X_i et à 0 sur les autres X_j, et posons $f_i = 1 - e_i$. Alors $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, i.e. les e_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux, et l'on a $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Pour tout i, l'anneau $A_i = \mathscr{O}_X(X_i)$ est à la fois le localisé A_{e_i} et le quotient A/Af_i, ce qui correspond au fait que X_i est un sous-schéma ouvert et fermé de X.

Soit G un k-schéma en groupes de type fini. L'élément neutre $e \in G(k)$ correspond à un point fermé de G, qui n'est autre que l'idéal d'augmentation I de $k[G]$. La composante connexe C de G contenant e est notée G^0 ; d'après ce qui précède c'est un sous-schéma ouvert et fermé de G ; en particulier c'est encore un k-schéma **affine de type fini**. On l'appelle **composante neutre** de G, ou parfois la « composante connexe » de G (sous-entendu : celle de l'élément neutre). Avant d'énoncer (et démontrer) le théorème qui affirme, entre autre, que G^0 est un sous-schéma en groupes distingué de G, on a besoin d'introduire le lemme et la définition suivants. Pour abréger, on écrira souvent $X \times \overline{k}$ au lieu de $X \times \operatorname{Spec}(\overline{k})$.

Lemme 2.6. — *Soit X un k-schéma de type fini. La projection $X \times \overline{k} \to X$ est surjective, fermée et ouverte.*

Démonstration. — C'est une conséquence du fait que le morphisme $k \to \overline{k}$ est fidèlement plat et entier ; voir [Ma, §§4–6] ou EGA II, 6.1.10 et EGA IV$_2$, 2.4.9. $\square$

Définition 2.7 **(k-schémas géométriquement irréductibles ou connexes)**
Soit X un k-schéma et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On dit que X est *géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*) si le $\overline{k}$-schéma $X_{\overline{k}} = X \times \overline{k}$ est irréductible (resp. connexe). Ceci entraîne en particulier que X est irréductible (resp. connexe), car la projection $X_{\overline{k}} \to X$ est surjective.

Remarque 2.8. — Si k n'est pas algébriquement clos, un k-schéma irréductible (resp. connexe) n'est pas nécessairement géométriquement irréductible (resp. géométriquement connexe). Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-schéma irréductible, mais $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ donc $X_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ est formé de deux points, chacun fermé et ouvert, donc n'est pas connexe.

L'intérêt des notions « géométriquement irréductible ou connexe » apparaît dans le lemme suivant, que nous admettrons (une référence possible est EGA IV$_2$, §4.4).

Proposition 2.9. — *Soit X un k-schéma géométriquement irréductible (resp. connexe).*

(i) *Pour tout corps K contenant k, $X_K = X \times K$ est irréductible (resp. connexe).*

(ii) *Si Y est un k-schéma irréductible (resp. connexe), alors $X \times Y$ est irréductible (resp. connexe).*

Théorème 2.10 **(Composante neutre d'un k-schéma en groupes)**
Soit G un k-schéma en groupes affine de type fini.

(i) *La composante neutre G^0 est un k-schéma* **en groupes** *affine de type fini.*

(ii) *G^0 est* géométriquement irréductible (*donc irréductible*) *et $G^0_{\overline{k}} = G^0 \times \overline{k}$ est la composante neutre de $G_{\overline{k}} = G \times \overline{k}$.*

(iii) *Toutes les composantes connexes de $G_{\overline{k}}$ sont irréductibles, et chacune est égale à $gG^0_{\overline{k}}$ pour un certain $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k}) = G(\overline{k})$.*

(iv) *G^0 est distingué dans G ; plus généralement, si H est un k-schéma en groupes de type fini agissant sur G par automorphismes de groupes, alors H laisse stable G^0.*

(v) *G/G^0 est un k-schéma en groupes affine, $(G/G^0)(\overline{k}) = G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$ est un groupe* **fini** *et $G/G^0 = \mathrm{Spec}(B)$ pour une certaine algèbre de Hopf B de dimension finie sur k.* (3)

Remarque 2.11. — Si k n'est pas algébriquement clos, on prendra garde qu'une composante connexe de G autre que la composante neutre n'est pas nécessairement géométriquement irréductible. Par exemple, soit G le $\mathbb{R}$-schéma en groupes $\mu_{3,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T]/(T^3-1))$. Il est formé de deux points fermés : le point unité e, correspondant à l'idéal $(T-1)$, et le point α correspondant à l'idéal (T^2+T+1), dont le corps résiduel est $\mathbb{C}$. Donc $\{e\}$ et $\{\alpha\}$ sont chacun une composante irréductible de G. Mais $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]/(T^3-1))$ est formé des trois points (chacun étant une composante irréductible) qui correspondent aux idéaux $(T-1)$, $(T-j)$ et $(T-j^2)$.

Démonstration. — (ii) Notons π le morphisme de projection de $G_{\overline{k}} = G \times \overline{k}$ vers G. D'après le lemme 2.6, π est ouvert et fermé. Soit alors U une partie ouverte et fermée non vide de $G^0_{\overline{k}} = G^0 \times \overline{k}$, alors $\pi(U)$ est une partie ouverte et fermée non vide de G^0, donc égale G^0 donc contient le point e. Comme le corps résiduel de e est k, l'image inverse $\pi^{-1}(e)$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\overline{k})$; son intersection avec U étant non vide, on a donc $\pi^{-1}(e) \subset U$. Si le complémentaire U' de U dans $G^0_{\overline{k}}$ était non vide, on pourrait lui appliquer le même raisonnement, ce qui conduirait à une contradiction. Donc $U' = \varnothing$ et ceci montre que $G^0_{\overline{k}}$ est connexe. (4)

Donc $G^0_{\overline{k}}$ est contenu dans la composante neutre C de $G_{\overline{k}}$; mais $\pi(C)$ est connexe et contient e, donc est contenue dans G^0, donc C est contenue dans $\pi^{-1}(G^0) = G^0_{\overline{k}}$. Donc $G^0_{\overline{k}} = C$ est bien la composante neutre de $G_{\overline{k}}$.

Montrons que $G^0_{\overline{k}}$ est irréductible. Dans le cas contraire, il existerait deux composantes irréductibles F_1 et F_2 qui se rencontrent. Soit V l'ouvert complémentaire de la réunion des composantes irréductibles autres que F_1. Alors V (resp. le fermé $F_1 \cap F_2$) contient au moins un point fermé g (resp. h), qu'on peut voir comme un élément de $G^0_{\overline{k}}(\overline{k})$. Alors la translation par hg^{-1} est un automorphisme de $G_{\overline{k}}$, qui induit donc un isomorphisme entre les anneaux locaux en g et en h ; ceux-ci ont donc le même nombre d'idéaux premiers minimaux. Or on peut montrer que pour tout k-schéma de type fini X et $x \in X$, le nombre d'idéaux premiers minimaux de $\mathscr{O}_{X,x}$ est égal au nombre de composantes irréductibles de X contenant x ; ce nombre est donc 1 pour g et ≥ 2 pour h, d'où une contradiction. Ceci montre que $G^0_{\overline{k}}$ est irréductible. Donc G^0 est géométriquement irréductible.

(3) Ceci anticipe sur la suite du cours, i.e. on verra plus loin que le quotient G/G^0 « existe », est un k-schéma en groupes affine de type fini, et que $(G/G^0)(\overline{k}) = G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$.

(4) Ce raisonnement montre que si X est un k-schéma connexe tel que $X(k) \neq \varnothing$, alors X est géométriquement connexe.

(i) Comme G^0 est géométriquement irréductible, alors $G^0 \times G^0$ est irréductible, donc connexe. Comme l'image d'un connexe par une application continue est connexe, les morphismes de multiplication $m : G^0 \times G^0 \to G$ et de passage à l'inverse $\iota : G^0 \to G$ ont leur image contenue dans G^0, donc G^0 est un sous-schéma en groupes ouvert (et fermé) de G. On a déjà dit qu'il est affine et de type fini.

(iii) Soit C une composante connexe de $G_{\overline{k}}$. C'est une partie fermée non vide du k-schéma de type fini $G_{\overline{k}}$ donc elle contient au moins un point $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k})$. Alors, comme la translation par g est un isomorphisme de $G_{\overline{k}}$, on en déduit qu'elle induit un isomorphisme de la composante connexe de e sur celle de g, i.e. on a $C = gG^0_{\overline{k}}$.

(iv) La première assertion découle de la seconde, car G opère sur lui-même par automorphismes intérieurs, i.e. via le morphisme de k-schémas $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'g^{-1}$. Il suffit donc de montrer la seconde assertion. Écrivons H comme réunion disjointe de ses composantes connexes : $H = H^0 \sqcup \cdots \sqcup H^n$. Alors $H \times G$ est la réunion disjointe des $H^i \times G$, donc il suffit de montrer que chaque morphisme de k-schémas $H^i \times G^0 \to G$ se factorise par G^0. Or comme G^0 est géométriquement irréductible et H^i connexe, alors $H^i \times G^0$ est connexe donc son image l'est aussi, et elle contient e car H agit par automorphismes de groupes (i.e. l'image de $H^i \times e$ est e). Donc le morphisme se factorise bien par G^0.

