Semaine 2 : Théorème de Chevalley et quotients G/H

Références pour ce chapitre :

[Du] Antoine Ducros, Introduction à la théorie des schémas, Cours de M2 à l'UPMC 2014-2015, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros (II, §§4 & 6).

[EH] David Eisenbud & Joe Harris, The geometry of schemes, Springer-Verlag, 2001. (§§I.1-2 et III.2.5)

[Ha] Robin Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977. (II, §7).

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§14)

[Wa] William C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer-Verlag, 1979. (chap. 16)

Et aussi :

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011.

[DG] Michel Demazure & Pierre Gabriel, Groupes algébriques, Masson & North-Holland, 1970.

3. Stabilisateurs et théorème de Chevalley

Dans la suite, k est un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes **affine**.

Lemme 3.1. — *Soit G un k-schéma en groupes, correspondant à l'algèbre de Hopf A, et soit H un sous-schéma en groupes fermé, correspondant à $A/\mathcal{I}$ pour un certain idéal de Hopf $\mathcal{I}$. Alors $\mathcal{I}$ est un sous-espace du G-module A ; notons $G_{\mathcal{I}}$ son stabilisateur. On a $G_{\mathcal{I}} = H$.*

Démonstration. — Soit $(v_i)_{i\in I}$ une base de $\mathcal{I}$, complétons-la en une base $(v_i)_{i\in I'}$ de V, où $I' \supset I$. Pour tout $j \in I$, on peut écrire de façon unique

$$\Delta_V(v_j) = \sum_{i\in I} v_i \otimes a_{ij} + \sum_{i\in I'-I} v_i \otimes b_{ij}$$

avec les a_{ij} et b_{ij} dans A, nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Comme $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf, on a $\Delta(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I} \otimes A + A \otimes \mathcal{I}$ et il en résulte que si $i \in I' - I$ alors $b_{ij} \in \mathcal{I}$ et donc aussi $\tau(b_{ij}) \in \mathcal{I}$ car $\tau(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ puisque $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf.

Or on a vu que l'idéal $\mathcal{I}'$ de $G_{\mathcal{I}}$ est engendré par les b_{ij} et $\tau(b_{ij})$ pour $j \in I, i \in I' - I$, donc $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$. On a donc $H(R) \subset G_{\mathcal{I}}(R)$ pour toute k-algèbre R.

Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $\phi \in \mathcal{I}$, écrivons

$$\Delta(\phi) = \sum \phi_1 \otimes \phi_2.$$

Alors, pour tout $g, g' \in G(R)$, $g\phi$ est l'élément $\sum \phi_1 \otimes g(\phi_2)$ de $A \otimes R$ et la valeur en ϕ du morphisme $g'g \in G(R)$ est $(g'g)(\phi) = \sum g'(\phi_1)g(\phi_2) \in R$.

Notons e l'élément neutre de $G(R)$ (i.e. le morphisme de k-algèbres $\varepsilon : A \to k \to R$) et supposons que $g \in G_{\mathcal{I}}(R)$, alors $g\phi \in I \otimes R$ et comme $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ on a donc

$$g(\phi) = (eg)(\phi) = m_R \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(g\phi) = 0.$$

Comme ϕ était arbitraire dans $\mathcal{I}$, ceci montre que $g(\mathcal{I}) = 0$, d'où $g \in H(R)$. Ceci prouve l'inclusion réciproque $G_{\mathcal{I}}(R) \subset H(R)$, d'où $G_{\mathcal{I}} = H$. $\square$

***Proposition 3.2* (Chevalley).** — *Soit G un k-schéma en groupes* de type fini *et soit H un sous-schéma en groupes fermé.*

(i) *Il existe un G-module V de dimension finie et un sous-espace $E \subset V$ tel que $H = G_E$.*
(ii) *On peut se ramener au cas où* $\dim(E) = 1$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de Hopf de $A = k[G]$ définissant H. On sait que $H = G_{\mathcal{I}}$. D'autre part, comme G est de type fini, A est noethérienne donc $\mathcal{I}$ est engendré comme idéal par un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_s$, et ceux engendrent un sous-G-module V de A de dimension finie. Posons $E = V \cap \mathcal{I}$. Alors $H \subset G_E$.

Réciproquement, soit $g \in G_E(R)$ et soit $\phi = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \in \mathcal{I}$. Comme G agit sur A par automorphismes d'algèbres, on a

$$g(\phi \otimes 1) = \sum_{i=1}^{s} g(a_i \otimes 1) g(x_i \otimes 1)$$

et comme $g(x_i \otimes 1) \subset E \otimes R \subset \mathcal{I} \otimes R$ alors le terme de droite ci-dessus appartient à $\mathcal{I} \otimes R$, d'où $g \in G_{\mathcal{I}}(R) = H(R)$. Ceci prouve (i).

