Examen du 1er mars 2016 (durée 3h)

Documents autorisés : polycopiés du cours, feuilles de TD, notes de cours manuscrites Les trois exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les suivantes.

Exercice 1. — Soient k un corps, G le k-schéma en groupes $\mathrm{GL}_{2,k}$. On a une action naturelle de G sur l'algèbre de polynômes $k[X,Y]$, par automorphismes d'algèbre, définie comme suit : pour toute k-algèbre R et $g = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \in G(R)$, on a dans $R[X,Y]$:

$$g^{-1}X = a_0X + b_0Y, \qquad g^{-1}Y = c_0X + d_0Y.$$

Soit H le stabilisateur dans G de l'élément XY.

(1) Écrire les équations définissant H. Soit A le quotient de $k[G] = k[a,b,c,d,(ad-bc)^{-1}]$ par l'idéal engendré par ces équations.

(2) Déterminer dans A deux idempotents e, f non nuls tels que $e+f=1$ et $ef=0$. (Par abus, on notera encore a,b,c,d les images de a,b,c,d dans A.)

(3) Déterminer les composantes connexes de H et donner une équation définissant la composante neutre H^0.

(4) Quel est le k-schéma en groupes H^0 ?

(5) Le k-schéma en groupes H est-il géométriquement réduit ?

(6) Notons $\mathrm{dét}_H$ la restriction à H du déterminant (i.e. l'image dans A de l'élément dét de $k[G]$). Exprimer $\mathrm{dét}_H$ en fonction de l'un des idempotents de la question (2), puis calculer $\mathrm{dét}_H^2$.

(7) Il est naturel de poser $H = O(2)_k$ et $H^0 = \mathrm{SO}(2)_k$; noter toutefois que si $\mathrm{car}(k) = 2$, on a $\mathrm{dét}_H = 1$. Déduire de la question précédente une équation de $\mathrm{SO}(2)_k$ dans $O_{2,k}$ valable en toute caractéristique.

On rappelle que $M_2(k)$ est un G-module pour l'action adjointe, donc a fortiori un H-module. Soit E le sous-espace vectoriel de $M_2(k)$ formé des matrices diagonales

(8) Montrer que E est un sous-H-module de $M_2(k)$. (On pourra utiliser la question 5.)

(9) Déterminer le noyau du morphisme $\rho : H \to \mathrm{GL}(E)$ ainsi que son image $\rho(H)$.

Exercice 2. — Soient k un corps et n un entier ≥ 1. On munit $V = k^{2n}$ d'une forme symplectique[(1)] $\langle\ ,\ \rangle$; soit G le groupe symplectique associé, i.e. pour toute k-algèbre R,

$$G(R) = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid \forall X, Y \in R^{2n}, \quad \langle gX, gY\rangle = \langle X, Y\rangle\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que G est connexe. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

(1) En citant des résultats du cours, démontrez qu'il suffit de prouver que $G_{\overline{k}} = \mathrm{Spec}(k[G] \otimes \overline{k})$ est connexe.

(2) En citant des résultats du cours, démontrez qu'il suffit de prouver que tout $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k})$ appartient à une partie connexe de (l'espace topologique sous-jacent à) $G_{\overline{k}}$ contenant l'élément neutre.

Pour tout $v \in k^{2n} - \{0\}$, on a un morphisme de k-schémas $\tau_v : \mathbb{G}_{a,k} \to \mathrm{GL}_{2n,k}$ défini comme suit. Pour toute k-algèbre R et $t \in R$, $\tau_v(t)$ est l'élément de $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ tel que, pour tout $X \in R^{2n}$:

$$(\star) \qquad \tau_v(t)X = X + t\langle X, v\rangle v.$$

(3) Montrer que $\tau_v(t) \in G(R)$ et que $\tau_v(t)\tau_v(t') = \tau_v(t+t')$. Par conséquent, τ_v est un morphisme de k-schémas en groupes $\mathbb{G}_{a,k} \to G$.

Pour $t \in k$, l'élément $\tau_v(t) \in G(k)$ est appelé une « *transvection symplectique* » (de direction v). Le but de la suite de l'exercice est de montrer que tout élément de $G(k)$ est produit d'au plus $4n$ transvections symplectiques. On dira qu'un couple (u,v) d'éléments de k^{2n} est *hyperbolique* si $\langle u, v\rangle = 1$; dans ce cas, $V = k^{2n}$ est la somme directe de $E = ku \oplus kv$ et de son orthogonal $E^{\perp}$.

Soient (u,v) et (u',v') deux couples hyperboliques. On veut montrer qu'on peut envoyer (u,v) sur (u',v') par un produit d'au plus quatre transvections symplectiques.

(1) I.e. une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

(4) On suppose $\langle u, u' \rangle \neq 0$; posant alors $w = u' - u$ montrer que $\tau_w(t)u = u'$ pour un $t \in k^\times$ bien choisi.