(v) On verra dans la suite du cours que le quotient G/G^0 « existe » et est un k-schéma en groupes affine de type fini, et que $(G/G^0)(\overline{k}) = G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$. Admettons provisoirement ceci. Alors l'action par translation de $G(\overline{k})$ sur $G_{\overline{k}}$ induit une action de $G(\overline{k})$ sur l'ensemble fini E des composantes connexes de $G_{\overline{k}}$. Cette action est transitive, par (iii), et le stabilisateur de la composante neutre est $G^0(\overline{k})$ (car $gG^0 = G^0$ entraîne qu'il existe $h, h' \in G^0(\overline{k})$ tels que $gh = h'$, d'où $g = h'h^{-1} \in G^0(\overline{k})$). Donc $G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$ est en bijection avec E, donc est fini.

De plus, d'après le résultat admis, $G/G^0 = \operatorname{Spec}(B)$ pour une certaine k-algèbre de type fini B (égale aux G^0-invariants dans $k[G]$). Comme $(G/G^0)(\overline{k})$ est fini alors B n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$. [5] Comme c'est une k-algèbre de type fini, $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_s$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de B, donc est un idéal nilpotent I. Comme I est de type fini, il existe un entier n tel que $I^n = (0)$ et donc l'intersection des $\mathfrak{m}_i^n$ est nulle. Par le théorème chinois, B est donc isomorphe à la somme directe des $B/\mathfrak{m}_i^n$; or chacune de ces k-algèbres est de dimension finie, donc B l'est aussi. □

Exemples 2.12. — (a) Soit p un nombre premier, $n = p^r m$ un entier ≥ 2, avec m premier avec p. Soit k un corps de caractéristique p et $G = \mu_{n,k}$. Alors $G^0 = \mu_{p^r,k}$ et $G/G^0 \simeq \mu_{m,k}$ (le morphisme $G \to G/G^0$ étant donné par $g \mapsto g^{p^r}$.)

(b) Soit Q la forme quadratique sur $V = k^2$ définie par $Q(x, y) = xy$ et soit $G = O(2)$ le groupe orthogonal correspondant, i.e. le stabilisateur dans GL_2 de l'élément XY de $S^2(V^*)$, i.e. pour toute k-algèbre R, $G(R)$ égale :

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \,\middle|\, XY = g^{-1} \cdot XY = (aX + bY)(cX + dY) = acX^2 + (ad + bc)XY + bdY^2 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \,\middle|\, ac = 0 = bd, \quad ad + bc = 1 \right\}.$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in R^\times \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s^{-1} \\ s & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in R^\times \right\}.$$

Alors ad et bc sont des idempotents orthogonaux de somme 1, la composante neutre G^0, donnée par $bc = 0$, est isomorphe à $\mathbb{G}_m$, et $k[G/G^0] = k[bc] \simeq k[T]/(T^2 - T)$ correspond au k-schéma en groupes « constant » $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

---

[5] Noter qu'on peut avoir $s < |E|$, cf. la remarque 2.11.

Terminologie 2.13 **(Groupes connexes)**. — On dira qu'un k-schéma en groupes affine de type fini G est **connexe** si l'on a $G = G^0$. Dans ce cas, d'après la proposition 2.9, pour tout k-schéma X connexe (resp. irréductible), $G \times X$ est connexe (resp. irréductible).

Proposition 2.14. — *Soit G un k-schéma en groupes affine de type fini. On a* $\mathrm{Lie}(G^0) = \mathrm{Lie}(G)$.

Démonstration. — En effet, $k[G^0] = k[G]/J$ où l'idéal J est engendré par un certain idempotent f. Notant I l'idéal d'augmentation de $k[G]$, celui de $k[G^0]$ est $\overline{I} = I/J$. Comme $f^2 = f$ alors $J \subset I^2$ et donc le morphisme naturel $I/I^2 \to \overline{I}/\overline{I}^2$ est un isomorphisme. □

2.2. k-schémas (en groupes) géométriquement réduits. — On conserve les notations précédentes, i.e. k est un corps et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

Définition 2.15. — Soient A une k-algèbre et X un k-schéma. Rappelons qu'on dit que A est réduite si elle n'a pas d'élément nilpotent $\neq 0$, et que X est réduit si pour tout ouvert affine U de X la k-algèbre $\mathscr{O}_X(U)$ est réduite.

(i) On dit que A est **géométriquement réduite** si la $\overline{k}$-algèbre $A \otimes \overline{k}$ est réduite. Comme l'application $A \to A \otimes \overline{k}$, $a \mapsto a \otimes 1$ est injective, ceci entraîne que A est réduite.

(ii) On dit que X est **géométriquement réduit** si le $\overline{k}$-schéma $X_{\overline{k}} = X \times \overline{k}$ est réduit. Comme pour tout ouvert affine U de X, le morphisme d'algèbres $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(U) \otimes \overline{k} = \mathscr{O}_{X_{\overline{k}}}(\pi^{-1}(U))$ est injectif, ceci entraîne que X est réduit.

Cette définition est utile, en raison de la proposition suivante :

Proposition 2.16. — (i) *Soient A, B deux $\overline{k}$-algèbres de type fini réduites. Alors $A \otimes_{\overline{k}} B$ est réduite.*

(ii) *Soient X, Y deux k-schémas de type fini géométriquement réduits. Alors $X \times Y$ est géométriquement réduit* (*donc a fortiori réduit*).

Démonstration. — Pour (i) on renvoie à [DG, §I.2 Cor. 4.13] ou [Sp, 1.5.2]. Prouvons (ii) lorsque X, Y sont affines (le cas général s'y ramenant). Posons $A = k[X] \otimes \overline{k}$ et $B = k[Y] \otimes \overline{k}$. Par hypothèse, ce sont des $\overline{k}$-algèbres de type fini réduites, donc d'après (i) il en est de même de $A \otimes_{\overline{k}} B = (A \otimes B) \otimes \overline{k}$. Ceci prouve que $X \times Y$ est géométriquement réduit. □

Remarque 2.17. — Par contre, un produit de k-schémas réduits n'est pas nécessairement réduit si k est un corps non parfait. Par exemple, prenons $k = \mathbb{F}_p(T)$ et G le sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_m^2$ défini par l'équation $Y^p = TX^p$, i.e. pour toute k-algèbre R, $G(R) = \{(x, y) \in (R^\times)^2 \mid y^p = tx^p\}$, i.e. $G = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = k[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]/(Y^p - TX^p)$. Dans $k[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ le polynôme $P = Y^p - TX^p$ est irréductible, donc A est intègre et a fortiori réduite. Mais pour toute k-algèbre R contenant un élément ξ tel que $\xi^p = T$ (par exemple $R = \overline{k}$), P se factorise dans $R[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ en $(Y - \xi X)^p$, donc $A \otimes R$ n'est pas réduite. En particulier, $G \times G$ n'est pas réduit, car dans A l'élément $\xi = YX^{-1}$ vérifie $\xi^p = Y^p X^{-p} = T$.

Corollaire 2.18. — *Si $k = \overline{k}$ et si G est un k-schéma en groupes, le sous-schéma $G_{\text{réd}}$ est un sous-schéma en groupes fermé.*

Démonstration. — Comme $k = \overline{k}$ alors $G_{\text{réd}} \times G_{\text{réd}}$ est réduit, donc le morphisme de multiplication $G_{\text{réd}} \times G_{\text{réd}} \to G$ se factorise à travers $G_{\text{réd}}$. (Dans le cas affine, si l'on a un morphisme de k-algèbres $\phi : B \to A$ avec A réduite, alors ϕ se factorise à travers $B/\sqrt{0}$.) □

Remarque 2.19. — Attention, même si $k = \overline{k}$ le sous-schéma en groupes fermé $G_{\text{réd}}$ n'est pas nécessairement distingué. Par exemple, si $\text{car}(k) = p$, soit G le sous-schéma en groupes fermé de SL_2 suivant :

$$G(R) = \left\{ \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, x \in R, \ t \in R^\times, \ x^p = 0 \right\}.$$

Alors G est le produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ par le sous-groupe fermé $\alpha_p = \text{Spec}(k[X]/X^p)$ de $\mathbb{G}_a$, et $G_{\text{réd}} = \mathbb{G}_m$ n'est pas distingué.

On admet les résultats d'algèbre commutative contenus dans la définition et proposition suivante.

***Définition et proposition 2.20* (Dimension)**. — *Soit X un k-schéma de type fini* réduit et irréductible.

(i) *Toute les chaînes maximales $\{x\} \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$ de sous-schémas fermés réduits irréductibles ont la même longueur n, appelée la* **dimension** *de X et notée* $\dim(X)$.

(ii) *Pour tout ouvert affine U non vide de $X_{\text{réd}}$, n est égal au degré de transcendance sur k du corps des fractions de $k[U]$ (ce qui fournit une méthode de calcul). Par conséquent, pour tout ouvert non vide V de X, on a* $\dim(V) = \dim(X)$.

(iii) *Pour tout sous-schéma fermé Z de X, on a* $\dim(Z) \leq \dim(X)$*, avec égalité ssi $Z = X$.*

(iv) *Pour un k-schéma de type fini réduit Y non nécessairement irréductible, on pose* $\dim(Y) = \text{Max}\{\dim(Y_i)\}$*, où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y.*

(v) *Pour un k-schéma de type fini V non nécessairement réduit, on pose* $\dim(V) = \dim(V_{\text{réd}})$. (*La définition* (i) *ne dépend en fait que de l'espace topologique sous-jacent.*)

(vi) *La notion de dimension est invariante par toute extension $k \to K$ du corps de base, i.e. le K-schéma de type fini X_K a pour dimension* $\dim(X)$.