Pour prouver (ii), observons que la structure de G-module sur V en induit une sur $\bigwedge^i(V)$ pour tout i, en particulier pour $i = d = \dim(E)$.

Posons $n = \dim(V)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \dots, e_d)$ soit une base de E. Soit R une k-algèbre et $g \in G(R)$. Comme $V \otimes R$ est un R-module libre de base $(e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1)$, on voit que $g(E \otimes R) \subset E \otimes R$ si et seulement si $g(\bigwedge^d E) \subset \bigwedge^d E$. Appliquant ceci à g et g^{-1} on en déduit que $H = G_E$ est aussi le stabilisateur de la droite $D = \bigwedge^d(E)$ du G-module $V' = \bigwedge^d(V)$. □

4. Schémas quasi-projectifs et orbites

« Rappelons » d'abord les définitions et résultats suivants.

***Définition 4.1* (Schémas affines).** — Soit A un anneau. On note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. On le munit de la topologie de Zariski, dont les fermés sont les parties

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

pour tout sous-ensemble I de A (et on peut se limiter au cas où I est un idéal de A). (En particulier, on a $\varnothing = V(1) = V(A)$.) Par conséquent, pour $f \in A$, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie, i.e. tout ouvert est réunion de tels ouverts.

On munit $X = \mathrm{Spec}(A)$ d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ d'anneaux, en déclarant que $\mathscr{F}(D_f) = A_f = A[T]/(fT - 1)$ pour tout f, et l'on note $\mathscr{O}_X$ le faisceau d'anneaux associé. [(1)] Alors la fibre (ou tige) de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{O}_X$ en un point $x = \mathfrak{p}$ est l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ qui est *local*, i.e. possède un unique idéal maximal, à savoir $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. On dit alors que $(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ est un « espace annelé en anneaux locaux » ou un « espace localement annelé » et que c'est le **schéma affine** $\mathrm{Spec}(A)$ associé à A.

Soient $(X, \mathscr{O}_X)$ et $(Y, \mathscr{O}_Y)$ deux espaces localement annelés. À toute application continue $f : X \to Y$ on associe un certain faisceau d'anneaux $f^*(\mathscr{O}_Y)$ sur X ; alors, un **morphisme** de $(X, \mathscr{O}_X)$ vers $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est un couple (f, ϕ) formé d'une application continue $f : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\phi : f^*(\mathscr{O}_Y) \to \mathscr{O}_X$ qui vérifie la condition suivante : pour tout $x \in X$, ϕ induit un morphisme d'anneaux $\phi_x : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ et l'on exige que

(1) Voir [Du], [EH] ou [Ha].

ce morphisme soit *local*, i.e. envoie l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{f(x)}$ du premier dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ du second (ce qui équivaut à dire que $\phi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$). On notera ELoc la catégorie des espaces localement annelés et An celle des anneaux. On peut démontrer sans trop de peine le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *Soit A un anneau, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $f \in A$. Alors l'ouvert D_f muni de la restriction du faisceau $\mathscr{O}_X$, est canoniquement isomorphe au schéma affine* $\mathrm{Spec}(A_f)$.

On démontre alors, avec plus de travail, les théorèmes suivants : [(1)]

Théorème 4.3. — *Soit A un anneau. Pour tout $f \in A$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D_f) = A_f$. En particulier, $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) = A$.*

Théorème 4.4. — (i) *Pour tout anneau A et tout espace localement annelé X, on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ELoc}}(X, \mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}(A, \mathscr{O}_X(X)),$$

fonctorielle en A et en X.

(ii) *En particulier, si $X = \mathrm{Spec}(B)$ alors tenant compte du théorème précédent, on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ELoc}}(\mathrm{Spec}(B), \mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}\left(A, \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(\mathrm{Spec}(B))\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{An}}(A, B),$$

fonctorielle en A et B, donc la catégorie des schémas affines est équivalente à la catégorie opposée de celle des anneaux.

Terminologie 4.5. — Si A est une k-algèbre, on dit que $\mathrm{Spec}(A)$ est un k-schéma affine. Dans ce cas, le morphisme $k \to A$ qui fait de A une k-algèbre définit un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$.

Exemple 4.6. — L'espace affine de dimension n sur k, noté $\mathbb{A}_k^n$, est le k-schéma affine $X = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$.

Si k est algébriquement clos, la variété algébrique affine associée (i.e. l'ensemble des points fermés de X) n'est autre que l'espace affine k^n.

De façon plus intrinsèque, soient V un k-ev de dimension finie, V^* son dual et $S(V^*)$ l'algèbre symétrique de V^*.

