Chapitre 4 : Groupes diagonalisables, unipotents, réductifs, th. du point fixe de Borel

Références pour ce chapitre :

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§§ 8–11)

[Wa] William C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer-Verlag, 1979. (chap. 2–10)

Et aussi :

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011. (VI_B, §6)

[DG] Michel Demazure & Pierre Gabriel, Groupes algébriques, Masson & North-Holland, 1970. (§§ II.5.1 & IV.2)

6. Caractères et groupes diagonalisables

Dans cette section, k désigne un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes *affine*.

Rappel 6.0. — Soit H un k-schéma en groupes. On a défini au chap. 2 son groupe des caractères $X(H)$ et montré que $X(H)$ est une partie libre de $k[H]$ et que si V est un H-module, les espaces de poids V_χ, pour $\chi \in X(H)$, sont en somme directe. (1)

Définition 6.1 **(Le k-schéma en groupes $D_k(M)$ associé à un groupe abélien M)**
Soit M un groupe abélien. On lui associe la k-algèbre commutative kM, qui a une base $(e_m)_{m\in M}$ indexée par les éléments de M et où la multiplication, k-bilinéaire, est définie par $e_m e_{m'} = e_{m+m'}$ pour tout $m, m' \in M$. Elle est munie d'une structure d'algèbre de Hopf, définie par :

$$\Delta(e_m) = e_m \otimes e_m, \qquad \varepsilon(e_m) = 1, \qquad \tau(e_m) = e_{-m}.$$

On obtient ainsi un k-schéma en groupes $\boxed{D_k(M) = \operatorname{Spec}(kM).}$

Par exemple, si $M \simeq \mathbb{Z}^r$ alors $kM \simeq k[T_1^{\pm 1}, \dots, T_r^{\pm 1}]$ et donc $D_k(\mathbb{Z}^r)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^r$, i.e. à un produit de r copies du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$.

D'autre part, si $M \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors $kM \simeq k[T]/(T^n - 1)$ et donc $D_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est le k-schéma en groupes $\mu_{n,k}$ des racines n-ièmes de l'unité.

Si M est un groupe abélien **de type fini**, il est isomorphe à une somme directe

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

(où les n_i sont uniques si l'on impose que n_i divise n_{i+1}) et donc

$$kM \simeq k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, T_1, \dots, T_s]/(T_1^{n_1} - 1, \dots, T_s^{n_s} - 1)$$

est une k-algèbre de type fini et $D_k(M) \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^r \times \mu_{n_1,k} \times \cdots \times \mu_{n_s,k}$.

(1) Attention, pour H et V arbitraires, cette somme n'est pas en général égale à V tout entier.

***Définition 6.2* (Groupes diagonalisables).** — Soit H un k-schéma en groupes. On dit que H est **diagonalisable** si $X(H)$ engendre $k[H]$ comme espace vectoriel (donc en forme une base d'après le rappel 6.0). Dans ce cas, on voit que $k[H]$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf, à l'algèbre de groupe $kX(H)$ et donc $H \simeq D_k(M)$, où $M = X(H)$.

Si de plus H est un k-schéma de type fini, on déduit du lemme suivant que M est de type fini donc H isomorphe à un produit fini de groupes $\mathbb{G}_{m,k}$ et $\mu_{n,k}$, pour différents n.

Lemme 6.3. — *Soit M un groupe abélien. Si kM est une k-algèbre de type fini alors M est de type fini.*

Démonstration. — Supposons que kM soit engendrée comme k-algèbre par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_s$; ceux-ci s'écrivent comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments e_m. Notons N le sous-groupe de type fini de M engendré par ces e_m, alors kN contient les x_i donc égale kM. Donc tout élément e_m s'écrit comme combinaison linéaire des e_n, avec $n \in N$, et par indépendance linéaire ceci entraîne que m est l'un des n, i.e. que $M = N$. Ceci prouve que M est de type fini. □

Proposition 6.4. — *Soient H un k-schéma en groupes diagonalisable et V un H-module. Alors $V = \bigoplus_{\chi \in X(H)} V_\chi$.*

Démonstration. — Soit $v \in V$ non nul. Comme $k[H] = \bigoplus_{\chi \in X(H)} k\chi$ on peut écrire de façon unique

$$\Delta_V(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \chi_i$$

avec les χ_i deux à deux distincts et les v_i non nuls (on a $\Delta_V(v) \neq 0$ car $(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta(v) = v$). Alors

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \chi_i \otimes \chi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_V(v_i) \otimes \chi_i$$

et comme les χ_i sont linéairement indépendants ceci donne $\Delta_V(v_i) = v_i \otimes \chi_i$, i.e. $v_i \in V_{\chi_i}$. De plus l'égalité

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon(\chi_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

montre que v appartient à la somme des V_χ. Donc cette somme égale V. Et comme cette somme est toujours une somme directe, ceci prouve la proposition. □

Corollaire 6.5. — *Soit H un k-schéma en groupes diagonalisable.*

(i) *Une suite de H-modules*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si, pour tout $\chi \in X(H)$, la suite d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow E_\chi \longrightarrow V_\chi \longrightarrow V'_\chi \longrightarrow 0$$

est exacte. [2]

(ii) *Si V est un H-module, tout sous-H-module E est facteur direct i.e. il existe un sous-H-module F tel que $V = E \oplus F$.*

Démonstration. — Le point (i) découle de ce que E, V, V' sont somme directe de leurs espaces de poids et de ce que tout morphisme de H-modules préserve les poids ; les détails sont laissés au lecteur.

Prouvons (ii). Pour tout $\chi \in X(H)$, soit F_χ un supplémentaire de E_χ dans V_χ ; alors $F = \bigoplus_\chi F_\chi$ est un sous-H-module de V tel que $V = E \oplus F$. □

---

[2] En d'autres termes, la catégorie des H-modules est équivalente à celle des k-ev gradués par le groupe abélien $X(H)$.

Théorème 6.6. — *Soient M un groupe abélien et $G = D_k(M)$.*

(i) *Le groupe des caractères de G est M.*

(ii) *Si H est un sous-schéma en groupes fermé de G, alors $H = D_k(M/N)$ pour un certain sous-groupe N de M.*

(iii) *Pour tout sous-groupe N de M, on a une suite exacte de k-schémas en groupes :*

$$0 \longrightarrow D_k(M/N) \longrightarrow D_k(M) \xrightarrow{\pi} D_k(N) \longrightarrow 0$$

i.e. $H = D_k(M/N)$ égale $\mathrm{Ker}(\pi)$ *et π est la projection canonique $G \to G/H$. Les sous-k-schémas en groupes fermés de $H = D_k(M)$ sont les $H_N = D_k(M/N)$, pour N parcourant les sous-groupes de M, et le quotient H/H_N est isomorphe à $D_k(N)$.*

Démonstration. — (i) Comme $\Delta(e_m) = e_m \otimes e_m$ et $\varepsilon(e_m) = 1$ alors chaque e_m est un caractère de G, donc $M \subset X(G)$. Et c'est une égalité car $X(G)$ est une partie libre de $k[G] = kM$ et M en est une base (donc libre maximale).

(ii) Soit H un sous-schéma en groupes fermé de G, i.e. $k[H]$ égale $A = k[G]/I$, avec I un idéal de Hopf. La projection ϕ de $k[G] = kM$ sur A induit un morphisme de groupes $M \to A^\times$; notons N son noyau. Alors A est engendré comme k-espace vectoriel par les $e_{\overline{m}}$, pour $\overline{m} \in M/N$ et ceux-ci sont des caractères de H (puisque ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf) donc sont linéairement indépendants. Il en résulte que A est l'algèbre de groupe de M/N, d'où $H = D_k(M/N)$.

(iii) Soit N un sous-groupe de M. Il est clair que $H = D_k(M/N)$ est un sous-schéma en groupes fermé de G (défini par l'idéal engendré par les $e_n - 1$ pour $n \in N$). Il est distingué puisque G est commutatif. Notons ϕ le morphisme $k[G] \to k[H]$ et posons $\Delta_H = (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \Delta$, où Δ est la comultiplication de $k[G] = kM$. Le morphisme canonique $G \to G/H$ est donné par l'inclusion dans $k[G]$ de la sous-algèbre de Hopf :

$$B = k[G]^H = \{f \in k[G] \mid \Delta_H(f) = f \otimes 1\}.$$

Comme l'élément 0 du groupe $X(H) = M/N$ est en fait la fonction constante $1 \in k[H]$, on voit que N est l'ensemble des $m \in M$ tels que $\phi(e_m) = 1$, et donc tout e_n avec $n \in N$ appartient à B car $\Delta_H(e_n) = e_n \otimes \phi(e_n) = e_n \otimes 1$. Montrons que l'inclusion $k[N] \subset B$ est une égalité.