(vii) *Si X, Y sont deux k-schémas de type fini, on a* $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

(viii) *Soit X un k-schéma affine de type fini, irréductible de dimension n. Si* $Y = \text{Spec}(k[X]/J)$*, où l'idéal J est engendré par r éléments, alors* $\dim(Y) \geq n - r$.

Corollaire 2.21. — *Soit G un k-schéma en groupes de type fini. Alors* $\dim(G) = \dim(G^0) = \dim(G^0_{\overline{k}}) = \dim(G_{\overline{k}})$.

Démonstration. — On a $\dim(G) = \dim(G_{\overline{k}})$ et $\dim(G^0) = \dim(G^0_{\overline{k}})$. De plus, comme chaque composante connexe de $G_{\overline{k}}$ est irréductible et isomorphe comme $\overline{k}$-schéma à $G^0_{\overline{k}}$ (car égale à $gG^0_{\overline{k}}$ pour un certain $g \in G(\overline{k})$), on a $\dim(G_{\overline{k}}) = \dim(G^0_{\overline{k}})$. □

Exemples 2.22. — (i) $\mathbb{G}_{a,k}$ et $\mathbb{G}_{m,k}$ sont réduits, irréductibles, de dimension 1. Tout groupe fini est de dimension 0.

(ii) $\text{GL}_{n,k}$ est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}^{n^2}_k$ donc est réduit, irréductible, de dimension n^2. Soit P le stabilisateur dans $\text{GL}_{n,k}$ de la droite $D = ke_1$ engendrée par le premier vecteur de la base canonique, i.e. P est le sous-groupe fermé défini par les équations $c_{i1} = 0$ pour $i = 2, \dots, n$. Alors P est isomorphe, comme variété, à $\mathbb{G}_{m,k} \times \text{GL}_{n-1,k} \times \mathbb{A}^{n-1}_k$ donc est réduit, irréductible, de dimension $n^2 - (n-1)$.

(iii) $\text{GL}_{n,k}$ est isomorphe, comme k-schéma, à $\mathbb{G}_{m,k} \times \text{SL}_{n,k}$. Donc $\text{SL}_{n,k}$ est réduit, irréductible, de dimension $n^2 - 1$.

(iv) Soit U le sous-schéma en groupes fermé de $G = \text{GL}_{n,k}$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, i.e. U est défini par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $c_{ii} = 1$. Alors U est isomorphe, comme k-schéma, à $\mathbb{A}^{n(n-1)/2}_k$ donc est réduit, irréductible, de dimension $n(n-1)/2$.

(v) Soit B le sous-schéma en groupes fermé de $G = \mathrm{GL}_{n,k}$ formé des matrices triangulaires supérieures, i.e. B est défini par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i > j$. Alors B est isomorphe, comme k-schéma, à $\mathbb{G}_{m,k}^n \times U$ donc est réduit, irréductible, de dimension $n(n+1)/2$.

Énonçons sans démonstration le théorème suivant (cf. [DG, §II.5 Th. 2.1] ou [SGA3, VI_A 1.3.1] ou [Wa, Th. 11.6]), qui montre l'utilité de l'algèbre de Lie.

Théorème 2.23. — *Soit G un k-schéma en groupes de type fini. On a $\dim_k \mathrm{Lie}(G) \geq \dim(G)$ et l'égalité a lieu si et seulement si G est géométriquement réduit.*

Signalons aussi sans démonstration le théorème suivant (cf. [DG, §II.6 Th. 1.1] ou [SGA3, VI_A 1.6.1] ou [Wa, Th. 11.4]).

***Théorème 2.24* (Cartier)**. — *Si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors tout k-schéma en groupes de type fini G est géométriquement réduit.*

On déduit du théorème 2.23, combiné avec le point (viii) de 2.20, le corollaire suivant.

Corollaire 2.25. — *Le k-schéma en groupes $\mathrm{Sp}_{2n,k}$ est géométriquement réduit, de dimension $2n^2 + n$.*

Démonstration. — Reprenons les notations de l'exemple (3) de 1.6, mais notons cette fois $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de k^{2n}, de sorte que la forme symplectique $(\, , \,)$ est définie par $(e_i, e_j) = 0$ si $i+j \neq 2n+1$ et $(e_i, e_{2n+1-i}) = 1 = -(e_{2n+1-i}, e_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $G = \mathrm{Sp}_{2n,k}$ est le sous-schéma (en groupes) fermé de $\mathrm{GL}_{2n,k}$ défini par les $N = \binom{2n}{2} = n(2n-1)$ équations $(ge_i, ge_j) = (e_i, e_j)$ pour $1 \leq i < j \leq 2n$, donc $\dim(G) \geq (2n)^2 - N = 2n^2 + n$. D'autre part, on a vu que $\dim \mathrm{Lie}(G) = 2n^2 + n$. Donc G est géométriquement réduit, de dimension $2n^2 + n$. (Par ailleurs, on peut montrer que G est irréductible.) $\square$

3. Stabilisateurs et théorème de Chevalley

Dans la suite, k est un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes **affine**.

Lemme 3.1. — *Soit G un k-schéma en groupes affine, A son algèbre de Hopf, H un sous-schéma en groupes fermé, défini par un idéal de Hopf $\mathcal{I}$. Considérant A comme G-module, on note $G_{\mathcal{I}}$ le stabilisateur du sev $\mathcal{I}$. Alors on a $G_{\mathcal{I}} = H$.*

Démonstration. — Soit $(v_i)_{i\in I}$ une base de $\mathcal{I}$, complétons-la en une base $(v_i)_{i\in I'}$ de V, où $I' \supset I$. Pour tout $j \in I$, on peut écrire de façon unique

$$\Delta_V(v_j) = \sum_{i\in I} v_i \otimes a_{ij} + \sum_{i\in I'-I} v_i \otimes b_{ij}$$

avec les a_{ij} et b_{ij} dans A, nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf, on a $\Delta(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I} \otimes A + A \otimes \mathcal{I}$ et il en résulte que si $i \in I' - I$ alors $b_{ij} \in \mathcal{I}$ et donc aussi $\tau(b_{ij}) \in \mathcal{I}$ car $\tau(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ puisque $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf.

Or on a vu que l'idéal $\mathcal{I}'$ de $G_{\mathcal{I}}$ est engendré par les b_{ij} et $\tau(b_{ij})$ pour $j \in I, i \in I' - I$, donc $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$. On a donc $H(R) \subset G_{\mathcal{I}}(R)$ pour toute k-algèbre R.

Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $\phi \in \mathcal{I}$, écrivons

$$\Delta(\phi) = \sum \phi_1 \otimes \phi_2.$$

Alors, pour tout $g, g' \in G(R)$, $g\phi$ est l'élément $\sum \phi_1 \otimes g(\phi_2)$ de $A \otimes R$ et la valeur en ϕ du morphisme $g'g \in G(R)$ est $(g'g)(\phi) = \sum g'(\phi_1)g(\phi_2) \in R$.

Notons e l'élément neutre de $G(R)$ (i.e. le morphisme de k-algèbres $\varepsilon : A \to k \to R$) et supposons que $g \in G_{\mathcal{I}}(R)$, alors $g\phi \in \mathcal{I} \otimes R$ et comme $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ on a donc

$$g(\phi) = (eg)(\phi) = m_R \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(g\phi) = 0.$$

Comme ϕ était arbitraire dans $\mathcal{I}$, ceci montre que $g(\mathcal{I}) = 0$, d'où $g \in H(R)$. Ceci prouve l'inclusion réciproque $G_{\mathcal{I}}(R) \subset H(R)$, d'où $G_{\mathcal{I}} = H$. $\square$

***Théorème 3.2* (Chevalley).** — *Soit G un k-schéma en groupes affine* de type fini *et soit H un sous-schéma en groupes fermé.*

(i) *Il existe un G-module V de dimension finie et un sous-espace $E \subset V$ tel que $H = G_E$.*
(ii) *On peut se ramener au cas où* $\dim(E) = 1$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de Hopf de $A = k[G]$ définissant H. On sait que $H = G_{\mathcal{I}}$. D'autre part, comme G est de type fini, A est noethérienne donc $\mathcal{I}$ est engendré comme idéal par un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_s$, et ceux engendrent un sous-G-module V de A de dimension finie. Posons $E = V \cap \mathcal{I}$. Alors $H \subset G_E$.

Réciproquement, soit $g \in G_E(R)$ et soit $\phi = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \in \mathcal{I}$. Comme G agit sur A par automorphismes d'algèbres, on a

$$g(\phi \otimes 1) = \sum_{i=1}^{s} g(a_i \otimes 1) g(x_i \otimes 1)$$

et comme $g(x_i \otimes 1) \subset E \otimes R \subset \mathcal{I} \otimes R$ alors le terme de droite ci-dessus appartient à $\mathcal{I} \otimes R$, d'où $g \in G_{\mathcal{I}}(R) = H(R)$. Ceci prouve (i).

Pour prouver (ii), observons que la structure de G-module sur V en induit une sur $\bigwedge^i(V)$ pour tout i, en particulier pour $i = d = \dim(E)$.