Lemme 4.7. — (i) *Le k-schéma affine $X = \mathrm{Spec}(S(V^*))$ représente le foncteur $R \mapsto V \otimes R$.*

(ii) *Si k est algébriquement clos, la variété algébrique affine associée (i.e. l'ensemble des points fermés de X) n'est autre que V, et l'on est donc juste en train de dire que l'algèbre des fonctions sur la variété V est, de façon canonique, $S(V^*)$.*

Démonstration. — Pour toute k-algèbre R on a une bijection canonique $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg.}}(S(V^*), R) = \mathrm{Hom}_k(V^*, R)$. D'autre part, on a un morphisme canonique de R-modules $V \otimes R \to \mathrm{Hom}_k(V^*, R)$ et en prenant une base de V on voit que c'est un isomorphisme. □

***Définition 4.8* (k-schémas)**. — Un **k-schéma** est un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ qui possède un recouvrement par des ouverts U_i tels que chaque U_i, muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$, soit isomorphe à un k-schéma affine.

Par exemple, *tout ouvert d'un k-schéma affine*, étant recouvert par des ouverts D_f, *est un k-schéma*, et l'on dira que c'est un **k-schéma quasi-affine**.

Exemple 4.9. — Soit V un k-ev de dimension finie d, considéré comme le schéma $\mathrm{Spec}(S(V^*))$; alors le vecteur nul 0 correspond à l'idéal maximal $I_+ = \bigoplus_{n>0} S^n(V)$ et est un point fermé de V, donc $U = V - \{0\}$ est un k-schéma quasi-affine. Pour toute k-algèbre R, on a :

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(\mathrm{Spec}(R), V - \{0\}) = \left\{ (r_1, \dots, r_d) \in R^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'idéal de } R \text{ engendré} \\ \text{par les } r_i \text{ égale } R \end{array} \right\}.$$

En effet, choisissons une base de V de sorte que $S(V^*) = k[X_1, \dots, X_d] = A$. Alors tout morphisme $f : \mathrm{Spec}(R) \to U$ donne, par composition avec l'inclusion $U \subset V$, un morphisme $g : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(A)$ donc un morphisme de k-algèbres $\phi : A \to R$ qui est donné par un d-uplet $(r_1, \dots, r_d)$, où $r_i = \phi(X_i)$. Alors, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $g(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ et la condition que f soit à valeurs dans U signifie qu'il n'existe aucun idéal premier $\mathfrak{p}$ de R tel que $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ contienne I_+ (et donc lui soit égal, puisque I_+ est maximal), i.e. tel que $\phi(I_+) \subset \mathfrak{p}$, ce qui équivaut à dire que l'idéal $(r_1, \dots, r_p)$ de R n'est contenu dans aucun idéal premier, donc est égal à R.

Pour construire le quotient G/H, où G est un k-schéma en groupes affine de type fini et H un sous-schéma en groupes fermé, on aura besoin de schémas plus généraux, à commencer par l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$.

***Définition 4.10* (Le k-schéma $\mathbb{P}^n_k$).** — L'ensemble sous-jacent est l'ensemble $X = \mathrm{Proj}(S)$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau gradué $S = k[X_0, \dots, X_n]$ qui sont homogènes (i.e. si $x \in \mathfrak{p}$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_N$ avec x_i homogène de degré i, alors chaque x_i est dans $\mathfrak{p}$; ceci équivaut à dire que $\mathfrak{p}$ est engendré par des éléments homogènes) et distincts de l'idéal maximal $I_+ = (x_0, \dots, x_n)$.

Les fermés sont les sous-ensembles $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset I\}$, pour I parcourant les idéaux homogènes de S. Par conséquent, pour f parcourant les éléments homogènes, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \not\in \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie. On peut munir l'espace topologique X d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$ tel que pour tout élément homogène $f \in S$, l'ouvert D_f muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$ soit canoniquement isomorphe au spectre de l'anneau $S_{(f)}$ formé des éléments de degré 0 dans le localisé S_f, i.e. des éléments de la forme a/f^n avec $a \in S_n$, où S_n désigne la composante homogène de degré n de S.

Remarquons que les ouverts $D_i = D_{x_i}$ recouvrent X : en effet, un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ ne peut contenir tous les x_i car sinon il serait égal à I_+, ce qui est exclu. D'après ce qui précède, chaque ouvert D_i est isomorphe au spectre de la k-algèbre

$$k[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)} \simeq k\Big[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\Big]$$

c.-à-d. à l'espace affine $\mathbb{A}^n_k = \mathrm{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$.

