Chapitre 5 : Groupes réductifs, systèmes de racines et données radicielles

Références pour ce chapitre :

[Bo] Armand Borel, Linear algebraic groups (2nd enlarged edition), Springer-Verlag, 1991.

[Hu] James E. Humphreys, Linear algebraic groups (corrected 2nd printing), Springer-Verlag, 1981.

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§§ 17 & 20-23)

[Sp] Tonny A. Springer, Linear algebraic groups (2nd edition), Birkhäuser, 1998.

13. Groupes réductifs ou semi-simples

Soit k un corps algébriquement clos, G un k-groupe algébrique connexe, $\mathscr{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G. Si H est un k-groupe algébrique résoluble connexe, on rappelle que les éléments unipotents de $H(k)$ forment un sous-groupe fermé connexe distingué de H, noté H_u.

Définitions 13.1. — (1) L'intersection des $B(k)$, pour B décrivant $\mathscr{B}$, est un sous-groupe fermé lisse résoluble $\mathscr{R}$ de G, *caractéristique* (i.e. invariant par tout automorphisme de G), et il en est de même de sa composante neutre $\mathscr{R}^0$, qu'on note $R(G)$ et qu'on appelle le *radical* de G. On a donc $R(G) = \left(\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B\right)^0$. On le notera aussi $\mathrm{rad}(G)$. (1)

C'est *le plus grand sous-groupe fermé lisse résoluble connexe distingué* de G. En effet, soit S ayant ces propriétés ; comme S est résoluble connexe, il est contenu dans un Borel B, et comme S est distingué, alors $S = gSg^{-1}$ est contenu dans gBg^{-1} pour tout $g \in G(k)$, donc $S \subset \mathscr{R}$, et comme S est connexe, on a $S \subset R(G)$.

(2) De même, l'intersection des $B_u(k)$, pour B décrivant $\mathscr{B}$, est un sous-groupe fermé lisse unipotent $\mathscr{U}$ de G, *caractéristique*, et il en est de même de sa composante neutre $\mathscr{U}^0$, qu'on note $R_u(G)$ et qu'on appelle le *radical unipotent* de G. On a donc $R_u(G) = \left(\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B_u\right)^0$.

C'est *le plus grand sous-groupe fermé lisse unipotent connexe distingué* de G. En effet, soit S ayant ces propriétés ; comme S est connexe unipotent (en particulier, résoluble), il est contenu dans un Borel B et donc dans B_u, et comme S est distingué, alors $S = gSg^{-1}$ est contenu dans gB_ug^{-1} pour tout $g \in G(k)$, donc $S \subset \mathscr{U}$, et comme S est connexe, on a $S \subset R_u(G)$. (Cet argument montre aussi que l'inclusion $R_u(G) \subset R(G)_u$ est une égalité.)

(3) G est dit **semi-simple** (resp. **réductif**) si $R(G) = \{e\}$ (resp. si $R_u(G) = \{e\}$). On a donc : « semi-simple $\Rightarrow$ réductif ». La réciproque est évidemment fausse, car tout tore $T \neq \{e\}$ est un groupe réductif qui n'est pas semi-simple.

(4) Soit H un k-groupe algébrique *résoluble connexe*. Alors il résulte de la définition que $R_u(H) = H_u$. D'autre part, on a vu que $H \simeq H_u \rtimes T$, où T est un tore maximal. Il en résulte que si : *si H est connexe, résoluble et réductif, alors c'est un tore.*

Notation. — Comme $N_G(B) = B$ pour tout Borel de G, alors pour tout sous-groupe fermé S de G, la variété des points fixes $\mathscr{B}^S$ est formée des sous-groupes de Borel qui contiennent S.

Définition 13.2. — Soit T un tore maximal de G.

(1) Pour éviter une confusion avec le système de racines R d'un groupe réductif.

(i) On note $I(T) = \left(\bigcap_{B\in\mathscr{B}^T} B\right)^0$. C'est un groupe résoluble connexe contenant T comme tore maximal, donc on a $I(T) \simeq I(T)_u \rtimes T$.

(ii) D'après le th. 12.11, on a $C_G(T) \subset I(T)$.

Le théorème fondamental suivant est dû à Chevalley (en 1956) mais, pour le distinguer des nombreux autres théorèmes de Chevalley, et comme Luna en a donné un démonstration plus courte (et plus conceptuelle) en 1999, nous l'appellerons « th. de Chevalley-Luna ».

Théorème 13.3. — *Si G est réductif alors $I(T)_u = \{e\}$ et donc $C_G(T) = T$.*

Démonstration. — Voir [Po, §17] ou l'article de Luna, cité dans *loc. cit.* □

Corollaire 13.4. — *Soit S un tore contenu dans T. Alors $C_G(S)$ est réductif.*

Démonstration. — D'après le th. 12.7, $C_G(S)$ est connexe et contenu dans tout Borel de G contenant S. Comme $\mathscr{B}^S \supset \mathscr{B}^T$ (i.e. tout Borel contenant T contient S) on a donc :

$$R_u(C_S(G)) \subset \Big(\bigcap_{B\in\mathscr{B}^S} B_u\Big)^0 \subset \Big(\bigcap_{B\in\mathscr{B}^T} B_u\Big)^0 \subset I(T)_u$$

et comme $I(T)_u = \{e\}$ ceci montre que $C_G(S)$ est réductif. □

Considérons l'action adjointe de T sur $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Comme T est diagonalisable, on a

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\chi\in X(T)} \mathfrak{g}_\chi$$

où $\mathfrak{g}_\chi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T(k), \quad t\cdot X = \chi(t)X\}$. Comme $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$, l'ensemble

$$R = R(G,T) = \{\alpha \in X(T) - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

est *fini.* (2) D'autre part, pour $\chi = 0$ on a, en combinant 11.13 (v) et 13.3 :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^T = \mathrm{Lie}(G)^T = \mathrm{Lie}(C_G(T)) = \mathrm{Lie}(T).$$

On posera $\mathrm{Lie}(T) = \mathfrak{h}$. (3) On peut donc écrire :

$$(*) \qquad \boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \textstyle\bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha}$$

On veut maintenant montrer que R est un « système de racines » (voir plus bas) et que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in R$. Pour cela, fixons $\alpha \in R$. C'est un caractère $T \to \mathbb{G}_m$ non trivial donc $S_\alpha = (\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$ est un sous-tore de T de dimension $n-1$, où $n = \dim(T)$. Posons $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$.