Posons $n = \dim(V)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \dots, e_d)$ soit une base de E. Soit R une k-algèbre et $g \in G(R)$. Comme $V \otimes R$ est un R-module libre de base $(e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1)$, on voit que $g(E \otimes R) \subset E \otimes R$ si et seulement si $g(\bigwedge^d E) \subset \bigwedge^d E$. Appliquant ceci à g et g^{-1} on en déduit que $H = G_E$ est aussi le stabilisateur de la droite $D = \bigwedge^d(E)$ du G-module $V' = \bigwedge^d(V)$. $\square$

Dans la section suivante, on fera agir G sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et, sous l'hypothèse que G soit géométriquement réduit, on définira le k-schéma quotient G/H comme étant la G-orbite de D, qui est un k-schéma quasi-projectif. Mais lorsque H est distingué dans G, on peut déjà construire, grâce au théorème précédent, un morphisme de k-schémas en groupes $G \to \mathrm{GL}(W)$ de noyau H.

Pour la suite de cette section, on fixe un k-schéma en groupes affine G de type fini et un sous-schéma en groupes fermé **distingué** H. Pour simplifier la démonstration, on suppose de plus G **géométriquement réduit**. (6)

***Proposition 3.3*.** — *Sous les hypothèses précédentes, soit V un G-module tel qu'il existe une droite $D = kv$ sur laquelle H agit par le caractère χ. Soit E le sous-G-module de V engendré par v. Alors le G-module dual E^* contient une droite sur laquelle H agit par le caractère $-\chi$.*

***Remarque*.** — Notons d'abord que la proposition n'est pas évidente. En effet, si l'on note k_χ le H-module de dimension 1 sur lequel H agit par χ, l'hypothèse est qu'on a une injection de H-modules $k_\chi \subset E$ et donc par dualité on a une surjection de H-modules $E^* \to (k_\chi)^* = k_{-\chi}$, mais lorsque H n'est *pas* distingué ceci n'entraîne pas en général qu'il existe un sous-H-module de E^* isomorphe à $k_{-\chi}$.

(6) Voir [Wa, Th. 16.3] pour le cas général.

Démonstration. — Montrons que l'espace de poids $(E^*)_{-\chi}$ est non nul. Notons $\mu : E^* \to E^* \otimes k[G]$ la coaction et $\mu_H : E^* \to E^* \otimes k[H]$ celle qui s'en déduit par le morphisme d'algèbres de Hopf $k[G] \to k[H]$.

Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, il suffit de montrer que $(E^*_{\overline{k}})_{-\chi}$ est non nul. En effet, soit $(t_i)_{i\in I}$ une base de $\overline{k}$ sur k ; s'il existe $w \in E^*_{\overline{k}}$ non nul tel que $\mu_H(w) = w \otimes \chi^{-1}$, écrivons $w = \sum_i v_i \otimes t_i$ avec les v_i dans E^* (et nuls sauf pour un nombre fini d'indices). Alors l'égalité

$$\sum_i \mu_H(v_i) \otimes t_i = \mu_H(w) = w \otimes \chi^{-1} = \sum_i v_i \otimes \chi^{-1} \otimes t_i$$

entraîne que $\mu_H(v_i) = v_i \otimes \chi^{-1}$ pour tout i, d'où $(E^*)_{-\chi} \neq (0)$ puisque les v_i ne sont pas tous nuls (car $w \neq 0$).

Comme G est géométriquement réduit, $\overline{k}[G] = k[G] \otimes \overline{k}$ est réduit. D'autre part, d'après la Prop. 1.17 du Chap. 2, $E_{\overline{k}} = E \otimes \overline{k}$ est le sous-$(G_{\overline{k}})$-module de $V_{\overline{k}} = V \otimes \overline{k}$ engendré par $v \otimes 1$. Par conséquent, il suffit de démontrer la proposition en remplaçant k par $\overline{k}$. Pour alléger l'écriture remplaçons k par $\overline{k}$, i.e. plaçons-nous dans le cas où k est algébriquement clos et $k[G]$ est réduite. Dans ce cas, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4. — *E est le sous-espace vectoriel E' de V engendré par les éléments gv, pour $g \in G(k)$.*

Démonstration du lemme. — Il est clair que $v \in E' \subset E$ donc il suffit de montrer que E' est G-stable. Or il est clair que E' est stable par $G(k)$ et, comme $k[G]$ est une k-algèbre de type fini réduite, ceci entraîne que E' est G-stable.

En effet, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \dots, e_d)$ soit une base de E'. Pour $j = 1, \dots, d$ écrivons :

$$\mu(e_j) = \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes a_{ij} + \sum_{i=d+1}^{n} e_i \otimes b_{ij}$$

avec $a_{ij}, b_{ij} \in k[G]$. D'une part, comme k est algébriquement clos, $G(k)$ est en bijection avec les idéaux maximaux de $k[G]$. D'autre part, comme E' est stable par $G(k)$ alors pour tout $j = 1, \dots, d$ et $i > d$ et tout $g \in G(k)$ on a $g(b_{ij}) = 0$ i.e. b_{ij} appartient à l'idéal maximal correspondant à g, donc b_{ij} appartient à l'intersection de tous les idéaux maximaux de $k[G]$. Comme $k[G]$ est une k-algèbre de type fini, cette intersection est égale à l'intersection de tous les idéaux premiers, i.e. l'ensemble des éléments nilpotents de $k[G]$. Or par hypothèse $k[G]$ est réduite, d'où $b_{ij} = 0$. Par conséquent, E' est G-stable donc égale E. □

Démontrons maintenant la proposition. Fixons $g \in G(k)$. Pour toute k-algèbre R et tout $h \in H(R)$, on a dans $E \otimes R$ l'égalité :

$$h(gv \otimes 1) = g(g^{-1}hg)(v \otimes 1) = g(v \otimes \chi(g^{-1}hg)) = gv \otimes \chi(g^{-1}hg)$$

car $g^{-1}hg \in H(R)$ puisque H est distingué dans G. Notant χ_g le caractère de H défini par $\chi_g(h) = \chi(g^{-1}hg)$ pour tout $h \in H(R)$ (ceci définit bien un morphisme de foncteurs en groupes $H(R) \to \mathbb{G}_{m,k}(R)$, donc un caractère $\chi_g \in X(H)$), ceci montre que $gv \in E_{\chi_g}$. Comme E est engendré par les gv et comme la somme des espaces de poids est directe, on en déduit qu'il existe un nombre fini de caractères $\chi = \chi_0, \dots, \chi_r$ tels que, comme H-module

$$E = E_\chi \oplus \cdots \oplus E_{\chi_r}.$$

Alors, prenant le dual, on obtient que le G-module E^* se décompose comme H-module en :

$$E^* = (E_\chi)^* \oplus \cdots \oplus (E_{\chi_r})^* = (E^*)_{-\chi} \oplus \cdots \oplus (E^*)_{-\chi_r},$$

d'où $(E^*)_{-\chi} \neq 0$. La proposition est démontrée. □

Terminologie 3.5. — Soient k un corps, G un k-schéma en groupes affine. On dira que G est **lisse** s'il est de type fini et géométriquement réduit.

Corollaire 3.6. — *Soient k un corps, G un k-schéma en groupes affine lisse, H un sous-schéma en groupes fermé* **distingué**.

(i) *Il existe un morphisme de k-schémas en groupes $\gamma : G \to \mathrm{GL}(W)$ de noyau H.*

(ii) *Par conséquent, posant $G' = \mathrm{Spec}(k[G]^H)$, le morphisme $G \to G'$ a pour noyau H.*

Démonstration. — Avec les notations précédentes, on dispose des G-modules de dimension finie E et E^*, où E contient une droite $D = kv$ dont le stabilisateur est H et sur laquelle H agit par le caractère χ, et où E^* contient un vecteur $f \neq 0$ de poids $-\chi$ pour H.

Alors $F = E \otimes E^*$ est un G-module et $W = F^H$ est non nul car il contient $v \otimes f$. D'après la Prop. 1.23 du chap. 2, W est un sous-G-module de F et l'on obtient donc un morphisme de k-schémas en groupes $\gamma : G \to \mathrm{GL}(W)$, dont le noyau K contient H puisque $W = F^H$.

De plus, complétons v (resp. f) en une base $(v = v_1, \ldots, v_n)$ de E (resp. $(f = f_1, \ldots, f_n)$ de E^*). Alors, pour toute k-algèbre R, $(v_i \otimes f_j \otimes 1_R)$ est une base du R-module

$$E \otimes E^* \otimes R = (E \otimes R) \otimes_R (E^* \otimes R);$$

on en déduit que si un élément $g \in G(R)$ appartient à $K(R)$, il doit préserver le sous-module $R(v \otimes 1_R)$ de $E \otimes R$ donc appartient à $H(R)$. On a donc $K(R) \subset H(R)$ d'où $K = H$. Ceci prouve (i).

D'après le point (iii) du Th. 1.25 du chap. 2, γ se factorise par $\pi : G \to G'$ et donc les inclusions $H \subset \mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{Ker}(\gamma) = H$ entraînent $\mathrm{Ker}(\pi) = H$. □

Définition 3.7. — Sous les hypothèses précédentes, on note G/H le k-schéma en groupes affine $G' = \mathrm{Spec}(k[G]^H)$. On verra plus loin qu'il est isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{GL}(W)$, donc de type fini.