Soit V un k-ev de dimension $n+1$, notons V^* son dual et $S(V^*)$ l'algèbre symétrique de V^*. Alors on peut définir de façon intrinsèque un k-schéma $\mathbb{P}(V)$, qui est isomorphe à $\mathbb{P}^n_k$ si l'on choisit une base de V :

***Définition 4.11* (Le k-schéma $\mathbb{P}(V)$).** — L'ensemble sous-jacent est l'ensemble $\mathrm{Proj}(S)$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau gradué $S = S(V^*)$ qui sont homogènes et distincts de l'idéal maximal $I_+ = \bigoplus_{n>0} S^n(V^*)$.

Les fermés sont les sous-ensembles $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset I\}$, pour I parcourant les idéaux homogènes de S. Par conséquent, pour f parcourant les éléments homogènes, les ouverts

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \not\in \mathfrak{p}\}$$

forment une base de la topologie. On munit $\mathbb{P}(V)$ d'un façon de k-algèbres, exactement comme dans le cas de $\mathbb{P}^n_k$, et d'ailleurs pour tout choix d'une base de V on a des isomorphismes $S(V^*) \cong k[X_0, \ldots, X_n]$ et $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^n_k$. Le point est donc d'avoir défini $\mathbb{P}(V)$ de façon intrinsèque, sans avoir eu à choisir une base.

Proposition 4.12. — *Pour toute k-algèbre R,* $\mathrm{Hom}_{k\text{-}sch.}((\mathrm{Spec}(R), \mathbb{P}(V))$ *s'identifie de façon canonique à :*

(i) *L'ensemble des sous-R-modules N de $V^* \otimes R$ tels que le quotient soit un R-module projectif de rang* 1.

(ii) *L'ensemble des facteurs directs D de rang* 1 *de $V \otimes R$.*

En particulier, si k est un corps algébriquement clos, les points fermés de $\mathbb{P}(V)$ sont en bijection avec les droites vectorielles de V, i.e. on retrouve la variété $\mathbb{P}(V)$ habituelle.

Esquisse de démonstration. — [(2)] $X = \mathbb{P}(V)$ est muni d'un certain faisceau (quasi-cohérent) de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{O}_X(1)$ qui est localement libre de rang 1, i.e. localement isomorphe à $\mathscr{O}_X$, et l'on a un morphisme canonique $\pi : \mathscr{O}_X \otimes V^* \to \mathscr{O}_X(1)$ d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{O}_X \otimes V^* \xrightarrow{\pi} \mathscr{O}_X(1) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, si $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$ est un morphisme de schémas, on obtient une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents sur $Y = \mathrm{Spec}(R)$:

$$0 \longrightarrow f^*(\mathscr{N}) \longrightarrow \mathscr{O}_Y \otimes V^* \longrightarrow f^*(\mathscr{O}_X(1)) \longrightarrow 0$$

où $f^*(\mathscr{O}_X(1))$ est maintenant un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_Y$-modules qui est localement libre de rang 1. Or on sait que sur un schéma affine $Y = \mathrm{Spec}(R)$, la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de $\mathscr{O}_Y$-modules est équivalente à celle des R-modules, et l'on obtient donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R \otimes V^* \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

où L est un R-module projectif de rang 1 et $N = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Réciproquement, soit donné N un sous-R-module de $V^* \otimes R$ tel que le quotient L soit un R-module projectif de rang 1. Choisissons une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de V et notons $(X_0, \ldots, X_n)$ la base duale de V^*, d'où $S(V^*) = k[X_0, \ldots, X_n]$. Notons $\overline{X}_i$ l'image de $X_i \otimes 1$ dans L.

Pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, le localisé $L_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre de rang 1, donc d'après le lemme de Nakayama il est engendré par n'importe quel élément n'appartenant pas au sous-module $\mathfrak{p}L_\mathfrak{p}$. Comme $L_\mathfrak{p}$ est engendré par les $\overline{X}_i$ alors ceux-ci ne peuvent pas être tous dans le sous-module $\mathfrak{p}L_\mathfrak{p}$. Donc les ouverts :

$$U_i = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \overline{X}_i \notin \mathfrak{p}L_\mathfrak{p}\}$$

recouvrent $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $D_i = D_{X_i}$ l'ouvert de $\mathbb{P}^n_k$ défini plus haut. Pour définir un morphisme de schémas $U_i \to D_i$ il suffit, puisque $D_i = \mathrm{Spec}(k[X_j/X_i \mid j \neq i])$ est affine, de se donner un morphisme de k-algèbres

$$\phi_i : k[X_j/X_i \mid j \neq i] \to \mathscr{O}_Y(U_i).$$

Soit $\mathfrak{p} \in U_i$, alors $L_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module libre engendré par $\overline{X}_i$. On peut montrer qu'il existe $f \in R_\mathfrak{p}$ tel que L_f soit un R_f-module libre engendré par $\overline{X}_i$; alors pour tout $j = 0, \ldots, n$ on a $\overline{X}_j = r_j\overline{X}_i$ avec $r_j \in R_f$ et, par hypothèse, $r_i = 1$ est inversible dans R_f, donc r_j/r_i est un élément de R_f et de $R_\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \in U_i$ tel que $f \notin \mathfrak{q}$. En travaillant un peu, on peut voir que cette collection d'éléments r_j/r_i de $R_\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p}$ parcourant U_i, définit bien un élément de $\mathscr{O}_Y(U_i)$, d'où le morphisme voulu $U_i \to D_i \subset \mathbb{P}(V)$.