Proposition 13.5. — *On a :* (4)

$$(\star) \qquad \mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in R\\ S_\alpha\subset \mathrm{Ker}(\beta)}} \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta\in R\cap\mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}_\beta$$

En particulier, $\mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ *contient* $\mathfrak{g}_\alpha$ *donc* Z_α *n'est* pas résoluble.

(2) Anticipant sur ce qui va suivre, on l'appelle le « système de racines » de (G,T).
(3) C'est la notation introduite par Élie Cartan dans ses travaux sur les algèbres de Lie.
(4) Comme $X(T) \simeq \mathbb{Z}^n$, il se plonge dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et donc on peut considérer dans V l'intersection $R \cap \mathbb{Q}\alpha$.

Démonstration. — Comme $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$ on a $\mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{g}^{S_\alpha}$; c'est un sous-T-module de $\mathfrak{g}$ donc c'est la somme directe des $\mathfrak{g}_\chi$ qu'il contient. Il contient bien sûr $\mathfrak{h}$. D'autre part, pour tout $\beta \in R$, $X \in \mathfrak{g}_\beta$ et $t \in S_\alpha(k)$, on a $t \cdot X = \beta(t)X$, donc $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ ssi $S_\alpha \subset \mathrm{Ker}(\beta)$. Ceci prouve la 1ère égalité.

Prouvons la seconde. La suite exacte $1 \to S_\alpha \to T \to \overline{T} \to 1$, où $\overline{T} = T/S_\alpha$, induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\overline{T}) \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\pi} X(S_\alpha) \longrightarrow 0$$

et comme $X(T) \simeq \mathbb{Z}^n$ et $X(S_\alpha) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ (car ce sont des tores de dimension n et $n-1$) alors $X(\overline{T}) = \mathbb{Z}\delta$ pour un certain δ (unique à ± 1 près) et de plus cette suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules est scindée, i.e. on a :

$$X(T) = \mathbb{Z}\delta \oplus \mathrm{Ker}(\pi) \simeq \mathbb{Z}\delta \oplus X(\overline{T})$$

et donc δ fait partie d'une base $(\delta, e_2, \dots, e_n)$ du $\mathbb{Z}$-module libre $X(T)$. En se plaçant dans l'espace vectoriel $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on voit alors que $X(T) \cap \mathbb{Q}\delta = \mathbb{Z}\delta$ et donc $R \cap \mathbb{Q}\delta = R \cap \mathbb{Z}\delta$.

D'autre part, pour tout $\beta \in R$, on a :

$$\mathrm{Ker}(\beta) \supset S_\alpha \iff \pi(\beta) = 0 \iff \beta \in R \cap \mathbb{Z}\delta.$$

Or $\mathrm{Ker}(\alpha) \supset S_\alpha$ donc $\alpha = q\delta$ pour un certain entier $q \neq 0$ (car $\alpha \neq 0$). On a donc dans V l'égalité $\mathbb{Q}\alpha = \mathbb{Q}\delta$, d'où

$$R \cap \mathbb{Z}\delta = R \cap \mathbb{Q}\delta = R \cap \mathbb{Q}\alpha$$

ce qui prouve la 2ème égalité. (Comme on ne sait pas si $\alpha = \pm\delta$, noter que $\mathbb{Q}\alpha \cap X(T) = \mathbb{Z}\delta$ est a priori plus grand que $\mathbb{Z}\alpha$.)

En particulier, $\mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ contient $\mathfrak{g}_\alpha$. Ceci entraîne que Z_α n'est *pas résoluble*. En effet, sinon Z_α serait connexe, réductif et résoluble, donc un tore (cf. 13.1 (4)), donc égal au tore maximal T et l'on aurait $\mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{h}$! □

Terminologie 13.6. — Soit H un k-groupe algébrique connexe. La dimension d'un tore maximal de H (resp. d'un tore maximal de $H/R(H)$) s'appelle le *rang réductif* (resp. *rang semi-simple*) de H. On les notera rg-réd.(H) et rg-ss.(H).

Remarques 13.7. — (1) Supposons H de rang réductif 0 et soit B un sous-groupe de Borel de H. Alors $B = B_u$ donc B est nilpotent. D'après un résultat déjà utilisé, ceci entraîne que $H = B$, donc H est nilpotent.

(2) Posons $\overline{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$. Considérant la suite exacte :

$$1 \longrightarrow S_\alpha \longrightarrow Z_\alpha \xrightarrow{\pi} \overline{Z}_\alpha \longrightarrow 1$$

on voit que $\overline{Z}_\alpha$ est connexe, non résoluble (car sinon Z_α le serait aussi), et que $\overline{T} = T/S_\alpha$ en est un tore maximal (car si $\overline{T}$ est contenu dans un tore T' alors $\pi^{-1}(T')$ est un groupe connexe, contenant T, commutatif et formé d'éléments semi-simples, donc un tore, donc égal à T). Comme $\dim(\overline{T}) = \dim(T) - \dim(S_\alpha) = 1$, on voit que $\overline{Z}_\alpha$ est justiciable du théorème suivant, que l'on admet :

Théorème 13.8. — *Soit H un k-groupe algébrique connexe, non résoluble, de rang réductif* 1. *Alors la variété des drapeaux de H est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$ et H est isomorphe soit à* $\mathrm{SL}_{2,k}$ *soit à* $\mathrm{PGL}_{2,k}$.