4. Schémas quasi-projectifs et orbites

« Rappelons » d'abord les définitions et résultats suivants 4.1–4.18 de géométrie algébrique, pour lesquels on renvoie aux références [Du], [EH] ou [Ha].

***Définition 4.1* (Schémas affines)**. — Soit A un anneau. On note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. On le munit de la topologie de Zariski, dont les fermés sont les parties

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

pour tout sous-ensemble I de A (et on peut se limiter au cas où I est un idéal de A). (En particulier, on a $\varnothing = V(1) = V(A)$.) Par conséquent, pour $f \in A$, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie, i.e. tout ouvert est réunion de tels ouverts.

On munit $X = \mathrm{Spec}(A)$ d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ d'anneaux, en déclarant que $\mathscr{F}(D_f) = A_f = A[T]/(fT - 1)$ pour tout f, et l'on note $\mathscr{O}_X$ le faisceau d'anneaux associé. Alors la fibre (ou tige) de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{O}_X$ en un point $x = \mathfrak{p}$ est l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ qui est *local*, i.e. possède un unique idéal maximal, à savoir $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. On dit alors que $(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ est un « espace annelé en anneaux locaux » ou un « espace localement annelé » et que c'est le **schéma affine** $\mathrm{Spec}(A)$ associé à A.

Soient $(X, \mathscr{O}_X)$ et $(Y, \mathscr{O}_Y)$ deux espaces localement annelés. À toute application continue $f : X \to Y$ on associe un certain faisceau d'anneaux $f^*(\mathscr{O}_Y)$ sur X ; alors, un **morphisme** de $(X, \mathscr{O}_X)$ vers $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est un couple (f, ϕ) formé d'une application continue $f : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\phi : f^*(\mathscr{O}_Y) \to \mathscr{O}_X$ qui vérifie la condition suivante : pour tout $x \in X$, ϕ induit un morphisme d'anneaux $\phi_x : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ et l'on exige que ce morphisme soit *local*, i.e. envoie l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{f(x)}$ du premier dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ du second (ce qui équivaut à dire que $\phi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$). On notera ELoc la catégorie des espaces localement annelés et An celle des anneaux. On peut démontrer sans trop de peine le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *Soit A un anneau, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $f \in A$. Alors l'ouvert D_f muni de la restriction du faisceau $\mathscr{O}_X$, est canoniquement isomorphe au schéma affine* $\mathrm{Spec}(A_f)$.

On démontre alors, avec plus de travail, les théorèmes suivants :

Théorème 4.3. — *Soit A un anneau. Pour tout $f \in A$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D_f) = A_f$. En particulier, $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) = A$.*

Théorème 4.4. — (i) *Pour tout anneau A et tout espace localement annelé X, on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ELoc}}(X, \mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}(A, \mathscr{O}_X(X)),$$

fonctorielle en A et en X.

(ii) *En particulier, si $X = \mathrm{Spec}(B)$ alors tenant compte du théorème précédent, on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ELoc}}(\mathrm{Spec}(B), \mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}\left(A, \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B))\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}(A, B),$$

fonctorielle en A et B, donc la catégorie des schémas affines est équivalente à la catégorie opposée de celle des anneaux.

Terminologie 4.5. — Si A est une k-algèbre, on dit que $\mathrm{Spec}(A)$ est un k-schéma affine. Dans ce cas, le morphisme $k \to A$ qui fait de A une k-algèbre définit un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$.

Exemple 4.6. — L'espace affine de dimension n sur k, noté $\mathbb{A}_k^n$, est le k-schéma affine $X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$.

Si k est algébriquement clos, la variété algébrique affine associée (i.e. l'ensemble des points fermés de X) n'est autre que l'espace affine k^n.

De façon plus intrinsèque, soient V un k-ev de dimension finie, V^* son dual et $S(V^*)$ l'algèbre symétrique de V^*.

Lemme 4.7. — (i) *Le k-schéma affine $X = \mathrm{Spec}(S(V^*))$ représente le foncteur $R \mapsto V \otimes R$.*

(ii) *Si k est algébriquement clos, la variété algébrique affine associée (i.e. l'ensemble des points fermés de X) n'est autre que V, et l'on est donc juste en train de dire que l'algèbre des fonctions sur la variété V est, de façon canonique, $S(V^*)$.*

Démonstration. — Pour toute k-algèbre R on a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(S(V^*), R) = \mathrm{Hom}_k(V^*, R).$$

D'autre part, on a un morphisme canonique de R-modules $V \otimes R \to \mathrm{Hom}_k(V^*, R)$ et en prenant une base de V (qui est de dimension finie), on voit que c'est un isomorphisme. □

***Définition 4.8* (k-schémas)**. — Un **k-schéma** est un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ qui possède un recouvrement par des ouverts U_i tels que chaque U_i, muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$, soit isomorphe à un k-schéma affine.

Par exemple, *tout ouvert d'un k-schéma affine*, étant recouvert par des ouverts D_f, *est un k-schéma*, et l'on dira que c'est un **k-schéma quasi-affine**.

***Définitions 4.9* (Sous-schémas fermés réduits)**. — Soit X un k-schéma. Notons pour un instant $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à X.

(i) Tout ouvert U de $|X|$, muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$, est un k-schéma.

(ii) Si F est un fermé de $|X|$, il peut en général être muni de plusieurs structures de sous-schéma fermé : par exemple si $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[T])$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sous-schémas affines fermés $F_n = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^n)$ ont tous pour espace topologique sous-jacent le point 0 qui correspond à l'idéal maximal (T). Ce sous-schéma n'est réduit que pour $n = 1$.

Dans le cas général, si F est une partie fermée de $|X|$, il existe sur F une unique structure de sous-schéma fermé *réduit*.

Un des avantages des k-schémas réduits est fourni par le lemme suivant :

Lemme 4.10. — *Soit X un k-schéma réduit, $f : X \to Z$ un morphisme de k-schémas, et Y l'adhérence dans Z de $f(X)$, i.e. l'intersection de toutes les parties fermées de Z contenant l'ensemble $f(X)$. On munit Y de la structure de sous-schéma fermé réduit. Alors f se factorise en un morphisme $f : X \to Y$.*

Démonstration. — Faisons-la lorsque $Z = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, et dans ce cas ne supposons pas au départ que X soit réduit.

Alors f correspond à un morphisme de k-algèbres $\phi : A \to B$. Notons J le radical de $\mathrm{Ker}(\phi)$, i.e. l'idéal formé des $a \in A$ tels que $0 = \phi(a^n) = \phi(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c.-à-d. $J = \phi^{-1}(\mathscr{N})$ où $\mathscr{N}$ désigne l'idéal de B formé par les éléments nilpotents de B. Alors A/J est une k-algèbre réduite.

D'autre part, $f(X)$ est contenu dans un fermé $V(I)$ de Z, où I est un idéal de A, si et seulement si pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ on a $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \supset I$, c.-à-d. $\phi(I) \subset \mathfrak{p}$. Or on sait que l'intersection des idéaux premiers de B égale $\mathscr{N}$ donc la condition précédente équivaut à $\phi(I) \subset \mathscr{N}$. Ceci montre que le plus petit fermé F de $\mathrm{Spec}(A)$ contenant $f(X)$ est $V(\phi^{-1}(\mathscr{N})) = V(J)$ et sa structure de sous-schéma réduit est précisément donnée par $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$. On voit alors que le morphisme $X \to Z$ se factorise par Y si et seulement si le morphisme $\phi : A \to B$ se factorise par A/J, ce qui équivaut à dire que $J = \mathrm{Ker}(\phi)$. Ceci est bien le cas si $\mathscr{N} = (0)$, i.e. si X est réduit. (Et réciproquement pour que l'énoncé du lemme soit vrai pour le morphisme id_X, il faut que X soit réduit.) □

Remarque 4.11. — Attention ! Avec les notations précédentes, $f(X)$ est *contenu dans*, mais pas nécessairement égal, au fermé Y. Par exemple, soit $f : X = \mathbb{A}^2_k \to Z = \mathbb{A}^2_k$, $(u, v) \mapsto (u, uv)$, qui correspond au morphisme de k-algèbres $k[T_1, T_2] \to k[U, V]$, $T_1 \mapsto U$, $T_2 \mapsto UV$. Ce morphisme est injectif, donc d'après la démonstration précédente, l'adhérence de $f(X)$ est $Y = Z = \mathbb{A}^2_k$. Mais $f(X)$ ne contient aucun des idéaux maximaux $(T_1, T_2 - \lambda)$ pour $\lambda \in k^\times$; en fait, $\mathfrak{m} = (T_1, T_2)$ est le seul élément de $f(X)$ qui contienne T_1. En effet, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $k[U, V]$ tel que $f(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ contienne T_1, alors $\mathfrak{p}$ contient $\phi(T_1) = U$ donc contient aussi $UV = \phi(T_2)$, donc $f(\mathfrak{p})$ contient (T_1, T_2) qui est maximal, d'où $f(\mathfrak{p}) = (T_1, T_2)$.