(2) Voir [Du], [EH] ou [Ha].

Enfin, ces morphismes coïncident sur les intersections $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ car avec les notations précédentes on a :
$$\phi_2\Big(\frac{X_j}{X_{i_1}}\Big) = \phi_2\Big(\frac{X_j}{X_{i_2}}\Big(\frac{X_{i_1}}{X_{i_2}}\Big)^{-1}\Big) = \frac{r_j}{r_{i_2}}\Big(\frac{r_{i_1}}{r_{i_2}}\Big)^{-1} = \frac{r_j}{r_{i_1}} = \phi_1\Big(\frac{X_j}{X_{i_1}}\Big).$$
Ceci achève l'esquisse de la preuve du point (i). Bien entendu, le point (ii) en découle, car les applications
$$N \mapsto D = \mathrm{Hom}_R\big((R\otimes V^*)/N, R\big) \qquad \text{et} \qquad D \mapsto N = \mathrm{Hom}_R\big((R\otimes V)/D, R\big)$$
sont des bijections réciproques entre les N de (i) et les D de (ii). $\square$

Pour tout k-schéma X on note h_X le fonceur (contravariant) qui à tout k-schéma Z associe $h_X(Z) = \mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(Z, X)$, et pour toute k-algèbre R, on note
$$X(R) = h_X(\mathrm{Spec}(R)) = \mathrm{Hom}_{k\text{-sch.}}(\mathrm{Spec}(R), X).$$
Ceci définit un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbres dans celle des ensembles. On admet le lemme suivant, qui généralise le lemme de Yoneda :

Lemme 4.13. — *Soit X, Y deux k-schémas. Tout morphisme de foncteur entre les foncteurs $R \mapsto X(R)$ et $R \mapsto Y(R)$ se prolonge (de façon unique) en un morphisme de foncteurs $h_X \to h_Y$ donc induit, d'après le lemme de Yoneda, un unique morphisme de k-schémas $X \to Y$.*

(En particulier, si X et Y définissent le même foncteur sur la catégorie des k-algèbres, alors X et Y sont canoniquement isomorphes.)

Proposition 4.14. — *Soit V un G-module de dimension finie. Alors l'action de G sur V induit des morphismes de schémas : $G \times V \to V$ et $G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — La structure de comodule $V \to V \otimes k[G]$ induit de façon canonique une structure de comodule $V^* \to V^* \otimes k[G]$ et on peut montrer que celle-ci induit une structure de comodule
$$\phi : S(V^*) \to S(V^*) \otimes k[G]$$
qui est aussi un morphisme d'algèbres graduées. Ceci équivaut à se donner un morphisme de schémas $G \times V \to V$ qui est une action (i.e. $ev = v$ et $g(hv) = (gh)v$) et qui est linéaire en V. On peut aussi dire que $k[G]$ (resp. $S(V^*)$) représente le foncteur $R \mapsto G(R)$ (resp. $R \mapsto V \otimes R$) ; alors l'action R-linéaire
$$G(R) \times (V \otimes R) \to V \otimes R,$$
fonctorielle en R, induit d'après Yoneda un morphisme d'algèbres $S(V^*) \to S(V^*) \otimes k[G]$ qui est une coaction (car on a une action de G sur V) et qui envoie V^* dans $V^* \otimes k[G]$ (car l'action est linéaire), donc est un morphisme de k-algèbres graduées.

De même, si $g \in G(R)$ et si D est un facteur direct de rang 1 de $V \otimes R$ alors il en est de même de $g(D)$ et l'on obtient donc une action de $G(R)$ sur $\mathbb{P}(V)(R)$, fonctorielle en R. D'après la généralisation donnée plus haut du lemme de Yoneda, ceci induit un morphisme de schémas
$$\mu : G \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$$
qui est une action, i.e. qui vérifie $\mu \circ (\varepsilon, \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$, où $\varepsilon : \mathrm{Spec}(k) \to G$ est la section unité, et $(\mathrm{id}_G \times \mu) \circ \mu = (m_G \times \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}) \circ \mu$, où m_G est la multiplication de G. $\square$

Définitions 4.15 **(Sous-schémas et schémas réduits)**. — On dit qu'une k-algèbre est réduite si elle n'a pas d'élément nilpotent $\neq 0$. On dit qu'un k-schéma X est réduit si pour tout ouvert U la k-algèbre $\mathscr{O}_X(U)$ est réduite.