Démonstration. — Voir [Po, §20.1] ou [Bo, Hu, Sp]. □

Avant de pouvoir tirer bénéfice de ce théorème en étudiant la « donnée radicielle » de $\mathrm{SL}_{2,k}$ et de $\mathrm{PGL}_{2,k}$, on a besoin de la :

Définition 13.9. — Soit T un tore (de dimension n). On note $X_*(T)$ l'ensemble des *cocaractères* de T, i.e. morphismes de k-groupes algébriques $\mathbb{G}_{m,k} \to T$. C'est un groupe abélien : la somme $\mu + \nu$ est le morphisme $t \mapsto \mu(t)\nu(t)$ et donc $-\mu$ désigne le morphisme $t \mapsto \mu(t)^{-1}$. On dit que c'est le *groupe des cocaractères* de T.

Remarquons que l'ensemble des morphismes de k-groupes algébriques $\mathbb{G}_{m,k} \to \mathbb{G}_{m,k}$ s'identifie au groupe abélien $\mathbb{Z}$, en identifiant l'entier r au morphisme $z \mapsto z^r$.

On a donc un accouplement naturel $X(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$ qui à tout couple (χ, μ) associe l'entier r, noté $\langle \chi, \mu \rangle$, tel que le morphisme composé $\chi \circ \mu : \mathbb{G}_{m,k} \to \mathbb{G}_{m,k}$ soit $z \mapsto z^r$.

Proposition 13.10. — (i) *L'accouplement $X(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$ est bilinéaire et* parfait*, i.e. il identifie $X(T)$ au $\mathbb{Z}$-dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(T), \mathbb{Z})$ de $X_*(T)$ et vice-versa.*

(ii) *D'autre part, $W = W(G, T)$ agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$, et l'accouplement est W-invariant, i.e. pour tout $\chi \in X(T)$, $\mu \in X_*(T)$ et $w \in W$, on a $\boxed{\langle w\chi, w\mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle}$ ce qui équivaut à $\boxed{\langle w\chi, \mu \rangle = \langle \chi, w^{-1}\mu \rangle.}$*

Démonstration. — Choisissons un isomorphisme $T \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^n$. Alors $X(T)$ s'identifie à $\mathbb{Z}^n$ en notant $\chi_{(a_1,\dots,a_n)}$ le caractère $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$.

D'autre part, $X_*(T)$ s'identifie à $\mathbb{Z}^n$ en notant $\mu_{(b_1,\dots,b_n)}$ le cocaractère $z \mapsto (z^{b_1}, \dots, z^{b_n})$. On voit alors que

$$\langle \chi_{(a_1,\dots,a_n)}, \mu_{(b_1,\dots,b_n)} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i.$$

Ceci prouve (i).

D'autre part, le groupe Γ des automorphismes de T (isomorphe à $\mathrm{Aut}(X(T))$) agit à gauche sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ par $\sigma \cdot \mu = \sigma \circ \mu$, resp. $\sigma \cdot \chi = \chi \circ \sigma^{-1}$, et l'on a donc

$$\langle \sigma \cdot \chi, \sigma \cdot \mu \rangle = \chi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \mu = \chi \circ \mu = \langle \chi, \mu \rangle.$$

Enfin, le morphisme de groupes $N_G(T) \to \Gamma$ a pour noyau $C_G(T) = T$, donc $W = W(G, T)$ s'identifie à un sous-groupe de Γ. La proposition est démontrée. $\square$

***13.11* (Le cas de SL_2).** — Soit $G = \mathrm{SL}_{2,k} = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = k[a, b, c, d]/(ad - bc - 1)$ donc

$$\mathrm{SL}_2(k) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}$$

et donc, posant $k[\epsilon] = k[T]/(T^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon a & \epsilon c \\ \epsilon b & 1 + \epsilon d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k[\epsilon]) \;\middle|\; 1 = 1 + \epsilon(a + d) \right\} \\ &\simeq \left\{ X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(k) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(X) = 0 \right\} = \mathfrak{sl}_2. \end{aligned}$$

D'autre part, les matrices diagonales de $\mathrm{SL}_{2,k}$ forment un tore T de dimension 1 et l'on a $X_*(T) = \mathbb{Z}\mu_0$ où μ_0 est l'isomorphisme $\mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{\sim} T$ donné par

$$\mu_0(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

et $X(T) \simeq \mathbb{Z}\omega$ où $\omega : T \to \mathbb{G}_{m,k}$ est le caractère donné par $\omega(\mu_0(z)) = z$. (On a donc $\langle \omega, \mu_0 \rangle = 1$.) Posons $\alpha = 2\omega$, i.e. $\alpha(\mu_0(z)) = z^2$. On vérifie que le sous-groupe fermé U

(resp. U') de $\mathrm{SL}_{2,k}$ défini par les équations $a = d = 1$ et $b = 0$ (resp. $a = d = 1$ et $c = 0$), i.e. pour toute k-algèbre Λ,

$$U(\Lambda) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Lambda) \right\} \qquad U'(\Lambda) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Lambda) \right\}$$

est isomorphe à $\mathbb{G}_a$, normalisé par T, et a pour algèbre de Lie : $\mathrm{Lie}(U) = kE_{12}$, resp. $\mathrm{Lie}(U') = kE_{21}$, où E_{ij} désigne la matrice élémentaire ayant des 0 partout sauf un 1 à la place (i, j). On vérifie de plus que pour tout $t \in T(k)$, on a $t \cdot E_{12} = \alpha(t)E_{12}$ et $t \cdot E_{21} = \alpha(t)^{-1}E_{21}$. Donc, posant $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T) = k(E_{11} - E_{22})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

On pose $U_\alpha = U$ et $U_{-\alpha} = U'$, de sorte qu'on a $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} = \mathrm{Lie}(U_{\pm\alpha})$.