(5) Supposons $\langle u, u' \rangle = 0$. Il existe une forme linéaire $f \in V^*$ telle que $f(u) \neq 0$ et $f(u') \neq 0$ et comme $\langle\ ,\ \rangle$ induit un isomorphisme entre V et V^* il existe donc $u'' \in V$ tel que $\langle u, u'' \rangle \neq 0$ et $\langle u', u'' \rangle \neq 0$. Déduire de la question précédente qu'on peut toujours envoyer (u, v) sur un couple hyperbolique (u', v''), pour un certain v'', par un produit d'au plus deux transvections symplectiques.

Notant maintenant (u, v) *au lieu de* (u', v''), *il reste à envoyer* (u, v) *sur* (u, v') (*en gardant le même* u).

(6) On suppose $\langle v, v' \rangle \neq 0$ et l'on pose $w = v' - v$. Montrer que $\langle u, w \rangle = 0$ puis qu'il existe $t \in k$ tel que $\tau_w(t)$ envoie (u, v) sur (u, v').

(7) On suppose $\langle v, v' \rangle = 0$. Montrer alors que $(u, u + v)$ est un couple hyperbolique et que $\langle u + v, v \rangle = 1 = \langle u + v, v' \rangle$. Conclure.

On rappelle que V *s'écrit comme somme directe de* n *plans orthogonaux* $E_1, \dots, E_n$, *où chaque* E_i *admet une base hyperbolique* (u_i, v_i). *Soit* g *un élément quelconque de* $G(k)$.

(8) Montrer qu'il existe un produit h_n d'au plus quatre transvections symplectiques, tel que $h_n g$ soit l'identité sur E_n.

(9) Comme $h_n g \in G(k)$, il laisse stable $E_n^\perp = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{n-1}$. En procédant par récurrence, montrer qu'il existe un produit $h_1 \cdots h_n$ d'au plus $4n$ transvections symplectiques tel que $h_1 \cdots h_n g = \mathrm{id}_V$.

(10) On suppose dans cette question que $k = \overline{k}$. Pour tout $g \in G(k)$, montrer que g appartient à l'image d'un morphisme de k-schémas $Y \to G$, pour un certain k-schéma irréductible Y. En déduire que G est connexe.

(11) On admet que G est géométriquement réduit. Montrer que $G \subset \mathrm{SL}_{2n,k}$, i.e. que le morphisme dét : $G \to \mathbb{G}_{m,k}$ est trivial. (Soit J la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base canonique de k^{2n} ; écrire l'équation « matricielle » définissant G dans $\mathrm{GL}_{2n,k}$, puis utiliser la question précédente.)

Exercice 3. — Soient k un corps non parfait de caractéristique 2 et a un élément de k qui n'est pas un carré. [2] Soit G le k-schéma en groupes défini comme suit : pour toute k-algèbre R,

$$G(R) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - ay^2 = 1\}$$

avec la loi de groupe (commutative) : $(x, y)(x', y') = (xx' + ayy', xy' + yx')$ (on ne demande pas de vérifier que ceci est bien une loi de groupe) ; on a $G = \mathrm{Spec}(A)$, où $A = k[X, Y]/(X^2 - aY^2 - 1)$. On admet que $\dim(G) = 1$.

(1) Montrer que $H = \mu_{2,k}$ est un sous-schéma en groupes fermé de G.

(2) Montrer que $A = k[Y] \oplus k[Y]X$ comme k-espace vectoriel (en notant encore X et Y les images de X et Y dans A).

(3) On rappelle que la sous-algèbre $B = A^H$ est formée des $\phi \in A$ tels que pour tout morphisme de k-algèbres $R \to R'$, $h \in H(R)$ et $g \in G(R')$ on ait $\phi(gh) = \phi(g)$. Montrer que A^H est une k-algèbre $k[u, v]$ avec une relation $u^2 = P(v)$ pour un certain polynôme P de degré 2.

(4) Soit $\overline{G} = G/H = \mathrm{Spec}(B)$. Quelle est la dimension de $\overline{G}$?

(5) Déterminer les k-points $G(k)$ et montrer que $\overline{G}(k) \neq \{e\}$.

(6) Soient k' l'extension quadratique $k(\sqrt{a})$ et $G' = \mathrm{Spec}(A \otimes k')$. Posant $b = \sqrt{a}$, montrer que le morphisme de k'-schémas $G' \to \mu_{2,k'} \times \mathbb{G}_{a,k'}$ défini par $(x, y) \mapsto (z = x - by, zy)$ est un isomorphisme de k'-schémas en groupes. (Commencer par écrire la loi de groupe de G' dans les « coordonnées » (z, y).)

---

[2] Par exemple, $k = \mathbb{F}_2(t)$ et $a = t$.