Soit $f = \sum_m a_m e_m$ un élément arbitraire de $k[G]$ (avec $a_m = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices) ; alors on a $\Delta_H(f) = \sum_m a_m e_m \otimes \phi(e_m)$ et en séparant cette somme en deux selon que $\overline{m} = 0$ (i.e. $m \in N$) ou que $\overline{m}$ est un élément $q \neq 0$ de M/N, on obtient :

$$\Delta_H(f) = \sum_{n \in N} a_n e_n \otimes 1 + \sum_{\substack{q \in M/N \\ q \neq 0}} \left(\sum_{\substack{m \in M \\ \overline{m} = q}} a_m e_m \right) \otimes e_q.$$

Car 1 et les e_q sont linéairement indépendants (de même que les différents e_m se projetant sur un même e_q), on obtient que $\Delta_H(f) = f \otimes 1$ si et seulement si $a_m = 0$ pour tout $m \notin M$, i.e. si et seulement si $f \in kN$. Ceci prouve que $kN = k[G/H]$.

On voit ici que $k[G] = kM$ est un module **libre** sur $k[G/H] = kN$ (de base les e_q pour q parcourant un système de représentants dans M de M/N) ce qui entraîne que le morphisme $G \to G/H$ est fidèlement plat (comme on l'a vu dans le cas général).

Enfin, on a vu dans le cas général que le noyau K de $G \to G/H$ est H. Ceci se voit directement ici, car K est défini par l'idéal engendré par l'idéal d'augmentation de $B = k[G/H]$, i.e. par les $e_n - 1$ pour $n \in N$, et ceci est bien l'idéal définissant $H = D_k(M/N)$. □

Remarque 6.7. — Tout morphisme de groupes abéliens $M \to M'$ induit un morphisme de k-algèbres de Hopf $kM \to kM'$, i.e. un morphisme de k-schémas en groupes $D_k(M') \to D_k(M)$. Réciproquement, tout morphisme φ de k-schémas en groupes de $G' = D_k(M')$ vers $G = D_k(M)$ induit un morphisme de groupes $M = X(G) \to X(G') = M'$, $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$.

Il résulte alors du théorème précédent que la catégorie des groupes abéliens (de type fini) est anti-équivalente à celle des k-schémas en groupes diagonalisables (de type fini).

***Exemple 6.8* (de quotient).** — Soit n un entier > 1. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ n\ } \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

correspond à la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_{n,k} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow 1$$

où le morphisme π est donné par $r \mapsto r^n$ pour toute k-algèbre R et $r \in R^\times$; il correspond à l'inclusion $k[T^n, T^{-n}] \subset k[T, T^{-1}]$. (Noter que si $\mathrm{car}(k) = p$ divise n, le k-schéma en groupes $\mu_{n,k}$ n'est pas réduit.)

Remarque 6.9. — D'après le théorème, si H est le sous-groupe fermé de $G = D_k(M)$ défini par des équations $\chi_i = 1$, avec $\chi_i \in X(G) = M$, alors $X(H) = M/N$, où N est le sous-groupe de M engendré par les χ_i. **Par exemple**, soit $T \simeq \mathbb{G}_{m,k}^n$ le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_{n,k}$; on a $X(T) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ où ε_i désigne le caractère qui à un élément de T associe son i-ème coefficient diagonal.

Soit T' l'intersection de T et de $\mathrm{SL}_{n,k}$, i.e. T' est le sous-groupe fermé de T défini par l'équation $\mathrm{dét} = 1$. Comme la restriction à T du déterminant est le caractère $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$, on obtient que

$$X(T') = X(T)/\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n).$$

***Définition 6.10* (Tores et tores déployés).** — Un rôle particulièrement important est joué par les groupes $D_k(\mathbb{Z}^r) \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^r$. Un tel groupe est appelé un **tore déployé** de dimension r. On dit « *tore déployé* » car on introduit aussi la définition plus générale suivante.

Un k-schéma en groupes de type fini T est appelé un tore de dimension r si $T \times \overline{k}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\overline{k}}^r$. Si $k = \overline{k}$ tous les tores sont déployés, mais si $k \neq \overline{k}$ il peut exister des tores non déployés, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 6.11. — Soient $k = \mathbb{R}$ et $S = \mathrm{SO}_{2,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. Alors S représente le foncteur en groupes qui à toute k-algèbre R associe le sous-groupe suivant de $\mathrm{GL}_2(R)$:

$$\mathrm{SO}_2(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \mid 1 = \mathrm{dét}(M) = x^2 + y^2 \right\}.$$

Ceci est bien un sous-groupe car

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx' \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Donc la structure d'algèbre de Hopf est donnée par $\Delta(X) = X \otimes X - Y \otimes Y$, $\Delta(Y) = X \otimes Y + Y \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$, $\varepsilon(Y) = 0$, $\tau(X) = X$ et $\tau(Y) = -Y$.

D'autre part, $A_{\mathbb{C}} = A \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ (en posant $t = X + iY$) et l'on peut vérifier que la structure d'algèbre de Hopf est bien celle de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Ou bien, pour toute $\mathbb{C}$-algèbre R, on peut remplacer la base canonique (e_1, e_2) de R^2 par la base $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ où $f_1 = e_1 - ie_2$ et $f_2 = e_1 + ie_2$; en écrivant la matrice M précédente dans cette nouvelle base, on voit que :

$$S_{\mathbb{C}}(R) = \left\{ M' = \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \mid 1 = \mathrm{dét}(M') = x^2 + y^2 \right\}$$

et que l'application $S_{\mathbb{C}}(R) \to R^{\times}$, $(x,y) \mapsto z = x + iy$ est un morphisme de groupes, fonctoriel en R, et bijectif car sa réciproque est donnée par

$$z \mapsto (x,y) = \Big(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2}\Big).$$

Ceci montre que $S_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, donc S est un $\mathbb{R}$-tore de dimension 1. Mais il n'est pas déployé, car $V = \mathbb{R}^2$ est de façon naturelle un S-module, i.e. le morphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \to \mathrm{GL}_2$ correspond à la coaction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes A, \qquad e_1 \mapsto e_1 \otimes X + e_2 \otimes Y, \quad e_2 \mapsto e_1 \otimes (-Y) + e_2 \otimes X.$$

Ce S-module n'est pas somme directe d'espaces de poids $V_\chi \oplus V_{\chi'}$, car sinon $S(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ agirait sur $\mathbb{R}^2$ de façon diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

Terminons ce paragraphe avec la proposition suivante, qui servira ultérieurement.

Proposition 6.12. — *Soit H un k-schéma en groupes diagonalisable de type fini.*

(i) *H est le produit d'un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$ et de groupes $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$, pour des entiers q qui sont primaires, i.e. de la forme p^r pour un nombre premier p et $r \geq 1$.*

(ii) *Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si $q = p^r$ avec $r \geq 1$, le groupe $\mu_{q,k}$ n'est pas réduit.*

(iii) *Si H est réduit et connexe, alors $H \simeq \mathbb{G}_{m,k}^d$ i.e. H est un tore.*

Démonstration. — Par hypothèse, $H = \mathrm{Spec}(kM)$ où M est un groupe abélien de type fini. Alors M est la somme directe d'un certain $\mathbb{Z}^d$ et de groupes cycliques primaires $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, pour des entiers q primaires, d'où (i).

Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si $q = p^r$ avec $r \geq 1$, on a $T^q - 1 = (T-1)^q$ donc la k-algèbre $k[T]/(T^q - 1)$ n'est pas réduite, d'où (ii).