Par ailleurs, $\mathrm{Aut}_{k\text{-gr. alg}}(T) \simeq \mathrm{Aut}_{\text{gr.}}(X(T)) \simeq \{\pm 1\}$, et $W = W(G, T)$ s'injecte dans ce groupe. Or l'élément

$$n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

normalise T : on a $n \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} n^{-1} = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ donc $W \neq \{e\}$ et l'élément non trivial de W, qu'on notera s, agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ par $s(\mu) = -\mu$ et $s(\chi) = -\chi$. Posons $\alpha^\vee = \mu_0$, c'est l'unique élément de $X_*(T) \simeq \mathbb{Z}$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; on l'appelle la *coracine* associée à α. Remarquons que la coracine associée à $-\alpha$ est $-\alpha^\vee$. Alors, pour tout $\mu \in X_*(T)$ et $\chi \in X(T)$, on a :

$$2\mu = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee \qquad \text{et} \qquad 2\chi = \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

et donc :

$$s(\mu) = \mu - 2\mu = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee \qquad \text{et} \qquad s(\chi) = \chi - 2\chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Et ici, $\alpha^\vee = \mu_0$ engendre $X_*(T)$ tandis que α égale 2 fois le générateur ω de $X(T)$.

***13.12* (Le cas de** PGL_2). — Posons $\overline{G} = \mathrm{PGL}_{2,k} = \mathrm{SL}_{2,k}/\mu_{2,k}$ et notons $\overline{T}$ l'image de T dans $\overline{G}$. C'est un tore maximal de $\overline{G}$ et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mu_{2,k} \longrightarrow T \xrightarrow{\pi} \overline{T} \longrightarrow 1$$

donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\overline{T}) \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donc $X(\overline{T})$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $X(T) = \mathbb{Z}\omega$; c'est donc le sous-groupe $\mathbb{Z}\alpha$.

Posons $\mathfrak{g}' = \mathfrak{pgl}_2 = \mathrm{Lie}(\overline{G})$ et $\mathfrak{h}' = \mathrm{Lie}(\overline{T})$. (5) Comme chaque $U_{\pm\alpha}$ est unipotent, son intersection avec $\mu_{2,k}$ est triviale, donc la projection $\pi : G \to \overline{G}$ induit un isomorphisme de chaque $U_{\pm\alpha}$ sur son image, notée $\overline{U}_{\pm\alpha}$. De plus, comme $\mu_{2,k}$ agit trivialement sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ (car contenu dans le noyau de $\pm\alpha$), l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ se factorise en une action de $\overline{G}$, et l'on voit donc que $\overline{T}$ agit sur chaque $\mathrm{Lie}(\overline{U}_{\pm\alpha})$ par le caractère $\pm\alpha$.

Donc $\mathfrak{g}'$ contient les espaces de poids $\mathfrak{g}'_{\pm\alpha}$ et $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{h}'$ (qui sont en somme directe) et comme $\dim \mathfrak{g}' = 3$ car $\overline{G}$ est lisse de dimension 3, on en déduit que

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}'_\alpha \oplus \mathfrak{g}'_{-\alpha}.$$

D'autre part, l'élément n de $G(k)$ agit non trivialement (via son image dans $\overline{G}(k)$) sur $\overline{T}$ et donc $W = W(\overline{G}, \overline{T})$ est non trivial et son élément non trivial, noté encore s, agit par $-\mathrm{id}$ sur $X(\overline{T})$ et sur $X_*(\overline{T})$.

(5) On note $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ plutôt que $\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{h}}$ car si $\mathrm{car}(k) = 2$ les projections $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ne sont *pas surjectives*.

Enfin, reprenant le μ_0 de $\mathrm{SL}_{2,k}$, on a $\pi\circ\mu_0 \in X_*(\overline{T})$ et comme $\langle\alpha,\pi\circ\mu_0\rangle = 2$ et que le couplage $X(\overline{T})\times X_*(\overline{T})\to\mathbb{Z}$ est parfait, alors $\pi\circ\mu_0$ est égal à 2 fois un générateur μ_0' de $X_*(\overline{T})$. On pose $\alpha^\vee = \pi\circ\mu_0$, c'est l'unique élément de $X_*(\overline{T})\simeq\mathbb{Z}$ tel que $\langle\alpha,\alpha^\vee\rangle = 2$; on l'appelle la *coracine* associée à α. Remarquons que la coracine associée à $-\alpha$ est $-\alpha^\vee$.

On a alors, pour tout $\mu\in X_*(\overline{T})$ et $\chi\in X(\overline{T})$,

$$\mu = \langle\alpha,\mu\rangle\mu_0' \qquad \text{et donc} \qquad 2\mu = \langle\alpha,\mu\rangle\alpha^\vee$$

et

$$\chi = \langle\chi,\mu_0'\rangle\alpha \qquad \text{et donc} \qquad 2\chi = \langle\chi,\alpha^\vee\rangle\alpha$$

d'où :

$$s(\mu) = \mu - 2\mu = \mu - \langle\alpha,\mu\rangle\alpha^\vee \qquad \text{et} \qquad s(\chi) = \chi - 2\chi = \chi - \langle\chi,\alpha^\vee\rangle\alpha.$$

Mais ici, c'est α qui engendre $X(\overline{T})$ tandis que $\alpha^\vee$ égale 2 fois le générateur μ_0' de $X_*(\overline{T})$.