***Exemple 4.12* (de schéma quasi-affine)**. — Soit V un k-ev de dimension finie d, considéré comme le schéma $\mathrm{Spec}(S(V^*))$; alors le vecteur nul 0 correspond à l'idéal maximal $I_+ = \bigoplus_{n>0} S^n(V)$ et est un point fermé de V, donc $U = V - \{0\}$ est un k-schéma quasi-affine. Pour toute k-algèbre R, on a :

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(\mathrm{Spec}(R), V - \{0\}) = \left\{ (r_1, \dots, r_d) \in R^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'idéal de } R \text{ engendré} \\ \text{par les } r_i \text{ égale } R \end{array} \right\}.$$

En effet, choisissons une base de V de sorte que $S(V^*) = k[X_1, \dots, X_d] = A$. Alors tout morphisme $f : \mathrm{Spec}(R) \to U$ donne, par composition avec l'inclusion $U \subset V$, un morphisme $g : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(A)$ donc un morphisme de k-algèbres $\phi : A \to R$ qui est donné par un d-uplet $(r_1, \dots, r_d)$, où $r_i = \phi(X_i)$. Alors, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $g(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ et la condition que f soit à valeurs dans U signifie qu'il n'existe aucun idéal premier $\mathfrak{p}$ de R tel que $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ contienne I_+ (et donc lui soit égal, puisque I_+ est maximal), i.e. tel que $\phi(I_+) \subset \mathfrak{p}$, ce qui équivaut à dire que l'idéal $(r_1, \dots, r_p)$ de R n'est contenu dans aucun idéal premier, donc est égal à R.

Pour construire le quotient G/H, où G est un k-schéma en groupes affine de type fini et H un sous-schéma en groupes fermé, on aura besoin de schémas plus généraux, à commencer par l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$.

***Définition 4.13* (Le k-schéma $\mathbb{P}^n_k$).** — L'ensemble sous-jacent est l'ensemble $X = \mathrm{Proj}(S)$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau gradué $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ qui sont homogènes (i.e. si $x \in \mathfrak{p}$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_N$ avec x_i homogène de degré i, alors chaque x_i est dans $\mathfrak{p}$; ceci équivaut à dire que $\mathfrak{p}$ est engendré par des éléments homogènes) et distincts de l'idéal maximal $I_+ = (x_0, \ldots, x_n)$.

Les fermés sont les sous-ensembles $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset I\}$, pour I parcourant les idéaux homogènes de S. Par conséquent, pour f parcourant les éléments homogènes, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \not\in \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie. On peut munir l'espace topologique X d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ tel que pour tout élément homogène $f \in S$ de degré $r > 0$, l'ouvert D_f muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$ soit canoniquement isomorphe au spectre de l'anneau $S_{(f)}$ formé des éléments de degré 0 dans le localisé S_f, i.e. des éléments de la forme a/f^d avec $a \in S$ homogène de degré rd (ou $a = 0$).

Remarquons que les ouverts $D_i = D_{x_i}$ recouvrent X : en effet, un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ ne peut contenir tous les x_i car sinon il serait égal à I_+, ce qui est exclu. D'après ce qui précède, chaque ouvert D_i est isomorphe au spectre de la k-algèbre

$$k[X_0, \ldots, X_n]_{(X_i)} \simeq k\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big]$$

c.-à-d. à l'espace affine $\mathbb{A}^n_k = \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$.

***Définition 4.14*.** — On dit qu'un k-schéma X est **de type fini** s'il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ où chaque k-algèbre A_i est de type fini. Si A est une k-algèbre de type fini, il en est de même de $A_f = A[T]/[fT - 1)$, pour tout $f \in A$, donc $\mathrm{Spec}(A)$ ainsi que chaque ouvert $D_f = \mathrm{Spec}(A_f)$ est un k-schéma de type fini.

Si X est de type fini, on peut montrer que tout ouvert de X est réunion d'un nombre **fini** d'ouverts affines, et que tout sous-schéma ouvert ou fermé de X est encore un k-schéma de type fini. D'autre part, $\mathbb{P}^n_k$ est de type fini, car on a vu qu'il est recouvert par $n + 1$ ouverts affines, chacun isomorphe à $\mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$.

Soit V un k-ev de dimension $n + 1$, notons V^* son dual et $S(V^*)$ l'algèbre symétrique de V^*. Alors on peut définir de façon intrinsèque un k-schéma $\mathbb{P}(V)$, qui est isomorphe à $\mathbb{P}^n_k$ si l'on choisit une base de V :

***Définition 4.15* (Le k-schéma $\mathbb{P}(V)$).** — L'ensemble sous-jacent est l'ensemble $X = \mathrm{Proj}(S)$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau gradué $S = S(V^*)$ qui sont homogènes et distincts de l'idéal maximal $I_+ = \bigoplus_{n>0} S^n(V^*)$.

Les fermés sont les sous-ensembles $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset I\}$, pour I parcourant les idéaux homogènes de S. Par conséquent, pour f parcourant les éléments homogènes, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \not\in \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie. On munit $\mathbb{P}(V)$ d'un façon de k-algèbres, exactement comme dans le cas de $\mathbb{P}^n_k$, et d'ailleurs pour tout choix d'une base de V on a des isomorphismes $S(V^*) \cong k[X_0, \ldots, X_n]$ et $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^n_k$. Le point est donc d'avoir défini $\mathbb{P}(V)$ de façon intrinsèque, sans avoir eu à choisir une base.

***Terminologie 4.16*.** — Un sous-k-schéma fermé d'un k-schéma $\mathbb{P}(V)$ est appelé un k-schéma projectif. Un sous-k-schéma ouvert d'un k-schéma projectif est appelé un k-schéma quasi-projectif.

***Proposition 4.17*.** — *Pour toute k-algèbre R, $\mathrm{Hom}_{k\text{-}sch.}((\mathrm{Spec}(R), \mathbb{P}(V))$ s'identifie de façon canonique à :*

(i) *L'ensemble des sous-R-modules N de $V^* \otimes R$ tels que le quotient soit un R-module projectif de rang 1.*

(ii) *L'ensemble des facteurs directs D de rang 1 de $V \otimes R$.*

En particulier, si k est un corps algébriquement clos, les points fermés de $\mathbb{P}(V)$ sont en bijection avec les droites vectorielles de V, i.e. on retrouve la variété $\mathbb{P}(V)$ habituelle.

Esquisse de démonstration. — [7] $X = \mathbb{P}(V)$ est muni d'un certain faisceau (quasi-cohérent) de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{O}_X(1)$ qui est localement libre de rang 1, i.e. localement isomorphe à $\mathscr{O}_X$, et l'on a un morphisme canonique $\pi : \mathscr{O}_X \otimes V^* \to \mathscr{O}_X(1)$ d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{O}_X \otimes V^* \xrightarrow{\pi} \mathscr{O}_X(1) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, si $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$ est un morphisme de schémas, on obtient une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents sur $Y = \mathrm{Spec}(R)$:

$$0 \longrightarrow f^*(\mathscr{N}) \longrightarrow \mathscr{O}_Y \otimes V^* \longrightarrow f^*(\mathscr{O}_X(1)) \longrightarrow 0$$

où $f^*(\mathscr{O}_X(1))$ est maintenant un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_Y$-modules qui est localement libre de rang 1. Or on sait que sur un schéma affine $Y = \mathrm{Spec}(R)$, la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de $\mathscr{O}_Y$-modules est équivalente à celle des R-modules, et l'on obtient donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R \otimes V^* \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

où L est un R-module projectif de rang 1 et $N = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Réciproquement, soit donné N un sous-R-module de $V^* \otimes R$ tel que le quotient L soit un R-module projectif de rang 1. Choisissons une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de V et notons $(X_0, \ldots, X_n)$ la base duale de V^*, d'où $S(V^*) = k[X_0, \ldots, X_n]$. Notons $\overline{X}_i$ l'image de $1 \otimes X_i$ dans L.

Pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, le localisé $L_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre de rang 1, donc d'après le lemme de Nakayama il est engendré par n'importe quel élément n'appartenant pas au sous-module $\mathfrak{p}L_\mathfrak{p}$. Comme $L_\mathfrak{p}$ est engendré par les $\overline{X}_i$ alors ceux-ci ne peuvent pas être tous dans le sous-module $\mathfrak{p}L_\mathfrak{p}$. Donc les ouverts :

$$U_i = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \overline{X}_i \notin \mathfrak{p}L_\mathfrak{p}\}$$

recouvrent $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $D_i = D_{X_i}$ l'ouvert de $\mathbb{P}^n_k$ défini plus haut. Pour définir un morphisme de schémas $U_i \to D_i$ il suffit, puisque $D_i = \mathrm{Spec}(k[X_j/X_i \mid j \neq i])$ est affine, de se donner un morphisme de k-algèbres

$$\phi_i : k[X_j/X_i \mid j \neq i] \to \mathscr{O}_Y(U_i).$$

Soit $\mathfrak{p} \in U_i$, alors $L_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre engendré par $\overline{X}_i$. On peut montrer qu'il existe $f \in R_\mathfrak{p}$ tel que L_f soit un R_f-module libre engendré par $\overline{X}_i$; alors pour tout $j = 0, \ldots, n$ on a $\overline{X}_j = r_j \overline{X}_i$ avec $r_j \in R_f$ et, par hypothèse, $r_i = 1$ est inversible dans R_f, donc r_j/r_i est un élément de R_f et de $R_\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \in U_i$ tel que $f \notin \mathfrak{q}$. En travaillant un peu, on peut voir que cette collection d'éléments r_j/r_i de $R_\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p}$ parcourant U_i, définit bien un élément de $\mathscr{O}_Y(U_i)$, d'où le morphisme voulu $U_i \to D_i \subset \mathbb{P}(V)$.