Prouvons (iii). Supposons H réduit. Alors d'après (i) et (ii) c'est le produit d'un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$ et de groupes $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$, pour des entiers q de la forme p^r, pour des nombres premiers p distincts de $\mathrm{car}(k)$ (si celle-ci est $\neq 0$). Dans ce cas, le polynôme dérivé $(T^q - 1)' = qT^{q-1}$ est non nul, donc les racines de $T^q - 1$ sont deux-à-deux distinctes, i.e. le groupe $\mu_q(k)$ des racines q-ièmes de l'unité dans k est formé de q éléments, et $T^q - 1$ se factorise en :

$$T^q - 1 = \prod_{\xi \in \mu_q(k)} (T - \xi)$$

et donc $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$ est un produit (indexé par $\mu_q(k)$) de copies de $\mathrm{Spec}(k)$ et la composante connexe de $\mu_{q,k}$ est le groupe trivial $\{e\}$.[(3)] Il en résulte que si H est réduit et connexe, alors H est un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$. $\square$

7. k-schémas en groupes unipotents

Dans cette section, k désigne un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes *affine*. Commençons par la définition suivante, qui aurait dû être donnée dans le chapitre 3.

***Définition 7.1* (G-modules fidèles).** — Soient G un k-schéma en groupes de type fini. On dit qu'un G-module V de dimension finie est **fidèle** si le noyau du morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ correspondant est le groupe trivial $\{e\}$. Dans ce cas, on peut montrer que ρ est une immersion fermée, i.e. un isomorphisme de G sur un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{GL}(V)$. (Lorsque G est lisse, on l'a démontré au chap. 3 et la démonstration s'étend au cas général en utilisant [Wa, Th. 14.1])

(3) Au contraire, si $\mathrm{car}(k) = p$ alors le k-schéma $\mu_{q,k}$ n'est pas réduit mais n'a qu'un seul point, donc est connexe.

D'autre part, on a vu au chap. 1 que G admet au moins un G-module fidèle E de dimension finie. Dans ce cas, pour tout G-module V de dimension finie, le G-module $V \oplus E$ est fidèle.

Terminologie 7.2. — Soient G un k-schéma en groupes et V un G-module. Le sous-G-module des *invariants* est

$$V^G = \{v \in V \mid \Delta_V(v) = v \otimes 1\}$$

i.e. c'est le sous-espace formé des v tels que pour toute k-algèbre R et tout $g \in G(R)$ on ait dans $V \otimes R$ l'égalité $g(v \otimes 1) = v \otimes 1$. C'est clairement un sous-G-module de V, sur lequel l'action de G est « triviale », i.e. tout $g \in G(R)$ agit comme l'identité. On dit que V est un G-module *trivial* si $V = V^G$.

***Définition 7.3* (k-schémas en groupes unipotents)**. — Soit G un k-schéma en groupes.

(i) On dit que G est **unipotent** si pour tout G-module $V \neq (0)$, le sous-module des invariants V^G est non nul.

(ii) Si $\dim(V) < \infty$, en réappliquant ceci au G-module V/V^G, on voit par récurrence sur $\dim(V)$ que ceci entraîne qu'il existe une suite strictement croissante de sous-G-modules :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$$

telle que chaque V_i/V_{i-1} soit un G-module trivial. En prenant une base de V adaptée à ce drapeau de sous-modules et en identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base, on voit alors que l'image de G dans $\mathrm{GL}_{n,k}$ est contenue dans le sous-groupe $U_{n,k}$ des matrices unitriangulaires supérieures.

(iii) Prenant pour V un G-module de dimension fidèle, de sorte qu'on peut identifier G à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$, on obtient alors que G est un sous-groupe fermé de $U_{n,k}$. On va démontrer plus bas que la réciproque est vraie.

Remarque. — Avec la définition adoptée plus haut, il est clair que si G est unipotent et si $G' = G/H$ est un schéma en groupes quotient de G alors G' est unipotent, car $k[G'] \subset k[G]$ donc si V est un $k[G']$-comodule non nul, c'est aussi un $k[G]$-comodule non nul donc il existe $v \neq 0$ tel que $\Delta_V(v) = v \otimes 1$.

Par contre, il n'est pas évident qu'un sous-schéma en groupes fermé H de G soit unipotent. Ceci va découler de la proposition suivante.

Proposition 7.4. — *Soit G un k-schéma en groupes et $A = k[G]$.*

(i) *On suppose que A est réunion d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels C_i tels que $C_0 = k1$ et que :*

$$(*) \qquad \Delta(C_r) \subset \sum_{i=0}^{r} C_i \otimes C_{r-i}$$

pour tout r. Alors G est unipotent, ainsi que tout sous-schéma en groupes fermé de G.

(ii) *Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe $U_{n,k}$ vérifie l'hypothèse de* (i)*, donc est unipotent.*

Démonstration. — (i) Soit V un G-module non nul. Pour tout r, posons

$$V_r = \{v \in V \mid \Delta_V(v) \in V \otimes C_r\}.$$

Notons que $V^G = V_0$, car si $v \neq 0$ et $\Delta_V(v) = v \otimes t$, avec $t \in k$, alors l'égalité $v = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_V(v)$ entraîne que $t = 1$. Comme A est la réunion des C_i, il existe un entier r tel que $V_r \neq 0$. Si $r > 0$, montrons que $V_{r-1} \neq 0$. Notons π la projection $A \to \overline{A} = A/C_{r-1}$ et $\overline{\Delta}_V$ la composée $(\mathrm{id}_V \otimes \pi) \circ \Delta_V : V \to V \otimes \overline{A}$. L'hypothèse sur les C_i entraîne que $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V(V_r)$ est contenu dans $V \otimes (C_{r-1} \otimes A + A \otimes C_{r-1})$ donc est d'image nulle dans

$V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}$. D'autre part, $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V = (\Delta_V \otimes \mathrm{id}_A)\Delta_V$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Delta_V"] \arrow[dr, "\overline{\Delta}_V"'] & V \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_V \otimes \Delta"] \arrow[d] & V \otimes A \otimes A \arrow[d] \\
& V \otimes \overline{A} \arrow[r, "\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_{\overline{A}}"] & V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}
\end{tikzcd}$$

Si l'on avait $V_{r-1} = \{0\}$ alors $\overline{\Delta}_V$ serait injective, ainsi que $\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_{\overline{A}}$ et que l'application composée $V \to V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}$. Or $V_r \neq 0$ est contenu dans le noyau de cette application composée. Ceci montre que $V_{r-1} \neq 0$.

Par conséquent, G est unipotent. De plus, si H est un sous-schéma en groupes fermé de G alors $k[H]$ est une algèbre de Hopf quotient de A donc est la réunion des images $\overline{C}_i$ des C_i, lesquelles vérifient aussi $(*)$, et donc H est unipotent. Ceci prouve (i).

(ii) $k[U_{n,k}]$ est l'algèbre de polynômes $A = k[X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$ et si l'on pose $\deg(X_{ij}) = j - i$, celle-ci devient une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée telle que $A_0 = k \cdot 1$, en notant A_r la composante homogène de A de degré r. De plus, pour tout $i < j$, on a

$$\Delta(X_{ij}) = X_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes X_{ij} + \sum_{i<\ell<j} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}$$

donc $\Delta : A \to A \otimes A$ est un morphisme de k-algèbres graduées, i.e. pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta(A_r) \subset (A \otimes A)_r = \bigoplus_{i=0}^{r} A_i \otimes A_{r-i}.$$

Il en résulte que si l'on pose $C_r = \bigoplus_{i=0}^{r} A_i$ alors A est la réunion des C_i, on a $C_0 = A_0 = k \cdot 1$, et $(*)$ est vérifiée. Ceci prouve que $U_{n,k}$ est unipotent. Et donc, d'après (i), il en est de même de tout sous-schéma en groupes fermé de $U_{n,k}$. □

On en déduit le :

***Théorème 7.5* (Caractérisation des k-schémas en groupes unipotents)**
Soit G un k-schéma en groupes de type fini.

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes, et si elles sont vérifiées on dit que G est* **unipotent**.

(1) *Pour tout G-module V non nul, V^G est non nul.*

(2) *Tout G-module simple est trivial* (*et donc de dimension* 1).

(3) *Pour tout G-module V non nul de dimension d, il existe un drapeau complet de sous-G-modules $V_1 \subset \cdots \subset V_{d-1} \subset V_d = V$ tels que chaque V_i/V_{i-1} soit un G-module trivial de dimension* 1.