On va obtenir un certain nombre de conséquences en comparant 13.5 ($\star$) aux résultats de 13.11 et 13.12. « Rappelons » d'abord le lemme suivant (utilisé sans commentaire dans la démonstration de 12.2).

Lemme 13.13. — *Soient G un k-groupe algébrique, H un sous-groupe fermé (i.e. un sous-schéma en groupes fermé* réduit*) de G, distingué. Alors la suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Lie}(G/H) \longrightarrow 0$$

est exacte, donc $\mathrm{Lie}(G/H)$ *s'identifie à* $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. — Par hypothèse G est lisse, donc le quotient G/H l'est aussi. Donc

$$\dim\mathrm{Lie}(G/H) = \dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H) = \dim\mathrm{Lie}(G) - \dim(H).$$

De plus, comme H est réduit et $k=\overline{k}$, alors H est lisse, donc $\dim(H) = \dim\mathrm{Lie}(H)$. D'autre part, on sait que $\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Ker}(\pi)$, donc pour une raison de dimension π est surjective. □

Appliquant ceci à $\overline{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$, et posant $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathrm{Lie}(S_\alpha)$, on obtient

$$\mathrm{Lie}(\overline{Z}_\alpha) = \mathrm{Lie}(Z_\alpha)/\mathrm{Lie}(S_\alpha) = \overline{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\beta\in R\cap\mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}_\beta,$$

où $\dim\overline{\mathfrak{h}} = 1$. De plus, S_α agit trivialement sur $\mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ donc les β ci-dessus se factorisent par le quotient $\overline{T} = T/S_\alpha$ donc appartiennent au sous-groupe $X(\overline{T})\subset X(T)$.

D'autre part, on a admis que $\overline{Z}_\alpha$ est isomorphe à $\mathrm{SL}_{2,k}$ ou bien à $\mathrm{PGL}_{2,k}$ et l'on a donc : $\mathrm{Lie}(\overline{Z}_\alpha) = \overline{\mathfrak{h}}\oplus\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\dim(\mathfrak{g}_{\pm\alpha}) = 1$.

Conséquences 13.14. — (1) Pour tout $\alpha\in R$, on a $-\alpha\in R$ et $\dim(\mathfrak{g}_{\pm\alpha}) = 1$.

(2) De plus, les seuls multiples rationnels de α qui appartiennent à R sont $\pm\alpha$, i.e. si $\beta\in R$ et $\beta = q\alpha$ avec $q\in\mathbb{Q}$, alors $q=\pm1$.

Remarque 13.15. — On a ainsi construit les « racines » $\pm\alpha\in X(T)$ en les faisant apparaître dans le sous-groupe $X(\overline{T})$ de $X(T)$, où $\overline{T} = T/S_\alpha$ est un *quotient* de T. On va construire les « coracines » $\alpha^\vee\in X_*(T)$ dans un certain *sous-tore* T_α de T. Introduisons pour cela la :

***Définition 13.16* (Groupe dérivé)**. — Soit G un k-groupe algébrique *connexe*.

(i) Le sous-groupe fermé engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, pour $g,h\in G(k)$ est appelé le *groupe dérivé* de G et noté $\mathscr{D}(G)$; c'est un sous-groupe *caractéristique*.

(ii) On peut de plus montrer, et nous l'admettrons, que $\mathscr{D}(G)$ est **connexe**.

Proposition 13.17. — *Soit G un k-groupe algébrique connexe* réductif. *Alors :*

(i) *Le radical* $\mathrm{rad}(G)$ *est un tore central S de G, qui est le plus grand tore central de G.*

(ii) $\mathscr{D}(G) \cap S$ *est un groupe diagonalisable fini, i.e. un produit fini de groupes $\mu_{r,k}$.*

(iii) $\mathscr{D}(G)$ *est semi-simple, et l'on a* $\text{rg-réd.}(\mathscr{D}(G)) \leq \text{rg-réd.}(G) - \dim(S)$.

Démonstration. — (i) $\mathrm{rad}(G)$ est résoluble et connexe et $\mathrm{rad}(G)_u = \{e\}$ puisque G est réductif, donc $\mathrm{rad}(G)$ est un tore S. Il est normalisé par G donc, par le th. de rigidité des tores (12.8), il est central dans G. C'est le plus grand, car tout tore central est, a fortiori, distingué donc contenu dans $\mathrm{rad}(G)$. Par ailleurs, S est contenu dans tout tore maximal T de G, car $S \subset C_G(T) = T$.

(ii) On peut considérer G comme sous-groupe fermé d'un certain $\mathrm{GL}(V)$. Sous l'action de S, V se décompose en somme directe

$$V = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_r}$$

pour certains $\chi_i \in X(S)$ et, S étant central dans G, chaque $V_i = V_{\chi_i}$ est un sous-G-module (pour $v \in V_i$, $g \in G(k)$ et $s \in S(k)$, on a $sgv = gsv = \chi_i(s)gv$). Donc on a :

$$G \subset \mathrm{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(V_r) \qquad \text{et} \qquad S \subset \mathbb{G}_{m,k} \times \cdots \times \mathbb{G}_{m,k},$$

où dans le dernier produit, chaque $\mathbb{G}_{m,k}$ désigne le groupe des homothéties de $\mathrm{GL}(V_i)$.