Soit X un k-schéma. Notons pour un instant $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à X.

(i) Tout ouvert U de $|X|$, muni de la restriction de $\mathscr{O}_X$, est un k-schéma.

(ii) Si F est un fermé de $|X|$, il peut en général être muni de plusieurs structures de sous-schéma fermé : par exemple si $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[T])$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sous-schémas affines fermés $F_n = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^n)$ ont tous pour espace topologique sous-jacent le point 0 qui correspond à l'idéal maximal (T). Ce sous-schéma n'est réduit que pour $n = 1$.

Dans le cas général, si F est une partie fermée de $|X|$, il existe sur F une unique structure de sous-schéma fermé *réduit*.

Un des avantages des k-schémas réduits est fourni par le lemme suivant :

Lemme 4.16. — *Soit X un k-schéma réduit, $f : X \to Z$ un morphisme de k-schémas, et Y l'adhérence dans Z de $f(X)$, i.e. l'intersection de toutes les parties fermées de Z contenant l'ensemble $f(X)$. On munit Y de la structure de sous-schéma fermé réduit. Alors f se factorise en un morphisme $f : X \to Y$.*

Démonstration. — Faisons-la lorsque $Z = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, et dans ce cas ne supposons pas au départ que X soit réduit.

Alors f correspond à un morphisme de k-algèbres $\phi : A \to B$. Notons J le radical de $\mathrm{Ker}(\phi)$, i.e. l'idéal formé des $a \in A$ tels que $0 = \phi(a^n) = \phi(a)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c.-à-d. $J = \phi^{-1}(\mathscr{N})$ où $\mathscr{N}$ désigne l'idéal de B formé par les éléments nilpotents de B. Alors A/J est une k-algèbre réduite.

D'autre part, $f(X)$ est contenu dans un fermé $V(I)$ de Z, où I est un idéal de A, si et seulement si pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ on a $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \supset I$, c.-à-d. $\phi(I) \subset \mathfrak{p}$. Or on sait que l'intersection des idéaux premiers de B égale $\mathscr{N}$ donc la condition précédente équivaut à $\phi(I) \subset \mathscr{N}$. Ceci montre que le plus petit fermé F de $\mathrm{Spec}(A)$ contenant $f(X)$ est $V(\phi^{-1}(\mathscr{N})) = V(J)$ et sa structure de sous-schéma réduit est précisément donnée par $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$. On voit alors que le morphisme $X \to Z$ se factorise par Y si et seulement si le morphisme $\phi : A \to B$ se factorise par A/J, ce qui équivaut à dire que $J = \mathrm{Ker}(\phi)$. Ceci est bien le cas si $\mathscr{N} = (0)$, i.e. si X est réduit. (Et réciproquement pour que l'énoncé du lemme soit vrai pour le morphisme id_X, il faut que X soit réduit.) □

Remarque 4.17. — Attention ! Avec les notations précédentes, $f(X)$ est *contenu dans*, mais pas nécessairement égal, au fermé Y. Par exemple, soit $f : X = \mathbb{A}^2_k \to Z = \mathbb{A}^2_k$, $(u, v) \mapsto (u, uv)$, qui correspond au morphisme de k-algèbres $k[T_1, T_2] \to k[U, V]$, $T_1 \mapsto U$, $T_2 \mapsto UV$. Ce morphisme est injectif, donc d'après la démonstration précédente, l'adhérence de $f(X)$ est $Y = Z = \mathbb{A}^2_k$. Mais $f(X)$ ne contient aucun des idéaux maximaux $(T_1, T_2 - \lambda)$ pour $\lambda \in k^\times$; en fait, $\mathfrak{m} = (T_1, T_2)$ est le seul élément de $f(X)$ qui contienne T_1. En effet, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $k[U, V]$ tel que $f(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ contienne T_1, alors $\mathfrak{p}$ contient $\phi(T_1) = U$ donc contient aussi $UV = \phi(T_2)$, donc $f(\mathfrak{p})$ contient (T_1, T_2) qui est maximal, d'où $f(\mathfrak{p}) = (T_1, T_2)$.

***Définition 4.18* (Modules plats et fidèlements plats)**. — On rappelle que pour tout A-module P le foncteur $P \otimes_A -$ est exact à droite. On dit que P est un A-module *plat* si ce foncteur est exact. On dit que P est *fidèlement plat* s'il est plat et si $P \otimes_A M \neq \{0\}$ pour tout A-module M non nul.