(4) *G est un sous-schéma en groupes fermé de $U_{n,k}$ pour un certain entier $n \geq 2$.*

(i bis) *En particulier, $\mathbb{G}_{a,k} \simeq U_{2,k}$ est unipotent.*

(ii) *Si G est unipotent, alors tout sous-schéma en groupes fermé H de G est unipotent, de même que le quotient G/H si H est distingué.*

(iii) *Réciproquement, si H est un sous-schéma en groupes distingué tel que H et G/H soient unipotents, alors G l'est aussi.*

(iv) *G est unipotent $\Longleftrightarrow$ il a une* suite de composition centrale (*c.-à-d., une suite de sous-schémas en groupes fermés distingués*

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_N \supset G_{N+1} = \{e\}$$

où chaque G_i/G_{i+1} est central dans G/G_{i+1}) telle que *chaque G_i/G_{i+1} soit isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_{a,k}$.*

Démonstration. — (i) et (ii) découlent de ce qui précède. D'autre part, on a un isomorphisme de k-groupes algébriques $\mathbb{G}_{a,k} \to U_{2,k}$ donné par $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où (i bis).

Prouvons (iii). Soit V un G-module non nul. Comme H est unipotent alors $V^H \neq (0)$, et comme H est distingué dans G on sait que V^H est un sous-G-module de V (chap. 2, Prop. 1.23). Notons μ la coaction $V^H \to V^H \otimes k[G]$. Soit $v \in V^H$, écrivons

$$\mu(v) = \sum_i v_i \otimes \phi_i$$

avec les $v_i \in V^H$ linéairement indépendants et $\phi_i \in k[G]$. Soit $R \to R'$ un morphisme de k-algèbres, $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$. Alors dans $V^H \otimes R'$ on a les égalités :

$$\sum_i v_i \otimes \phi_i(gh) = gh(v \otimes 1) = g(v \otimes 1) = \sum_i v_i \otimes \phi_i(g).$$

Ceci prouve que $\phi(gh) = \phi(g)$ pour tout $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$, donc ϕ_i appartient à la sous-algèbre de Hopf $k[G]^H = k[G/H]$ (cf. chap. 2, Lemme 1.24). Ceci montre que V^H est un (G/H)-module (non nul). Comme G/H est unipotent, il existe donc $v \neq 0$ dans V tel que $\mu(v) = v \otimes 1$. Ceci montre que G est unipotent.

Pour prouver (iv), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.6. — *Soit $U = U_{n,k}$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Il possède une suite de composition centrale*

$$U = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_{n-1} \supset U_n = \{e\}$$

où chaque U_i/U_{i+1} est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}^{n-i}$.

Démonstration. — Posons $U_1 = U$ et pour $d = 2, \ldots, n-1$ notons U_d le sous-groupe fermé de U formé des éléments ayant $d-1$ diagonales de 0 au-dessous de la diagonale, i.e. défini dans U par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i+1 \leq j < i+d$. Alors on a

$$U = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_{n-1} \supset U_n = \{e\}$$

et on vérifie que chaque U_d est distingué dans U, que chaque quotient U_d/U_{d+1} est central dans U/U_{d+1}, et que le morphisme

$$U_d \to (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$$

qui à tout $u \in U_d$ associe les coefficients de sa première diagonale non nulle (i.e. la d-ième diagonale au-dessus de la diagonale principale), est un morphisme de groupes, qui induit un isomorphisme $U_d/U_{d+1} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$ (cf. feuille de TD n°3). □

Revenons à la preuve de (iv). Supposons G unipotent. D'après le lemme précédent, $U = U_{n,k}$ possède une suite de composition centrale dont les quotients successifs sont des produits de copies de $\mathbb{G}_{a,k}$. En raffinant cette suite, on obtient une suite de composition centrale

$$U = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_{N-1} \supset U_{N+1} = \{e\}$$

où $N = \dim(U) = n(n-1)/2$ et où chaque U_i/U_{i+1} est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$. Maintenant, si G est un sous-schéma en groupes fermé de U, les $G_i = G \cap U_i$ forment une suite de composition centrale de G et chaque G_i/G_{i+1} est isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de $U_i/U_{i+1} \simeq \mathbb{G}_{a,k}$, donc G vérifie la propriété énoncée en (iv).

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée. Alors chaque quotient G_i/G_{i+1}, étant un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_{a,k}$, est unipotent d'après (i bis) et (ii). Par applications répétées de (iii), on obtient alors que G est unipotent. □

La proposition suivante montre que les groupes diagonalisables et unipotents n'ont « rien en commun » :

Proposition 7.7. — *Soit K un k-schéma en groupes qui est à la fois diagonalisable et unipotent. Alors $K = \{e\}$.*

Démonstration. — Tout caractère $\chi \in X(K)$ définit un G-module $V = k_\chi$ de dimension 1, via $\Delta_V(v) = v \otimes \chi$ pour tout $v \in V$. Comme K est unipotent, ce module est trivial, i.e. χ est la fonction constante 1, i.e. $X(K)$ est le groupe abélien trivial $M = \{0\}$. Et comme K est diagonalisable, on a $K = \mathrm{Spec}(kM) = \mathrm{Spec}(k)$, d'où $K = \{e\}$. □

Remarque 7.8. — Lorsque $k = \overline{k}$, on peut démontrer les résultats suivants (cf. [Wa, §8.4] ou [DG, §IV.2]).

(i) Soit $G = \mathrm{Spec}(A)$ un sous-schéma en groupes non trivial de $\mathbb{G}_{a,k}$.

(1) Si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors $G = \mathbb{G}_{a,k}$.

(2) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors $H = G_{\text{réd}} = \mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})$ est un sous-schéma en groupes distingué de G et $G/H \simeq \alpha_{p^r} = \mathrm{Spec}(k[X]/X^{p^r})$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$. De plus, la composante neutre H^0 est soit triviale soit isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et H/H^0 est isomorphe au groupe fini $\mathbb{F}_p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En particulier, si G est non trivial, réduit et connexe, alors $G \simeq \mathbb{G}_{a,k}$.

(ii) Soit G un k-groupe algébrique unipotent et connexe. Alors G possède une suite de composition centrale dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_{a,k}$.

Et en travaillant un peu plus (cf. [DG, §IV.4.3, Cor. 3.8]) on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.9. — *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, de dimension n. Alors, comme variété, U est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$.*

8. Groupes réductifs (I)

Dans cette section, k désigne un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes *affine*.

Définition 8.1. — (i) Soit k un corps *algébriquement clos* et G un k-schéma en groupes. On dit que G est **réductif** s'il est lisse, connexe, et s'il ne possède pas de sous-schéma en groupes fermé distingué unipotent de dimension > 0.

(ii) Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et G un k-schéma en groupes. On dit que G est réductif si $G_{\overline{k}} = G \otimes \overline{k}$ est réductif.

Lemme 8.2. — *Soit k un corps* algébriquement clos *et G un k-schéma en groupes lisse connexe possédant une représentation fidèle V qui est semi-simple, i.e. somme directe de représentations irréductibles $V_1, \dots V_r$. Alors G est réductif.*

Démonstration. — Soit H un sous-schéma en groupes fermé distingué, unipotent, de G. Alors chaque V_i^H est un sous-G-module de V_i (car H est distingué), non nul (car H est unipotent), donc égal à V_i (car V_i est irréductible). Donc H agit trivialement sur $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, donc $H = \{e\}$ puisque V est fidèle. □

Exemples 8.3. — (1) Pour tout corps k, on obtient ainsi que $\mathrm{GL}_{n,k}$ et $\mathrm{SL}_{n,k}$ sont réductifs.

(2) Soit V un k-espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire alternée *non dégénérée* et soit $\mathrm{Sp}_{2n,k}$ le groupe symplectique correspondant. On peut montrer que $\mathrm{Sp}_{2n,k}$ est lisse et connexe, et il résulte alors du lemme que $\mathrm{Sp}_{2n,k}$ est réductif.

(3) Supposons $\mathrm{car}(k) \neq 2$, soit V un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique *non dégénérée* Q et soit $\mathrm{SO}(Q)$ le groupe spécial orthogonal correspondant. On peut montrer que $\mathrm{SO}(Q)$ est lisse et connexe, et il résulte alors du lemme que $\mathrm{SO}(Q)$ est réductif.

9. k-groupes lisses résolubles connexes

Désormais, on suppose k **algébriquement clos** et que tous les k-schémas en groupes G considérés sont **de type fini**. Si de plus G est réduit, donc lisse puisque $k = \overline{k}$, on dira simplement que G est « k-groupe algébrique ». On dira « sous-groupe fermé de G » pour « sous-k-schéma en groupes fermé réduit ». Lorsqu'on aura besoin de considérer un k-schéma en groupes H de type fini non nécessairement réduit, on écrira : « soit H un k-schéma en groupes ».