Enfin, ces morphismes coïncident sur les intersections $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ car avec les notations précédentes on a :

$$\phi_2\Big(\frac{X_j}{X_{i_1}}\Big) = \phi_2\Big(\frac{X_j}{X_{i_2}}\Big(\frac{X_{i_1}}{X_{i_2}}\Big)^{-1}\Big) = \frac{r_j}{r_{i_2}}\Big(\frac{r_{i_1}}{r_{i_2}}\Big)^{-1} = \frac{r_j}{r_{i_1}} = \phi_1\Big(\frac{X_j}{X_{i_1}}\Big).$$

Ceci achève l'esquisse de la preuve du point (i). Bien entendu, le point (ii) en découle, car les applications

$$N \mapsto D = \mathrm{Hom}_R\big((R \otimes V^*)/N, R\big) \qquad \text{et} \qquad D \mapsto N = \mathrm{Hom}_R\big((R \otimes V)/D, R\big)$$

sont des bijections réciproques entre les N de (i) et les D de (ii). □

Pour tout k-schéma X on note h_X le foncteur (contravariant) qui à tout k-schéma Z associe $h_X(Z) = \mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(Z, X)$, et pour toute k-algèbre R, on note

$$X(R) = h_X(\mathrm{Spec}(R)) = \mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(\mathrm{Spec}(R), X).$$

Ceci définit un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbres dans celle des ensembles. On admet le lemme suivant, qui généralise le lemme de Yoneda :

[7] Voir [Du], [EH] ou [Ha].

Lemme 4.18. — *Soit X, Y deux k-schémas. Tout morphisme de foncteur entre les foncteurs $R \mapsto X(R)$ et $R \mapsto Y(R)$ se prolonge (de façon unique) en un morphisme de foncteurs $h_X \to h_Y$ donc induit, d'après le lemme de Yoneda, un unique morphisme de k-schémas $X \to Y$.* (*En particulier, si X et Y définissent le même foncteur sur la catégorie des k-algèbres, alors X et Y sont canoniquement isomorphes.*)

Proposition 4.19. — *Soit V un G-module de dimension finie. Alors l'action de G sur V induit des morphismes de schémas : $G \times V \to V$ et $G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — La structure de comodule $V \to V \otimes k[G]$ induit de façon canonique une structure de comodule $V^* \to V^* \otimes k[G]$ et on peut montrer que celle-ci induit une structure de comodule

$$\phi : S(V^*) \to S(V^*) \otimes k[G]$$

qui est aussi un morphisme d'algèbres graduées. Ceci équivaut à se donner un morphisme de schémas $G \times V \to V$ qui est une action (i.e. $ev = v$ et $g(hv) = (gh)v$) et qui est linéaire en V. On peut aussi dire que $k[G]$ (resp. $S(V^*)$) représente le foncteur $R \mapsto G(R)$ (resp. $R \mapsto V \otimes R$) ; alors l'action R-linéaire

$$G(R) \times (V \otimes R) \to V \otimes R,$$

fonctorielle en R, induit d'après Yoneda un morphisme d'algèbres $S(V^*) \to S(V^*) \otimes k[G]$ qui est une coaction (car on a une action de G sur V) et qui envoie V^* dans $V^* \otimes k[G]$ (car l'action est linéaire), donc est un morphisme de k-algèbres graduées.

De même, si $g \in G(R)$ et si D est un facteur direct de rang 1 de $V \otimes R$ alors il en est de même de $g(D)$ et l'on obtient donc une action de $G(R)$ sur $\mathbb{P}(V)(R)$, fonctorielle en R. D'après la généralisation donnée plus haut du lemme de Yoneda, ceci induit un morphisme de schémas

$$\mu : G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$$

qui est une action, i.e. qui vérifie $\mu \circ (\varepsilon, \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$, où $\varepsilon : \mathrm{Spec}(k) \to G$ est la section unité, et $(\mathrm{id}_G \times \mu) \circ \mu = (m_G \times \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}) \circ \mu$, où m_G est la multiplication de G. □

***Définition 4.20* (Modules plats et fidèlements plats).** — On rappelle que pour tout A-module P le foncteur $P \otimes_A -$ est exact à droite. On dit que P est un A-module *plat* si ce foncteur est exact. On dit que P est *fidèlement plat* s'il est plat et si $P \otimes_A M \neq \{0\}$ pour tout A-module M non nul.

***Définition 4.21* (Morphismes plats et fidèlements plats)**

Un morphisme d'anneaux $\phi : A \to B$ est dit *plat* (resp. *fidèlement plat*) si B est un A-module plat (resp. fidèlement plat). On peut montrer que ϕ est fidèlement plat si et seulement si il est plat et si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B tel que $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$. Dans ce cas, on montre que le morphisme $\phi^\sharp : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est *surjectif*.

On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de k-schémas est *plat* si, pour tout $x \in X$, le morphisme $\mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est plat (et donc fidèlement plat, puisque $\mathfrak{m}_{f(x)}$ est l'image inverse de $\mathfrak{m}_x$). Ceci équivaut à dire que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de Y et tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de X tel que $f(V) \subset U$, le morphisme $A \to B$ est plat. Enfin, on dit que f est *fidèlement plat* s'il est plat et surjectif.

On peut montrer le lemme suivant :

Lemme 4.22. — *Si un morphisme de k-schémas $f : X \to Y$ est plat (resp. fidèlement plat), il en est de même du morphisme $\mathrm{id}_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$, pour tout k-schéma Z.*

On admet le théorème suivant :

Théorème 4.23 **(de platitude générique)**. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre k-schémas de type fini, avec Y* **réduit**. *On suppose que f est* dominant, *i.e. que $f(X)$ est dense dans Y. Alors il existe un ouvert dense U de Y, contenu dans $f(X)$, tel que le morphisme $f : f^{-1}(U) \to U$ soit fidèlement plat.*

En particulier, $f(X)$ contient un ouvert dense de son adhérence.

Définition 4.24. — On dit qu'un k-schéma en groupes G est *lisse* si $k[G]$ est une k-algèbre de type fini et si $k[G] \otimes \overline{k}$ est réduite, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k.

Remarque 4.25. — (i) La condition que $k[G] \otimes \overline{k}$ soit réduite entraîne que pour tout k-schéma Y, le k-schéma $G \times Y$ est réduit.

(ii) Si k est un corps parfait, il suffit de supposer que $k[G]$ est réduit. Mais si k est un corps non parfait, par exemple si $k = \mathbb{F}_p(T)$, il existe des k-schémas en groupes affines G tels que $k[G] \otimes \overline{k}$ ne soit pas réduite.

Proposition 4.26. — *Soient G un k-schéma en groupes* lisse, *X un k-schéma* réduit et de type fini, *$\mu : G \times X \to X$ une action de G sur X. Soit $x \in X(k)$ et $\phi_x : G \to X$ le morphisme correspondant. Alors :*

(i) *$\mathscr{O} = \phi_x(G)$ est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé réduit de X, et $\mathscr{O}$ est appelée l'orbite de x sous G.*

(ii) *Le morphisme $\phi_x : G \to \mathscr{O}$ est fidèlement plat.*

(iii) *$\mathscr{O}$ est stable par l'action de G, i.e. le morphisme $\mu : G \times \mathscr{O} \to X$ se factorise à travers $\mathscr{O}$.*

Démonstration. — Soit Z l'adhérence de $\phi_x(G)$ dans X, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Comme G est réduit, ϕ_x se factorise en un morphisme $\phi_x : G \to Z$ qui est dominant. D'après le th. de platitude générique, $\phi_x(G)$ contient un ouvert dense U de Z, tel que $\phi_x^{-1}(U) \to U$ soit plat. Alors $V = \phi_x^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de G. Montrons que $\phi_x(G)$ est un ouvert de Z.

D'après le lemme 2.6, il suffit de le montrer lorsque $k = \overline{k}$. Sous cette hypothèse, la réunion Ω des ouverts gV, pour g parcourant $G(k)$, est égale à G tout entier. En effet, comme G est un k-schéma de type fini, toute partie non vide ouverte ou fermée de G contient au moins un point fermé, en particulier V contient au moins un point fermé h donc Ω contient tous les points fermés donc son complémentaire est un fermé de G qui ne contient aucun point fermé donc qui est vide.

On a donc $\phi_x(G) = \phi_x(\bigcup_g g\phi_x^{-1}(U)) = \bigcup_g gU$. Or g induit un automorphisme du schéma X donc gU est un ouvert de gZ et gZ est l'adhérence de $g\phi_x(G) = \phi_x(G)$ donc égale Z. Donc $\mathscr{O} = \phi_x(G)$ est bien un ouvert de Z. Ceci prouve (i).