Or $\mathscr{D}(\mathrm{GL}(V_i)) \subset \mathrm{SL}(V_i)$ (et c'est en fait une égalité) donc on a

$$\mathscr{D}(G) \subset \mathrm{SL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{SL}(V_r) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}(G) \cap S \subset \mu_{d_1,k} \times \cdots \times \mu_{d_r,k},$$

où $d_i = \dim(V_i)$. Posant $M = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, on obtient donc que $\mathscr{D}(G) \cap S$ est un sous-groupe fermé de $D_k(M)$, donc isomorphe à $D_k(\overline{M})$ pour un certain quotient $\overline{M}$ de M. Ceci prouve (ii).

(iii) Soit $\mathscr{R}$ le radical de $\mathscr{D}(G)$. Comme $\mathscr{D}(G)$ est *caractéristique* dans G, il en est de même de $\mathscr{R}$, donc $\mathscr{R}$ est contenu dans $\mathrm{rad}(G) = S$, donc dans $S \cap \mathscr{D}(G)$. Comme $\mathscr{R}$ est lisse et connexe, ceci entraine que $\mathscr{R} = \{e\}$, donc $\mathscr{D}(G)$ est semi-simple.

Soit T' un tore maximal de $\mathscr{D}(G)$, contenu dans un tore maximal T de G. D'une part, $\overline{T} = T/S$ est un tore maximal de $\overline{G}$, donc

$$\text{rg-réd.}(G/S) = \dim(T) - \dim(S) = \text{rg-réd.}(G) - \dim(S).$$

D'autre part, l'image $\overline{T'}$ de T' dans $\overline{G}$ est de même dimension que T', puisque $T' \cap S$ est de dimension 0. On a donc

$$\text{rg-réd.}(\mathscr{D}(G)) = \dim(T') = \dim(\overline{T'}) \leq \text{rg-réd.}(G/S) = \text{rg-réd.}(G) - \dim(S).$$

Ceci prouve (iii). (6) □

Conséquences 13.18. — Revenons à notre groupe réductif $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$ et posons $G_\alpha = \mathscr{D}(Z_\alpha)$. Comme $\overline{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$ est de rang réductif 1, (7) alors G_α est de rang réductif ≤ 1, donc égal à 1 car G_α n'est pas nilpotent (car sinon Z_α serait résoluble).

Soit alors T_α un tore maximal (de dimension 1) de G_α contenu dans T (un tel tore existe, car les tores maximaux de G sont conjugués et $\mathscr{D}(G)$ est distingué dans G) ; notons $\overline{T_\alpha}$ son image dans $\overline{Z}_\alpha$. Comme $\overline{T} = T/S_\alpha$ est de dimension 1, on a $\overline{T_\alpha} = \overline{T}$ et donc $\pm\alpha \in X(\overline{T})$ sont des caractères de $\overline{T_\alpha}$ donc de T_α.

De plus, l'égalité $\overline{T_\alpha} = \overline{T}$ entraîne que le morphisme de groupes $T_\alpha \times S_\alpha \to T$, $(t, s) \mapsto ts$ est surjectif, donc T est engendré par T_α et S_α.

(6) On verra plus loin que cette inégalité est en fait une égalité.

(7) Ceci entraîne, au passage, que l'inclusion $S_\alpha \subset \mathrm{rad}(Z_\alpha)$ est une égalité.

D'autre part, G_α est connexe, non résoluble et de rang réductif 1, donc d'après le théorème 13.8, il est isomorphe à $\mathrm{SL}_{2,k}$ ou à $\mathrm{PGL}_{2,k}$. Il en résulte que

$$\mathrm{Lie}(G_\alpha) = \mathrm{Lie}(T_\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

et que G_α contient un sous-groupe U_α (resp. $U_{-\alpha}$) isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$, normalisé par T_α et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$).

De plus, d'après les résultats pour $\mathrm{SL}_{2,k}$ et $\mathrm{PGL}_{2,k}$, il existe un unique cocaractère $\alpha^\vee$ de T_α tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et un élément n de $G_\alpha(k)$ qui normalise T_α mais ne le centralise pas (donc qui induit sur T_α l'automorphisme non trivial $t \mapsto t^{-1}$). Comme T est engendré par T_α et le tore central S_α, on a donc $n \in N_G(T)(k)$. Notons s_α son image dans $W(G,T)$ et remarquons que l'action de s_α dans $X(T_\alpha)$ échange α et $-\alpha$.

Soit $\mu \in X_*(T)$. Alors le cocaractère $s_\alpha(\mu) - \mu : z \mapsto n\mu(z)n^{-1}\mu(z)^{-1}$ est à valeurs dans $\mathscr{D}(Z_\alpha) \cap T$; notons provisoirement H le sous-groupe fermé réduit de T engendré par $T(k) \cap G_\alpha(k)$, c'est un sous-groupe diagonalisable lisse de T, donc sa composante neutre H^0 est un tore. Or T_α est contenu dans H et donc dans H^0, d'où $T_\alpha = H^0$.