Terminologie 9.1 **(Sous-variétés localement fermées)**. — De même, tous les k-schémas X considérés seront réduits et de type fini, et l'on dira que X est une k-variété algébrique. Dans ce cas, on identifie $X(k)$ à l'ensemble des points fermés de X et on le munit de la topologie de Zariski. Alors l'application :

$$Z \mapsto Z(k)$$

est une bijection entre l'ensembles des sous-k-schémas fermés réduits de X et les sous-ensembles fermés de $X(k)$. (L'application réciproque associe à tout fermé F de $X(k)$ l'adhérence de F dans X, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de X.) On dira que Z, ou que $Z(k)$, est une « sous-variété fermée » de X.

Rappelons que, par définition, un « sous-schéma réduit » de X est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé réduit de X. Alors la bijection précédente s'étend en une bijection

$$Y \mapsto Y(k)$$

entre l'ensembles des sous-k-schémas réduits de X et les parties localement fermées de $X(k)$. (En effet, cette application est injective et il suffit de voir qu'elle est bijective. Pour $L = F \cap U$, où F est ouvert et U fermé dans $X(k)$, on a $L = F - F'$ où $F' = X - U$, alors F et F' proviennent de sous-schémas fermés réduits Z et Z', et $V = X - Z'$ est un sous-schéma ouvert de X tel que $V(k) = X(k) - Z'(k)$ et donc si l'on pose $Y = Z \cap V$ on a $Y(k) = L$.) On dira que Y, ou que $Y(k)$, est une « sous-variété localement fermée » de X.

Lemme 9.2 **(de l'orbite fermée)**. — *Soit G un k-groupe algébrique opérant sur une k-variété algébrique X.*

(i) *Si une sous-variété localement fermée Y de X est stable par G, il en est de même de son adhérence $\overline{Y}$ et du fermé $\overline{Y} - Y$.*

(ii) *X contient au moins une G-orbite fermée.*

Démonstration. — (i) Montrons d'abord que $\overline{Y}$ est stable par G. Il suffit de montrer que $\overline{Y}(k)$ est stable par $G(k)$. Soit donc $g \in G(k)$. On a $gY(k) \subset Y(k) \subset \overline{Y}(k)$ donc l'image inverse du fermé $\overline{Y}(k)$ par l'application continue $x \mapsto gx$ contient $Y(k)$ et donc aussi $\overline{Y}(k)$. Il en résulte que $\overline{Y}(k)$ est stable par g, pour tout $g \in G(k)$.

Notons Z la sous-variété fermée $\overline{Y} - Y$. À nouveau, il suffit de montrer que $Z(k)$ est stable par $G(k)$. Soient $z \in Z(k)$ et $g \in G(k)$. Comme $\overline{Y}$ est G-stable on a $gz \in \overline{Y}(k)$. Mais on ne peut avoir $gz \in Y(k)$ car sinon $z = g^{-1}(gz)$ appartiendrait à $Y(k)$. On a donc $gz \in Z(k)$ et ceci prouve (i).

Prouvons (ii). On sait que, pour tout $x \in X(k)$, son orbite sous G est une sous-variété localement fermée $\mathscr{O}_x$ stable par G. Notons $\overline{\mathscr{O}}_x$ son adhérence ; elle est G-stable d'après (i). Comme X est un espace topologique noethérien, l'ensemble $\mathscr{F}$ des adhérences d'orbites possède au moins un élément minimal $\overline{\mathscr{O}}_x$.

Si on avait $\mathscr{O}_x \neq \overline{\mathscr{O}}_x$ alors le fermé G-stable $Z = \overline{\mathscr{O}}_x - \mathscr{O}_x$ serait non vide donc contiendrait un point y de $X(k)$ ainsi que son orbite et que $\overline{\mathscr{O}}_y$. Alors celle-ci serait strictement contenue dans $\overline{\mathscr{O}}_x$, contredisant la minimalité. Ceci prouve que $\mathscr{O}_x = \overline{\mathscr{O}}_x$, d'où (ii). $\square$

Définition 9.3. — Soit G un k-groupe algébrique. On dira que G est **résoluble** s'il existe une suite de sous-groupes fermés : $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r \supset G_{r+1} = \{e\}$ telle que chaque G_{i+1} soit distingué dans G_i et que le quotient G_i/G_{i+1} soit commutatif.

Lemme 9.4. — *Si G est résoluble* connexe*, il existe une suite comme ci-dessus avec chaque G_i* connexe*.*

Démonstration. — Comme G/G_1 est commutatif, le morphisme de schémas $\phi_0 : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ se factorise par G_1, et comme $G \times G$ est connexe, il se factorise par G_1^0. Ceci entraîne que G_1^0 est distingué dans G et que le groupe quotient G/G_1^0 est commutatif.

De même, comme G_1/G_2 est commutatif, le morphisme de schémas $\phi_1 : G_1 \times G_1 \to G_1$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ se factorise par G_2, et comme $G_1^0 \times G_1^0$ est connexe, il est envoyé par ϕ_1 dans G_2^0. Ceci entraîne que G_2^0 est distingué dans G_1^0 et que le groupe quotient G_1^0/G_2^0 est commutatif. On peut alors répéter cet argument et l'on obtient que la suite des G_i^0 convient. □

Définition 9.5 **(k-schémas séparés).** — On dit qu'un k-schéma X est *séparé* si le morphisme diagonal $X \to X \times X$ est une immersion fermée, i.e. si la diagonale Δ_X est un sous-schéma fermé de $X \times X$. Comme on a supposé $k = \overline{k}$, ceci se récrit de façon plus simple comme suit :

(1) Si X est une k-variété algébrique, ceci équivaut à dire que l'ensemble des couples (x, x), pour $x \in X(k)$, est fermé dans $X(k) \times X(k)$.

(2) Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, la diagonale Δ_X est le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(A \times A)$ défini par l'idéal I noyau de la multiplication $A \otimes A \to A$, donc tout schéma affine est séparé. On peut aussi montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ est séparé.

(3) Si Y est une sous-variété localement fermée d'une variété algébrique séparée X, alors Δ_Y est l'intersection de $Y \times Y$ avec Δ_X, qui est fermé das $X \times X$, donc Δ_Y est fermée dans $Y \times Y$. Donc Y est séparée.

(4) D'après ce qui précède tout k-variété algébrique quasi-affine ou quasi-projective est séparée.

L'intérêt de cette notion apparaît dans la proposition suivante.

Proposition 9.6. — *Soit G un k-groupe algébrique opérant sur une k-variété algébrique* séparée *X et soit H un sous-groupe fermé* distingué *de G. Alors :*

(i) *$X^H(k) = \{x \in X(k) \mid hx = x$ pour tout $h \in H(k)\}$ est un fermé de $X(k)$, donc c'est l'ensemble des k-points d'une sous-variété fermée X^H de X (éventuellement vide), appelée la variété des points fixes de H dans X.*

(ii) *Le morphisme $G \times X^H \to X$ se factorise par X^H, donc G agit sur X^H.*

Démonstration. — (i) Soit $h \in H(k)$. Alors $X^h(k) = \{x \in X(k) \mid hx = x\}$ est l'image inverse de la diagonale de $X(k) \times X(k)$ par le morphisme $x \mapsto (hx, x)$, donc c'est un fermé de $X(k)$. Comme $X^H(k)$ est l'intersection des $X^h(k)$, pour $h \in H(k)$, il est aussi fermé.

(ii) Il suffit de montrer que $X^H(k)$ est stable par $G(k)$. Soient donc $x \in X^H(k)$ et $g \in G(k)$; alors pour tout $h \in H(k)$ on a :

$$h \cdot gx = g(g^{-1}hg)x = gx$$

donc $gx \in X^H(k)$. □

Remarque 9.7. — On peut montrer que le groupe algébrique G/H opère sur X^H, i.e. que le morphisme $G \times X^H \to X^H$ se factorise en un morphisme $(G/H) \times X^H \to X^H$. Mais nous n'aurons pas besoin de cela. En tout cas, il est clair que le groupe $(G/H)(k) = G(k)/H(k)$ agit sur $X^H(k)$.