***Définition 4.19* (Morphismes plats et fidèlements plats)**

Un morphisme d'anneaux $\phi : A \to B$ est dit *plat* (resp. *fidèlement plat*) si B est un A-module plat (resp. fidèlement plat). On peut montrer que ϕ est fidèlement plat si et seulement si il est plat et si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B tel que $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$. Dans ce cas, on montre que le morphisme $\phi^\sharp : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ est *surjectif*.

On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de k-schémas est *plat* si, pour tout $x \in X$, le morphisme $\mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est plat (et donc fidèlement plat, puisque $\mathfrak{m}_{f(x)}$ est l'image inverse de $\mathfrak{m}_x$). Ceci équivaut à dire que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de Y et tout ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de X tel que $f(V) \subset U$, le morphisme $A \to B$ est plat. Enfin, on dit que f est *fidèlement plat* s'il est plat et surjectif.

On peut montrer le lemme suivant :

Lemme 4.20. — *Si un morphisme de k-schémas $f : X \to Y$ est plat (resp. fidèlement plat), il en est de même du morphisme* $\mathrm{id}_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$, *pour tout k-schéma Z.*

Définition 4.21. — On dit qu'un k-schéma X est **de type fini** s'il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ où chaque k-algèbre A_i est de type fini. Si A est une k-algèbre de type fini, il en est de même de $A_f = A[T]/[fT - 1)$, pour tout $f \in A$, donc $\mathrm{Spec}(A)$ ainsi que chaque ouvert $D_f = \mathrm{Spec}(A_f)$ est un k-schéma de type fini.

Si X est de type fini, on peut montrer que tout ouvert de X est réunion d'un nombre **fini** d'ouverts affines, et que tout sous-schéma ouvert ou fermé de X est encore un k-schéma de type fini. D'autre part, $\mathbb{P}^n_k$ est de type fini, car on a vu qu'il est recouvert par $n+1$ ouverts affines, chacun isomorphe à $\mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$.

On admet le théorème suivant :

***Théorème 4.22* (de platitude générique)**. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre k-schémas de type fini, avec Y* réduit. *On suppose que f est dominant, i.e. que $f(X)$ est dense dans Y. Alors il existe un ouvert dense U de Y, contenu dans $f(X)$, tel que le morphisme $f : f^{-1}(U) \to U$ soit fidèlement plat.*

En particulier, $f(X)$ contient un ouvert dense de son adhérence.

Définition 4.23. — On dit qu'un k-schéma en groupes G est *lisse* si $k[G]$ est une k-algèbre de type fini et si $k[G] \otimes \overline{k}$ est réduite, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k.

Remarque 4.24. — (i) La condition que $k[G] \otimes \overline{k}$ soit réduite entraîne que pour tout k-schéma Y, le k-schéma $G \times Y$ est réduit.

(ii) Si k est un corps parfait, il suffit de supposer que $k[G]$ est réduit. Mais si k est un corps non parfait, par exemple si $k = \mathbb{F}_p(T)$, il existe des k-schémas en groupes affines G tels que $k[G] \otimes \overline{k}$ ne soit pas réduite.

Proposition 4.25. — *Soient G un k-schéma en groupes* lisse, *X un k-schéma* réduit et de type fini, *$\mu : G \times X \to X$ une action de G sur X. Soit $x \in X(k)$ et $\phi_x : G \to X$ le morphisme correspondant. Alors :*

(i) *$\mathscr{O} = \phi_x(G)$ est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé réduit de X, et $\mathscr{O}$ est appelée l'orbite de x sous G.*

(ii) *Le morphisme $\phi_x : G \to \mathscr{O}$ est fidèlement plat.*

(iii) *$\mathscr{O}$ est stable par l'action de G, i.e. le morphisme $\mu : G \times \mathscr{O} \to X$ se factorise à travers $\mathscr{O}$.*

Démonstration. — Soit Z l'adhérence de $\phi_x(G)$ dans X, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Comme G est réduit, ϕ_x se factorise en un morphisme $\phi_x : G \to Z$ qui est dominant. D'après le th. de platitude générique, $\phi_x(G)$ contient un ouvert dense U de Z, tel que $\phi_x^{-1}(U) \to U$ soit plat. Alors V est un ouvert non vide de G. Montrons que $\phi_x(G)$ est un ouvert de Z.

On admet qu'il suffit de le montrer lorsque $k = \overline{k}$. Sous cette hypothèse, la réunion Ω des ouverts gV, pour g parcourant $G(k)$, est égale à G tout entier. En effet, comme G est un k-schéma de type fini, toute partie non vide ouverte ou fermée de G contient au moins un point fermé, en particulier V contient au moins un point fermé h donc Ω contient tous les points fermés donc son complémentaire est un fermé de G qui ne contient aucun point fermé donc qui est vide.