Comme $\mathbb{G}_{m,k}$ est réduit et connexe, alors tout cocaractère $\mathbb{G}_{m,k} \to \mathscr{D}(Z_\alpha) \cap T$ se factorise par H et par $H^0 = T_\alpha$, donc $s_\alpha(\mu) - \mu$ est à valeurs dans T_α, donc comme $X_*(T_\alpha) = \mathbb{Z}\mu'_0$, il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que

$$s_\alpha(\mu) - \mu = -r\mu'_0,$$

où μ'_0 est le générateur de $X_*(T_\alpha)$ tel que $\langle \alpha, \mu'_0 \rangle$ soit > 0. Comme le couplage est bilinéaire et W-invariant, on a

$$-r\langle \alpha, \mu'_0 \rangle = \langle s_\alpha(\alpha), \mu \rangle - \langle \alpha, \mu \rangle = -2\langle \alpha, \mu \rangle.$$

Or, pour $\mathrm{SL}_{2,k}$ on a $\alpha^\vee = \mu'_0$, d'où $r = \langle \alpha, \mu \rangle$ et

$$r\mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee,$$

tandis que pour $\mathrm{PGL}_{2,k}$ on a $\alpha^\vee = 2\mu'_0$, d'où $r = 2\langle \alpha, \mu \rangle$ et

$$r\mu'_0 = 2\langle \alpha, \mu \rangle \mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee$$

à nouveau. On a donc dans tous les cas $\boxed{s_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee.}$

Comme le couplage est W-invariant et bilinéaire on obtient, pour tout $\chi \in X(T)$ et $\mu \in X_*(T)$:

$$\langle s_\alpha \chi, \mu \rangle = \langle \chi, s_\alpha \mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle - \langle \alpha, \mu \rangle \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = \langle \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha, \mu \rangle$$

et comme le couplage est parfait ceci donne $\boxed{s_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha.}$

Notation. — On note $R^\vee$ le sous-ensemble $\{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ de $X_*(T)$ et on l'appelle l'ensemble des *coracines* de (G,T).

Remarque 13.19. — Rappelons (cf. la preuve de 13.10) que $N = N_G(T)$ agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ et que cette action se factorise par $W = W(G,T) = N/T$ (car T agit trivialement) : pour tout $w \in W$, notant n_w un élément de $N(k)$ dont l'image dans W est w, on a, pour tout $\mu \in X_*(T)$, $\chi \in X(T)$ et $t \in T(k)$:

$$(w \cdot \mu)(t) \overset{\text{déf.}}{=\!=} (n_w \cdot \mu)(t) = n_w \mu(t) n_w^{-1} \qquad (w \cdot \chi)(t) \overset{\text{déf.}}{=\!=} (n_w \cdot \chi)(t) = \chi(n_w^{-1}\mu(t)n_w).$$

Revenant à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathfrak{g}_\beta$ de $\mathfrak{g}$ en T-espaces de poids, on voit que les $\mathfrak{g}_\beta$ sont permutés par l'action de $W = W(G,T)$: pour $w \in W$ et $n_w \in N(k)$ comme ci-dessus, et pour tout $\beta \in R$, $X \in \mathfrak{g}_\beta$ et $t \in T(k)$, on a :

$$t \cdot n_w \cdot X = n_w \cdot (n_w^{-1} t n_w) \cdot X = \beta(n_w^{-1} t n_w) n_w \cdot X = (w \cdot \beta) n_w \cdot X,$$

ce qui montre que $n_w(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{w(\beta)}$ et donc $n_w(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{w(\beta)}$. Pour tout $w \in W$, on a donc $w(R) \subset R$ et $w^{-1}(R) \subset R$ d'où $\boxed{w(R) = R.}$

De plus, comme $n_w(\alpha)$ est la racine $\beta = w(\alpha)$, alors $n_w G_\alpha n_w^{-1}$ égale G_β et donc s_β, qui est l'unique élément non trivial de $W(G_\beta, T)$, coïncide avec l'élément $n_w s_\alpha n_w^{-1}$, i.e. pour tout $\chi \in X(T)$ on a :

$$\chi - \langle \chi, \beta^\vee \rangle \beta = n_w s_\alpha n_w^{-1}(\chi) = n_w\big(w^{-1}\chi - \langle w^{-1}\chi, \alpha^\vee \rangle \alpha\big) = \chi - \langle \chi, w(\alpha^\vee)\rangle \beta$$

et donc $\boxed{w(\alpha^\vee) = w(\alpha)^\vee}$ d'où $\boxed{w(R^\vee) = R^\vee}$ pour tout $w \in W(G, T)$. En particulier, pour tout $\alpha \in R$, on a $\boxed{s_\alpha(R) = R}$ et $\boxed{s_\alpha(R^\vee) = R^\vee.}$

Lemme 13.20. — *L'application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ est* bijective*.*

Démonstration. — Par définition, elle est surjective donc il suffit de montrer qu'elle est injective. Supposons $\alpha^\vee = \beta^\vee$. Alors $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = \beta - 2\alpha$ et de même $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta$. Alors on a :

$$s_\beta s_\alpha(\alpha) = -s_\beta(\alpha) = 2\beta - \alpha = \alpha + 2(\beta - \alpha)$$
$$s_\beta s_\alpha(\beta) = -\beta - 2(\alpha - 2\beta) = 3\beta - 2\alpha,$$

et donc $s_\beta s_\alpha(\beta - \alpha) = 3\beta - 2\alpha - (2\beta - \alpha) = \beta - \alpha$. Donc, supposant avoir montré que $(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha)$, ce qui est le cas pour $n = 0, 1$, on obtient

$$(s_\beta s_\alpha)^{n+1}(\alpha) = \alpha + 2(\beta - \alpha) + 2n(\beta - \alpha) = \alpha + 2(n+1)(\beta - \alpha).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha)$ et ceci est un élément de R. Comme R est fini, ceci entraîne que $\beta - \alpha = 0$, d'où $\beta = \alpha$. $\square$

On en déduit le :

Théorème 13.21. — *Soit G un k-groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie ; considérons la décomposition de $\mathfrak{g}$ en T-espaces de poids :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha\,.$$

(i) *Pour tout $\alpha \in R$, on a* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *et il existe un sous-groupe U_α de G, isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et normalisé par T, tel que* $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$.