Les variétés algébriques projectives (i.e. les sous-variétés fermées d'un espace projectif) ont certaines propriétés particulières, dont la suivante (que l'on admet pour le moment).

Proposition 9.8. — *Soit X une variété projective* connexe. *Alors $\mathscr{O}_X(X) = k$.*

***Théorème 9.9* (du point fixe de Borel).** — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble* connexe *agissant sur une variété projective $X \neq \varnothing$. Alors $X^G(k) \neq 0$.*

Démonstration. — On sait que G possède une suite de sous-groupes fermés *connexes*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r \supset G_{r+1} = \{e\}$$

telle que chaque G_{i+1} soit distingué dans G_i et que le quotient G_i/G_{i+1} soit commutatif. Montrons par récurrence décroissante sur i que la sous-variété fermée $X_i = X^{G_i}$ est non vide. C'est OK pour $i = r+1$, donc on peut supposer que $i \leq r$ et que X_{i+1} est non vide. D'après la proposition 9.6 (appliquée à $G = G_i$ et $H = G_{i+1}$), X_{i+1} est donc une sous-variété fermée de X (donc projective), stable par G_i.

D'après le lemme de l'orbite fermée 9.2, il existe $x \in X_{i+1}(k)$ tel que sa G_i-orbite $Y = \mathscr{O}_x$ soit fermée, donc c'est une variété projective. Soit G_x le k-schéma en groupes de G_i stabilisateur de x (on ne suppose pas ici que G_x est réduit). Comme x est fixé par $G_{i+1}(k)$ alors G_x contient G_{i+1} et donc, comme G_i/G_{i+1} est abélien, G_x est un sous-schéma en groupes *distingué* de G_i. Par conséquent, G_i/G_x est un k-groupe algébrique *affine connexe.*

D'autre part, on a un isomorphisme $G_i/G_x \xrightarrow{\sim} Y$, donc en particulier Y est connexe. Comme c'est une variété projective on a donc $\mathscr{O}_Y(Y) = k$. Mais comme Y est aussi affine, on a $Y = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_Y(Y)) = \mathrm{Spec}(k)$ donc Y est égale au point x. Et comme Y est la G_i-orbite de x, ceci montre que $gx = x$ pour tout $g \in G_i(k)$, donc X_i est non vide. Ceci prouve le théorème. $\square$

Remarques 9.10. — (1) Tout groupe fini G définit un k-groupe algébrique : l'algèbre des fonctions est k^G = produit de copies de k indexé par G = ensemble de toutes les fonctions $f : G \to k$ (et donc $\mathrm{Spec}(k^G)$ est une réunion disjointe de copies de $\mathrm{Spec}(k)$). Si l'on note δ_g la fonction telle que $\delta_g(h) = 1$ si $h = g$ et $= 0$ sinon, la structure d'algèbre de Hopf est définie par :

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{h \in G} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h \qquad \varepsilon(\delta_g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \tau(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

On prendra garde que k^G est différente de l'algèbre de groupe kG, de base $(e_g)_{g \in G}$ avec la mutliplication $e_g e_h = e_{gh}$!

(2) Le théorème n'est pas vrai pour un groupe résoluble non connexe. Par exemple, prenons $k = \mathbb{C}$ et G = le groupe symétrique S_3, qui est résoluble vu la suite exacte

$$e \longrightarrow C_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow C_2 \longrightarrow e$$

où C_i désigne le groupe cyclique d'ordre i. Considérons l'espace vectoriel de dimension deux $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Alors S_3 agit sur V (par permutations des coordonnées) donc aussi sur la variété projective $\mathbb{P}(V)$. Le groupe cyclique C_3 a exactement deux points fixes dans $\mathbb{P}(V)(\mathbb{C})$, qui sont les droites D_1 et D_2 engendrées par les vecteurs propres $(1, j, j^2)$ et $(1, j^2, j)$. Mais l'action de C_2 permute ces deux points fixes, donc S_3 n'a pas de point fixe !

***Définitions 9.11* (Grassmaniennes et variétés de drapeaux)**

Soit V un k-ev de dimension n et soit d un entier compris entre 1 et $n-1$.

(i) De même qu'on a défini le k-schéma $\mathbb{P}(V)$ qui représente le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des facteurs directs de rang 1 de $V \otimes R$, on peut montrer que le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des facteurs directs de rang d de $V \otimes R$ est représentable par un k-schéma, que l'on notera $\mathrm{Gr}_d(V)$ et qu'on appelle la « *grassmannienne* des d-plans de V ».[4]

On montre aussi que le morphisme de foncteurs $\mathrm{Gr}_d(V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$, $E \mapsto \bigwedge^d E$ est une immersion fermée, i.e. permet d'identifier $\mathrm{Gr}_d(V)$ à un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

(ii) D'autre part, si $W_1, \ldots, W_r$ sont des k-ev, on montre que le morphisme de foncteurs :

$$\mathbb{P}(W_1)(R) \times \cdots \times \mathbb{P}(W_r)(R) \to \mathbb{P}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_r)(R), \qquad (D_1, \ldots, D_r) \mapsto D_1 \otimes \cdots \otimes D_r$$

définit un morphisme de k-schémas $\mathbb{P}(W_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(W_r) \to \mathbb{P}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_r)$, appelé le morphisme de Segre, et que ce morphisme est une immersion fermée. Donc : *un produit fini d'espaces projectifs est un k-schéma projectif.* (En particulier, $\mathbb{P}^r_k \times \mathbb{P}^s_k$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^{rs+r+s}_k$.)

(iii) Revenons à notre V de dimension n et donnons-nous des entiers $d_1, \ldots, d_s$ tels que $1 \leq d_1 < \cdots < d_s \leq n-1$. On voit alors que le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des s-uplets $(E_1, \ldots, E_s)$, où chaque E_i est un facteur direct de rang d_i de $V \otimes R$, est représentable par un certain sous-schéma fermé $X = X(d_1, \ldots, d_s)$ de $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigotimes_{i=1}^s \bigwedge^{d_i} V$. On peut de plus montrer que le sous-foncteur qui à tout R associe l'ensemble des s-uplets comme ci-dessus tels que $E_1 \subset \cdots \subset E_s$ est représenté par un sous-schéma fermé de X, qu'on appelle le *k-schéma des drapeaux* de type $(d_1, \ldots, d_s)$ dans V et qu'on notera $\mathcal{F}\ell(V; d_1, \ldots, d_s)$. [5]

Si $s = n-1$ et $d_i = i$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, on dit que c'est le schéma (ou la variété) des drapeaux *complets*. En fait, dans ce cas on désignera $\mathcal{F}\ell(V; 1, 2, \ldots, n-1)$ simplement par $\mathcal{F}\ell(V)$ et l'on dira que c'est la variété des drapeaux de V (en omettant le mot « complet »). Et dans les autres cas, on dira que $\mathcal{F}\ell(V; d_1, \ldots, d_s)$ est la variété des drapeaux partiels de type $(d_1, \ldots, d_s)$.

***Corollaire 9.12* (Th. de Lie-Kolchin).** — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe et V une représentation de G de dimension finie n. Il existe un drapeau de V stable par G, i.e. il existe une suite de sous-G-modules $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ avec $\dim(V_i) = i$.*

Démonstration. — G agit dans V donc dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(V)$, et comme celle-ci est projective G y admet un point fixe. □

***Corollaire 9.13*.** — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe. Tout G-module simple est de dimension 1.*

Démonstration. — Ceci découle du théorème de Lie-Kolchin. (On rappelle que si G est un groupe (algébrique), un G-module V est dit *simple* s'il est $\neq (0)$ et ne contient pas de sous G-modules autres que (0) et V.) □

***Remarque 9.14*.** — Bien sûr, le corollaire n'est pas vrai pour un groupe non résoluble. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_{n,k}$ le G-module k^n est simple (exercice !).

***Remarque 9.15*.** — Pour démontrer le th. de Lie-Kolchin (qui est antérieur à Borel), on peut se passer du th. du point fixe de Borel. Mais ce dernier sera utilisé plus bas pour démontrer un théorème très important.

---

[4] Si $V = k^n$, on trouve selon les auteurs, les notations conflictuelles $\mathrm{Gr}_{d,n}$ (pour dire d-plans dans k^n) ou $\mathrm{Gr}_{d,n-d}$ (pour dire d-plans E avec le quotient V/E de dimension $n-d$), donc attention !!