Comme g induit des automorphismes de G et de X et que $\phi_x^{-1}(U) \to U$ est plat, il en est de même du morphisme $g\phi_x^{-1}(U) \to gU$, et comme les gU recouvrent $\mathscr{O}$ il en résulte que $\phi_x : G \to \mathscr{O}$ est plat, donc fidèlement plat puisque surjectif. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \mu"] \arrow[d, "m_G \times \mathrm{id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\mu"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \phi_x"] \arrow[d, "m_G"'] & G \times Y \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\phi_x"] & X \end{tikzcd}$$

et il faut montrer que $\mu(G \times Y) \subset Y$. Comme ϕ_x est fidèlement plat, il en est de même de $\mathrm{id}_G \times \phi_x$ donc celui-ci est surjectif, donc il suffit de montrer que $\phi_x \circ m_G$ est contenu dans Y, ce qui est bien le cas. Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

Dans le cas d'un morphisme de k-schémas en groupes, on a de plus :

Proposition 4.27. — *Soient G, G'' deux k-schémas en groupes affines, avec G lisse et G'' de type fini, et soit $\phi : G \to G''$ un morphisme de k-schémas en groupes.*

(i) *$\phi(G)$ est un sous-schéma en groupes fermé lisse G' de G'', appelé l'image de ϕ.*

(ii) *Le morphisme $\phi : G \to G'$ est fidèlement plat.*

Démonstration. — Soit $\phi^\sharp : A'' \to A$ le morphisme d'algèbres de Hopf correspondant à ϕ, soit I son noyau, et $A' = A''/I$. Alors $G' = \mathrm{Spec}(A')$ est un sous-schéma en groupes fermé de G'' (donc de type fini). De plus, notant $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, on a $A' \otimes \overline{k} \subset A \otimes \overline{k}$ donc A' est géométriquement réduite.

Il s'agit de montrer que le morphisme $G \to G'$ est surjectif. Comme, d'après le lemme 2.6, la projection $G' \otimes \overline{k} \to G'$ est surjective, il suffit de montrer que $G \otimes \overline{k} \to G' \otimes \overline{k}$ est surjectif. Remplaçant k par $\overline{k}$, on est ainsi ramenés au cas où k est algébriquement clos.

Comme le morphisme $A' \to A$ est injectif, $\phi(G)$ est dense dans G'. Donc, d'après la proposition précédente, appliquée à l'action de G sur G' et à $x =$ l'élément neutre de G', on sait déjà que $\phi(G)$ est un ouvert dense U de G'. Comme G' est de type fini sur $k = \overline{k}$, le fermé $Z = G' - U$ est l'adhérence de ses k-points, donc on aura $Z = \varnothing$ si l'on montre que $G'(k) \subset U(k)$.

Soit donc $h \in G'(k)$. Alors hU est un ouvert dense de G' donc $hU \cap U$ est un ouvert non vide, donc il contient un k-point. Or, d'une part, les k-points de hU sont les hu avec $u \in U(k)$; d'autre part, pour tout $u \in U(k)$ son image inverse $\phi^{-1}(u)$ est un sous-k-schéma fermé non vide de G, donc contient au moins un k-point $g \in G(k)$. Il existe donc $g, g' \in G(k)$ tel que $h\phi(g) = \phi(g')$, d'où $h = \phi(g'g^{-1})$ et donc $h \in \phi(G(k)) \subset U(k)$. Il en résulte que $Z = \varnothing$, i.e. $\phi(G) = U = G'$. Ceci prouve (i), et (ii) découle alors de la proposition précédente. $\square$

Illustrons maintenant l'utilité de la notion de morphisme fidèlement plat par le lemme suivant (pour la preuve, on renvoie à [Wa, 13.1]).

Lemme 4.28. — *Soit $\tau : B \to A$ un morphisme* **fidèlement plat** *de k-algèbres. Alors τ est injectif et, notant d_1 (resp. d_2) le morphisme de k-algèbres $B \to A \otimes_B A$ qui envoie b sur $\tau(b) \otimes 1$ (resp. sur $1 \otimes \tau(b)$), on a $B = \{a \in A \mid d_1(a) = d_2(a)\}$.*

On peut maintenant démontrer le :

Théorème 4.29. — *Soit $\phi : G \to G''$ un morphisme de k-schémas en groupes affines, avec G lisse et G'' de type fini, soient G' l'image de ϕ et $H = \mathrm{Ker}(\phi)$.*

(i) *ϕ induit un isomorphisme $G/H \simeq G'$.*

(ii) *Par conséquent, G/H est de type fini et le morphisme canonique $\pi : G \to G/H$ est fidèlement plat.*

Démonstration. — Notons $A = k[G]$, $A' = k[G']$, $B = k[G/H] = k[G]^H$ et π le morphisme $G \to G/H$. On a vu au chap. 2, Th. 1.25 que l'image du morphisme $k[G''] \to A$, à savoir A', est contenue dans B. D'autre part, d'après le corollaire 3.6, on sait que $\mathrm{Ker}(\pi) = H$.

Considérons le produit fibré $X = G \times_{G'} G = \mathrm{Spec}(A \otimes_{A'} A)$ et ses deux projections p_1, p_2 vers G (qui correspondent aux morphismes d_1 et d_2 de A vers $A \otimes_{A'} A$). Pour toute k-algèbre R, $X(R)$ est l'ensemble des couples $(g_1, g_2) \in G(R)^2$ tels que $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, c.-à-d., **de façon équivalente** :

a) Les morphismes de k-algèbres $g_1, g_2 : A \to R$ coïncident sur la sous-algèbre A' de A.

b) $g_2^{-1} g_1$ appartient au noyau de $G(R) \to G'(R)$, qui est $H(R)$, i.e. $g_2 = g_1 h$ pour un certain $h \in H(R)$.

Comme $\mathrm{Ker}(\pi) = H$, il résulte de (b) que g_1 et g_2 ont même image dans G/H, i.e. les morphismes de k-algèbres $g_1, g_2 : A \to R$ coïncident sur la sous-algèbre B de A. Appliquant ceci à $R = A \otimes_{A'} A$ et à $g_1 = d_1$ et $g_2 = d_2$ (qui vérifient bien (a)), on obtient que d_1 et d_2 coïncident sur B. Comme $A' \to A$ est fidèlement plat, il résulte du lemme précédent que $B \subset A'$, d'où $A' = B$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle. □

Remarque 4.30. — En travaillant un peu plus, on peut montrer que si $H_1 \subset H_2$ sont des sous-schémas en groupes fermés distingués de G, alors $H_2' = H_2/H_1$ est un sous-schéma en groupes fermé distingué de $G' = G/H_1$ et $G'/H_2' \simeq G/H_2$.

Revenant au cas général d'un quotient G/H, où H est un sous-schéma en groupes fermé pas nécessairement distingué, on peut maintenant énoncer le :

Théorème 4.31. — *Soit G un k-schéma en groupes* **lisse** *et H un sous-schéma en groupes fermé. Soit V un G-module de dimension finie contenant une droite D telle que le stabilisateur G_D égale H et soit $\mathscr{O}$ l'orbite de D dans $\mathbb{P}(V)$. Alors :*

(i) *Le morphisme $\phi = \phi_D : G \to \mathscr{O}$ est fidèlement plat.*

(ii) *Pour toute k-algèbre R, on a $H(R) = \{g \in G(R) \mid g(D \otimes 1) = D \otimes 1\}$.*

(iii) *On dit que le k-schéma quasi-projectif $\mathscr{O}$ « est » le quotient G/H : il a toutes les bonnes propriétés voulues, en particulier :*

(1) *ϕ induit une bijection $G(\overline{k})/H(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\overline{k})$.*

(2) *Le morphisme $\phi_D : G \to \mathscr{O}$ a toutes les propriétés universelles qu'on peut espérer, en particulier le quotient G/H ne dépend pas du choix de (V, D).*

Esquisse de démonstration. — (i) découle de la proposition et (ii) du fait que $H = G_D$. Esquissons la preuve du point (1) de (iii). Comme ϕ est fidèlement plat, il en est de même du morphisme $\phi_{\overline{k}} : G \times \overline{k} \to \mathscr{O} \times \overline{k}$ obtenu par extension des scalaires. Soit $x \in \mathscr{O}(\overline{k})$ alors x correspond à un point fermé de $\mathscr{O} \times \overline{k}$ qu'on notera encore x. Comme $\phi_{\overline{k}}$ est surjectif, l'image inverse $\phi_{\overline{k}}^{-1}(x)$ est non vide ; or c'est un sous-schéma fermé du $\overline{k}$-schéma de type fini $G \times \overline{k}$, donc elle contient au moins un point fermé g, qui est donc un élément de $G(\overline{k})$ tel que $\phi_{\overline{k}}(g) = x$.

On ne détaille pas la preuve du point (2) (qui repose sur des propriétés des morphismes fidèlement plats). Les lecteurs intéressés pourront consulter [DG, III, §3] ou [SGA3, VI_A, §5]. □

Remarque 4.32. — Attention, si $k \neq \overline{k}$, le morphisme $G(k) \to (G/H)(k)$ n'est pas nécessairement surjectif. Par exemple, prenons $k = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T, T^{-1}])$ et $H = \mu_{2,\mathbb{R}}$. Dans ce cas, on peut montrer (voir le chapitre suivant) que le morphisme $G \to G/H$ correspond à l'inclusion $k[T^2, T^{-2}] \subset k[T, T^{-1}]$, i.e. pour toute $\mathbb{R}$-algèbre R le morphisme $G(R) = R^\times \to (G/H)(R) = R^\times$ est donné par $r \mapsto r^2$. Ceci est surjectif si $R = \mathbb{C}$, mais ne l'est pas pour $R = \mathbb{R}$.