(ii) *Le quadruplet $(X(T), X_*(T), R, R^\vee)$ est une* **donnée radicielle réduite***, au sens de la définition plus bas.*

(iii) *En particulier, R est un* **système de racines réduit** *dans le sous-espace vectoriel V de $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ qu'il engendre, et $R^\vee$ est le système de racines dual dans V^*.*

Définitions 13.22 **(Systèmes de racines et groupes de Weyl)**

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une partie R de V est un *système de racines* si :

(i) R est fini, ne contient pas 0 et engendre V.

(ii) Pour tout $\alpha \in R$, il existe un élément $\alpha^\vee$ de V^* tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que l'involution s_α de V définie par $\boxed{s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha}$ laisse stable R.

(iii) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, on a $\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, les $\alpha^\vee$ sont uniquement déterminés et forment dans V^* un système de racines noté $R^\vee$ et appelé le système de racines *dual*.

Le **groupe de Weyl** de R est le sous-groupe $W(R)$ de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_α. L'isomorphisme canonique $\mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V^*)$, $g \mapsto {}^t g^{-1}$, envoie chaque s_α sur $s_{\alpha^\vee}$ et induit donc un isomorphisme canonique entre $W(R)$ et $W(R^\vee)$.

Enfin, R est dit *réduit* si pour $\alpha, \beta \in R$ l'égalité $\mathbb{R}\alpha = \mathbb{R}\beta$ entraîne $\beta = \pm\alpha$.

Définition 13.23. — Une **donnée radicielle** est un quadruplet $(M, M^\vee, R, R^\vee)$ où :

a) M et $M^\vee$ sont deux $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, en dualité par un couplage parfait $\langle\ ,\ \rangle$.

b) R et $R^\vee$ sont des parties finies de M et $M^\vee$, en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ telle que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que les involutions s_α et $s_{\alpha^\vee}$ de M et $M^\vee$ définies par :

$$s_\alpha(m) = m - \langle m, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_{\alpha^\vee}(m^\vee) = m^\vee - \langle \alpha, m^\vee \rangle \alpha^\vee$$

vérifient $\boxed{s_\alpha(R) = R}$ et $\boxed{s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee.}$

c) On dit que la donnée radicielle est **réduite** si elle vérifie de plus la condition suivante : si $\alpha, \beta \in R$ vérifient $\mathbb{Z}\alpha \cap \mathbb{Z}\beta \neq \{0\}$, alors $\beta = \pm\alpha$. Dans la suite, on ne considérera que des données radicielles et systèmes de racines *réduits* et l'on omettra l'adjectif « réduit(e) ».

Remarques 13.24. — 1) La condition $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ implique $\alpha \neq 0$, pour tout $\alpha \in R$.

2) Soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R. Alors R est un système de racines dans V, et $R^\vee$ s'identifie au système de racines dual dans V^*.

Définitions 13.25. — Soit $(M, M^\vee, R, R^\vee)$ une donnée radicielle.

(i) Elle est dite **semi-simple** si le sous-groupe $\mathbb{Z}R$ a même rang que M. On peut montrer que ceci a lieu si et seulement si $\mathbb{Z}R^\vee$ a même rang que $M^\vee$, donc cette condition est symétrique en R et $R^\vee$.

(ii) Elle est dite **adjointe** (resp. **simplement connexe**) si $\mathbb{Z}R = M$ (resp. $\mathbb{Z}R^\vee = M^\vee$).

(iii) Il existe des données radicielles semi-simples qui ne sont ni adjointes ni simplement connexes, par exemple celle de SO_{2n}, pour $n \geq 2$. D'autre part, il peut arriver qu'une donnée radicielle soit à la fois adjointe et simplement connexe (il y a essentiellement trois cas, nommés G_2, F_4 et E_8).

Remarque 13.26. — La terminologie provient du fait que si G est un $\mathbb{C}$-groupe algébrique réductif connexe et si $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, alors la donnée radicielle de G est :

(i) *adjointe* ssi G est isomorphe à son image par Ad dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

(ii) *simplement connexe* ssi le groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

Exemples 13.27. — On a déjà vu les données radicielles de $\mathrm{SL}_{2,k}$ et de $\mathrm{PGL}_{2,k}$: la première est simplement connexe, la seconde adjointe.

Donnons un exemple de donnée radicielle non semi-simple. Soit $G = \mathrm{GL}_{2,k}$ et T le tore des matrices diagonales. On a $X_*(T) = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2$, où $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{G}_{m,k} \to T$ sont définis par

$$\mu_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mu_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

et $X(T) = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_2$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base duale de (μ_1, μ_2), i.e. pour tout élément $t = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ on a $\varepsilon_1(t) = z_1$ et $\varepsilon_2(t) = z_2$. On a

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(T) \oplus kE_{12} \oplus kE_{21}$$

et pour tout t comme ci-dessus, on a $t \cdot E_{12} = z_1 z_2^{-1} E_{12} = \alpha(t) E_{12}$, où $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, et $t \cdot E_{21} = \alpha(t)^{-1} E_{21}$.

De plus, on a $\mathscr{D}(\mathrm{GL}_{2,k}) = \mathrm{SL}_{2,k}$ et $\alpha^\vee = \mu_1 - \mu_2$, i.e. pour toute k-algèbre Λ et $z \in \Lambda^\times$:

$$\alpha^\vee(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\Lambda).$$

(Pour les données radicielles de $\mathrm{SL}_{n,k}$, $\mathrm{PGL}_{n,k}$ et $\mathrm{GL}_{n,k}$, voir [Po, §18.4], [Sp, 7.4.7] ou le TD no. 5.)