[5] $\mathcal{F}\ell$ comme l'anglais « Flag ».

Lemme 9.16. — (i) *Si G est un groupe résoluble, il en est de même pour tout sous-groupe fermé* (*et pour tout quotient G/H si H est un sous-groupe fermé distingué*).

(ii) *Soit $B = B_n$ (resp. $U = U_n$) le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_{n,k}$ *formé des matrices triangulaires supérieures (resp. et avec des* 1 *sur la diagonale) est résoluble connexe. De plus, U est un groupe* unipotent (*voir définition dans la section* 7).

Démonstration. — (i) Soit $G = G_0 \supset \cdots \supset G_{r+1} = \{e\}$ une suite comme dans la définition 9.3 et soit H un sous-groupe fermé de G. Alors $H_i = H \cap G_i$ est un sous-groupe fermé de H, distingué dans H_{i-1}, et H_{i-1}/H_i est isomorphe à un sous-groupe de G_{i-1}/G_i donc est commutatif. Ceci prouve que H est résoluble.

Si H est distingué dans G, notons π la projection $G \to G/H = \overline{G}$. Alors $\overline{G}_i = \pi(G_i)$ est un sous-groupe fermé de $\overline{G}$, distingué dans $\overline{G}_{i-1}$. Le morphisme de groupes

$$G_{i-1}(k) \to \overline{G}_{i-1}(k) \to (\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i)(k)$$

est surjectif et contient $G_i(k)$ dans son noyau, donc $(\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i)(k)$ est commutatif et donc $\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i$ est commutatif (car les deux morphismes envoyant (g,h) sur gh resp. hg coïncident sur les k-points donc sont égaux).

(ii) Remarquons d'abord que, comme variétés, U est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^{n(n-1)/2}$ et B à $(\mathbb{G}_{m,k})^n \times U$. Donc U et B sont des groupes algébriques connexes.

Pour tout $b, b' \in B(k)$, chaque terme diagonal de bb' (resp. $b'b$) est le produit des termes diagonaux correspondants de b et b', dont le commutateur $bb'b^{-1}b'^{-1}$ appartient à $U(k)$. Ceci montre que U est distingué et que le quotient B/U est commutatif. On voit par ailleurs que ce quotient est isomorphe au tore $(\mathbb{G}_{m,k})^n$.

D'autre part, posons $U_0 = U$ et pour $d = 1, \ldots, n-1$ notons U_d le sous-groupe fermé de U formé des éléments ayant d diagonales de 0 au-dessous de la diagonale, i.e. défini dans U par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i + 1 \leq j \leq i + d$. Alors on a

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_{n-2} \supset U_{n-1} = \{e\}$$

et on vérifie que chaque U_d est distingué dans U et que de plus chaque quotient U_{d-1}/U_d est *central* dans U/U_d (i.e. pour tout $u \in U(k)$ et $u' \in U_{d-1}(k)$, le commutateur $uu'u^{-1}u'^{-1}$ appartient à U_d).

Ceci est une propriété plus forte que d'être résoluble. En tout cas, ceci prouve déjà que U et B sont résolubles.

Remarquons de plus que pour tout $d = 1, \ldots, n-1$, le morphisme

$$U_{d-1} \to (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$$

qui à tout $u \in U_{d-1}$ associe les coefficients de sa première diagonale non nulle (i.e. la d-ième diagonale au-dessus de la diagonale principale), est un morphisme de groupes, qui induit un isomorphisme $U_{d-1}/U_d \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$.[6] □

***Définition 9.17* (Sous-groupes de Borel).** — Soit G un k-groupe algébrique. On appelle *sous-groupe de Borel* de G tout sous-groupe fermé connexe résoluble B qui est maximal pour ces propriétés, i.e. si $B \subset B'$ pour un sous-groupe fermé connexe résoluble B', alors $B = B'$.

Remarquons que B, étant connexe, est contenu dans la composante neutre G^0 de G et en est un sous-groupe de Borel. Donc dans la définition ci-dessus, on peut sans perte de généralité remplacer G par sa composante neutre, i.e. supposer G connexe.

[6] Ceci entraîne que pour tout sous-schéma en groupes $H \neq \{e\}$ de U, il existe un morphisme non trivial de k-schémas en groupes $H \to \mathbb{G}_{a,k}$. Ceci sera utilisé dans le lemme **??** ; voir aussi la section 7.

Théorème 9.18 **(Conjugaison des sous-groupes de Borel)**
Soit G un k-groupe algébrique connexe.

(i) *Tous les sous-groupes de Borel de G sont conjugués sous l'action par conjugaison de $G(k)$.* (*En particulier ils sont tous isomorphes, donc de même dimension.*)

(ii) *Si B est un sous-groupe de Borel de G, la variété G/B est projective.*

Démonstration. — Soit S un sous-groupe de Borel de G de *dimension maximale* d (un tel sous-groupe existe car tous les sous-groupes fermés de G sont de dimension $\leq \dim(G)$).

D'après la proposition 3.2, il existe un G-module V et une droite D de V telle que le stabilisateur G_D égale S. De plus, quitte à remplacer V par un certain $V \oplus E$, on peut supposer que V est un G-module fidèle, ce qui nous permet de considérer G comme un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$.

Comme S stabilise D, alors l'espace vectoriel quotient V/D est un S-module, et d'après le théorème de Lie-Kolchin il existe donc un drapeau F_0 :

$$D = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V$$

de V stable par S. Notons provisoirement G_{F_0} le stabilisateur dans G de ce drapeau ; les inclusions

$$S \subset G_{F_0} \subset G_D = S$$

montrent alors que $G_{F_0} = S$. Donc la variété quotient G/S est isomorphe à l'orbite $\mathscr{O}_0$ de F_0 dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(V)$ de V, et cette orbite est irréductible car G est connexe (donc irréductible). Montrons que cette orbite est **fermée**, donc projective.

Soit F un drapeau arbitraire

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1}$$

de V et G_F son stabilisateur dans G. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V adaptée au drapeau F, i.e. pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $(e_1, \dots, e_i)$ est une base de W_i. Alors, identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base, on voit que le sous-groupe fermé $G_F(k)$ est contenu dans le sous-groupe des matrices trianglaires supérieures (car il stabilise le drapeau F !), donc il est résoluble, ainsi que sa composante connexe $G_F^0(k)$. Comme S est un sous-groupe résoluble connexe de dimension maximale, on a donc, en utilisant les points (iv–vi) de la proposition **??** :

$$\dim(G_F) = \dim(G_F(k)) = \dim(G_F^0(k)) \leq \dim(S)$$

et donc l'orbite de F, isomorphe à G/G_F donc de dimension $\dim(G) - \dim(G_F)$, est de dimension $\geq \dim(G) - \dim(S) = \dim(\mathscr{O}_0)$. Ceci montre que $\mathscr{O}_0$ est une orbite de G dans $\mathcal{F}\ell(V)$ de dimension *minimale* et ceci entraîne qu'elle est fermée. En effet, son adhérence $\overline{\mathscr{O}}_0$ est irréductible et de même dimension d que $\mathscr{O}_0$, donc le fermé G-stable $Z = \overline{\mathscr{O}}_0 - \mathscr{O}_0$ est de dimension $< d$ (avec la convention que $\dim(\varnothing) = -1$), et s'il était non vide, il contiendrait une G-orbite de dimension $< d$, contradiction.

Ceci montre que $\mathscr{O}_0$ est fermée ; c'est donc une variété projective, isomorphe à G/S.

Notons que G agit à gauche sur G/S. De plus, $(G/S)(k) = G(k)/S(k)$ et pour tout $g \in G(k)$, le stabilisateur dans $G(k)$ du point $gS(k)$ est le conjugué $gS(k)g^{-1}$.

Soit maintenant B un sous-groupe de Borel arbitraire de G. Il agit à gauche sur la variété projective G/S et d'après le théorème du point fixe de Borel, il existe $g \in G(k)$ tel que le point $gS(k)$ de $(G/S)(k)$ soit fixé par $B(k)$; on a donc $B(k) \subset gS(k)g^{-1}$ d'où $B \subset gSg^{-1}$.

Or gSg^{-1} est, comme S, un sous-groupe fermé connexe résoluble, et comme B est un sous-groupe de Borel, l'inclusion plus haut entraîne que $B = gSg^{-1}$. Ceci montre que tous les sous-groupes de Borel sont conjugués à S, ce qui prouve déjà (i).