On a donc $\phi_x(G) = \phi_x(\bigcup_g g\phi_x^{-1}(U)) = \bigcup_g gU$. Or g induit un automorphisme du schéma X donc gU est un ouvert de gZ et gZ est l'adhérence de $g\phi_x(G) = \phi_x(G)$ donc égale Z. Donc $\mathscr{O} = \phi_x(G)$ est bien un ouvert de Z. Ceci prouve (i).

Comme g induit des automorphismes de G et de X et que $\phi_x^{-1}(U) \to U$ est plat, il en est de même du morphisme $g\phi_x^{-1}(U) \to gU$, et comme les gU recouvrent $\mathscr{O}$ il en résulte que $\phi_x : G \to \mathscr{O}$ est plat, donc fidèlement plat puisque surjectif. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \mu"] \arrow[d, "m_G \times \mathrm{id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\mu"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times \phi_x"] \arrow[d, "m_G"'] & G \times Y \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\phi_x"] & X \end{tikzcd}$$

et il faut montrer que $\mu(G \times Y) \subset Y$. Comme ϕ_x est fidèlement plat, il en est de même de $\mathrm{id}_G \times \phi_x$ donc celui-ci est surjectif, donc il suffit de montrer que $\phi_x \circ m_G$ est contenu dans Y, ce qui est bien le cas. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Terminologie 4.26. — Un sous-k-schéma fermé d'un k-schéma $\mathbb{P}(V)$ est appelé un k-schéma projectif. Un sous-k-schéma ouvert d'un k-schéma projectif est appelé un k-schéma quasi-projectif.

On peut maintenant énoncer le :

Théorème 4.27. — *Soit G un k-schéma en groupes lisse et H un sous-schéma en groupes fermé. Soit V un G-module de dimension finie contenant une droite D telle que le stabilisateur G_D égale H et soit $\mathscr{O}$ l'orbite de D dans $\mathbb{P}(V)$. Alors :*

(i) *Le morphisme $\phi = \phi_D : G \to \mathscr{O}$ est fidèlement plat.*

(ii) *Pour toute k-algèbre R, on a $H(R) = \{g \in G(R) \mid g(D \otimes 1) = D \otimes 1\}$.*

(iii) *On dit que le k-schéma quasi-projectif $\mathscr{O}$ « est » le quotient G/H : il a toutes les bonnes propriétés voulues, en particulier :*

> (1) *ϕ induit une bijection $G(\overline{k})/H(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\overline{k})$.*
>
> (2) *Le morphisme $\phi_D : G \to \mathscr{O}$ a toutes les propriétés universelles qu'on peut espérer, en particulier le quotient G/H ne dépend pas du choix de (V, D).*

Esquisse de démonstration. — (i) découle de la proposition précédente et (ii) du fait que $H = G_D$. Esquissons la preuve du point (1) de (iii). Comme ϕ est fidèlement plat, il en est de même du morphisme $\phi_{\overline{k}} : G \times \overline{k} \to \mathscr{O} \times \overline{k}$ obtenu par extension des scalaires. Soit $x \in \mathscr{O}(\overline{k})$ alors x correspond à un point fermé de $\mathscr{O} \times \overline{k}$ qu'on notera encore x. Comme $\phi_{\overline{k}}$ est surjectif, l'image inverse $\phi_{\overline{k}}^{-1}(x)$ est non vide ; or c'est un sous-schéma fermé du $\overline{k}$-schéma de type fini $G \times \overline{k}$, donc elle contient au moins un point fermé g, qui est donc un élément de $G(\overline{k})$ tel que $\phi_{\overline{k}}(g) = x$.

On ne détaille pas ici le point (2). Les lecteurs intéressés pourront consulter [DG, III, §3] ou [SGA3, VI_A, §5]. □

Remarque 4.28. — Attention, si k n'est pas algébriquement clos, le morphisme $G(k) \to (G/H)(k)$ n'est pas nécessairement surjectif. Par exemple, prenons $k = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T, T^{-1}])$ et $H = \mu_{2,\mathbb{R}}$. Dans ce cas, on peut montrer (voir plus bas) que $G/H \simeq G$ et que le morphisme $G \to G/H$ correspond à l'inclusion $k[T^2, T^{-2}] \subset k[T, T^{-1}]$, i.e. pour toute $\mathbb{R}$-algèbre R le morphisme $G(R) = R^\times \to (G/H)(R) = R^\times$ est donné par $r \mapsto r^2$. Ceci est surjectif si $R = \mathbb{C}$, mais n'est pas surjectif pour $R = \mathbb{R}$.