De plus, $B = gSg^{-1}$ est alors le stabilisateur du drapeau $F = gF_0$, qui appartient à $\mathscr{O}_0$, et l'on a donc un isomorphisme

$$G/B \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_F = \mathscr{O}_0.$$

Donc G/B est une variété projective, isomorphe à G/S. □

Le point (ii) du théorème admet la réciproque suivante, qui permet de caractériser les sous-groupes de Borel.

Proposition 9.19. — *Soient G un k-groupe algébrique, S un sous-groupe fermé résoluble connexe. Si la variété G/S est projective, alors S est un sous-groupe de Borel de G.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. Il agit sur la variété projective G/S donc il existe un point de $(G/S)(k) = G(k)/S(k)$ fixé par $B(k)$. Il existe donc $g \in G(k)$ tel que $g^{-1}B(k)g \subset S(k)$, d'où $g^{-1}Bg \subset S$. Mais comme $g^{-1}Bg$ est un Borel et que S est résoluble connexe, ceci entraîne que $g^{-1}Bg = S$, donc S est un Borel. □

Exemple 9.20. — Soit $G = \mathrm{GL}_{n,k}$. Alors le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures est fermé, résoluble et connexe, et le quotient G/B est la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(k^n)$ qui est projective. Donc B est un sous-groupe de Borel.

En raison de cet exemple, si G est un k-groupe algébrique connexe et B un sous-groupe de Borel de G, on dit que G/B est « la variété des drapeaux de G ».

10. Décomposition de Jordan-Chevalley

***Rappel 10.1* (Décomposition de Jordan)**. — Soit V un k-ev de dimension finie. Comme k est algébriquement clos, on a ce qui suit.

(i) Tout k-endomorphisme u de V s'écrit de façon unique

$$u = u_s + u_n$$

où u_s et u_n **commutent** et u_s est *semi-simple* (i.e. diagonalisable) et u_n nilpotent. On dit que ceci est la décomposition de Jordan (additive) de u et u_s (resp. u_n) s'appelle la partie semi-simple (resp. nilpotente) de u. De plus, on montre que u_s et u_n sont des polynômes en u, donc si un sev E de V est stable par u il l'est aussi par u_s et u_n.

On dit que u est semi-simple (resp. nilpotent) si $u = u_s$ (resp. $u = u_n$). L'unique élément à la fois semi-simple et nilpotent est 0.

(ii) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. On dit que g est *unipotent* si sa seule valeur propre est 1, i.e. si $g - \mathrm{id}_V$ est nilpotent.

(iii) Tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ s'écrit de façon unique

$$g = g_s g_u$$

avec $g_s, g_u \in \mathrm{GL}(V)$ qui **commutent**, g_s semi-simple et g_u unipotent.(7) On dit que ceci est la décomposition de Jordan (multiplicative) de g et g_s (resp. g_u) s'appelle la partie semi-simple (resp. unipotente) de g. De plus, on montre que si un sev E de V est stable par g il l'est aussi par g_s et g_u.

On dit que g est semi-simple (resp. unipotent) si $g = g_s$ (resp. $g = g_u$). L'unique élément à la fois semi-simple et unipotent est l'élément neutre id_V.

Théorème 10.2. — *Soit G un k-groupe algébrique.*

(7) g_s est comme plus haut et $g_u = g_s^{-1}g = \mathrm{id}_V + g_s^{-1}g_n$.

(i) *Tout* $g \in G(k)$ *s'écrit de façon unique* $g = g_s g_u$*, avec* $g_s, g_u \in G(k)$ *qui* **commutent***, et* g_s « semi-simple » *et* g_u « unipotent » *: ceci signifie que pour tout morphisme de groupes algébriques* ρ *de* G *dans un* $\mathrm{GL}(V)$*,* $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ *est la décomposition de Jordan de* $\rho(g)$*.*

(ii) *On dit que* $g = g_s g_u$ *est la décomposition de Jordan de* g *et que* g_s *(resp.* g_u*) est la partie semi-simple (resp. unipotente) de* g*. On dit que* g *est semi-simple (resp. unipotent) si* $g = g_s$ *(resp.* $g = g_u$*). L'unique élément à la fois semi-simple et unipotent est l'élément neutre* e *de* $G(k)$*.*

(iii) *La décompostion de Jordan est préservée par tout morphisme de groupes algébriques* $\rho : G \to H$*, i.e. pour tout* $g \in G(k)$*,* $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ *est la décomposition de Jordan de* $\rho(g)$ *dans* $H(k)$*.*

Démonstration. — Voir [Po, §7] ou [Wa, §9] ou les livres de Springer, Borel ou Humphreys. □

Proposition 10.3. — *Soit* G *un* k*-groupe algébrique résoluble connexe. L'ensemble* G_u *des éléments unipotents de* $G(k)$ *est un sous-groupe fermé distingué de* G*.*

Démonstration. — D'après le th. de Lie-Kolchin, G est un sous-groupe fermé d'un certain groupe $B = B_n$ de matrices triangulaires supérieures. Notons U le sous-groupe de B formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Alors G_u égale $G \cap U$ donc est un sous-groupe fermé distingué de G, puisque U est fermé et distingué dans B. □

On démontrera dans le chapitre suivant que si G est un k-groupe algébrique résoluble connexe, alors G est le produit semi-direct de G_u et d'un tore T, et que deux tels tores sont conjugués par un élément de $G(k)$. Pour le moment, démontrons déjà le *cas particulier* ci-dessous.

Proposition 10.4. — *Soit* G *un* k*-groupe algébrique résoluble connexe.* On suppose que tout élément semi-simple de $G(k)$ est **central**. *Alors :*

(i) *Les éléments semi-simples de* $G(k)$ *forment un sous-groupe fermé* G_s*, qui est un* k*-groupe algébrique diagonalisable.*

(ii) *Le morphisme de multiplication* $G_s \times G_u \to G$ *est un isomorphisme.*

(iii) *Par conséquent,* G_s *est connexe donc c'est un tore.*

(iv) *Comme* $G_s(k)$ *contient tous les élements semi-simples de* $G(k)$*,* G_s *est évidemment l'unique tore maximal de* G*.*

Démonstration. — (i) Soit V un G-module fidèle, on peut considérer G comme un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$. Notons $G_s(k)$ l'ensemble des éléments semi-simples de $G(k)$. Comme ils sont centraux, donc commutent entre eux, il existe une base de V formée de vecteurs propres communs. Alors, identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base et notant T le tore des matrices diagonales, on voit que $G_s(k)$ est contenu dans $G(k) \cap T(k)$ et lui est en fait égal, car tout élément $G(k) \cap T(k)$ est un élément semi-simple de $G(k)$ donc appartient à $G_s(k)$.

Donc $G_s = G \cap T$ est un sous-groupe fermé de G, et comme c'est un sous-groupe fermé de T il est diagonalisable.

(ii) Comme G_s est central, le morphisme de variétés de $H = G_s \times G_u$ vers G, qui envoie (g_s, g_u) sur $g_s g_u$ est un morphisme de groupes algébriques, donc induit un isomorphisme de $H/\operatorname{Ker}(\phi)$ (où $\operatorname{Ker}(\phi)$ est pris au sens des schémas !) sur un sous-groupe fermé G' de

G. Or par décomposition de Jordan, ϕ est surjectif sur les k-points, donc $G' = G$. Il reste donc à montrer que $K = \mathrm{Ker}(\phi)$ égale $\{e\}$.[8]

Or, K est isomorphe à $G_s \cap G_u$ donc c'est un sous-k-schéma en groupes fermé de G_s et de G_u, donc c'est un k-schéma en groupes qui est à la fois diagonalisable et unipotent. Or d'après le lemme **??**, ceci entraîne que $K = \{e\}$.

On a donc un isomorphisme $G_s \times G_u \xrightarrow{\sim} G$. Comme G est connexe et que la projection $G \to G_s$ est surjective, il en résulte que G_s est un k-groupe algébrique diagonalisable connexe. D'après la classification des k-groupes diagonalisables (oubliée dans la section 6, mais voir 6.12 plus bas), G_s est donc un tore. La proposition est démontrée. □

---

[8]Au sens des schémas, i.e. il ne suffit pas de dire que $K(k) = \{e\}$, ce qui découle de la décomposition de Jordan dans $G(k)$.