Semaine 3 : Groupes diagonalisables, composante connexe, th. du point fixe de Borel, décomposition de Jordan

Références pour ce chapitre :

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§§ 8–11)

[Wa] William C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer-Verlag, 1979. (chap. 2–10)

Et aussi :

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011. (VI_B, §6)

[DG] Michel Demazure & Pierre Gabriel, Groupes algébriques, Masson & North-Holland, 1970. (§§ II.5.1 & IV.2)

6. Caractères et groupes diagonalisables

(1) k désigne un corps et « k-schéma en groupes » signifie k-schéma en groupes *affine*.

***Définition 6.1* (Groupe des caractères).** — Soit H un k-schéma en groupes. Un **caractère** χ de H est un morphisme de k-schémas en groupes de H vers le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$; plus précisément, se donner un tel morphisme équivaut à se donner un morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : k[T, T^{-1}] \to k[H]$, et ceci équivaut à se donner l'élément $\chi = \phi(T)$ qui doit être un élément inversible de $k[H]$ vérifiant de plus :

$$\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi, \qquad \varepsilon(\chi) = 1, \qquad \tau(\chi) = \chi^{-1},$$

où τ désigne l'antipode de $k[H]$. En fait, les conditions $\chi \neq 0$ et $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ entraînent toutes les autres. En effet, l'égalité $\chi = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(\chi)$ donne $\chi = \varepsilon(\chi)\chi$ et ceci, joint au fait que $\chi \neq 0$, donne $\varepsilon(\chi) = 1$. Alors, notant u le morphisme d'algèbres $k \to k[H]$, l'axiome

$$u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ \Delta = m \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

entraîne que $1 = \chi\tau(\chi)$ donc χ est inversible pour la multiplication de $k[H]$, d'inverse $\tau(\chi)$. Bref, on peut résumer ceci en disant : « un caractère de H est un élément $\chi \neq 0$ de $k[H]$ tel que $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ ».

On note $X(H)$ l'ensemble des caractères de H (il peut être réduit à la fonction constante 1). Si $\chi, \chi' \in X(H)$ alors

$$\Delta(\chi^{-1}\chi') = \Delta(\chi)^{-1}\Delta(\chi') = (\chi^{-1} \otimes \chi^{-1})(\chi' \otimes \chi') = \chi^{-1}\chi' \otimes \chi^{-1}\chi',$$

donc $\chi^{-1}\chi' \in X(H)$. On en déduit que $X(H)$ est un groupe, appelé le **groupe des caractères** de H. Comme ce groupe est abélien, sa loi est souvent notée additivement, i.e. on note $-\chi$ le caractère $\chi^{-1} = \tau(\chi)$ i.e. pour tout k-algèbre R et $h \in H(R)$ on a : $(-\chi)(h) = \chi(h)^{-1} = \chi(h^{-1})$.

Proposition 6.2. — *Les caractères de H sont linéairement indépendants dans $k[H]$.*

(1) Le fait que G/H est un k-schéma en groupes affine si H est distingué dans G constitue la section 5 et sera ajouté dans le polycopié de la semaine 2.

Démonstration. — Supposons qu'on ait une égalité $t_0\chi_0+\cdots+t_r\chi_r = 0$ avec les $\chi_i \in X(H)$ deux à deux distincts, les $t_i \in k$ non nuls et r minimal. Alors, par minimalité de r, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ sont linéairement indépendants. Remplaçant t_i par $-t_i/t_0$ pour tout $i \geq 1$, l'égalité se récrit $\chi_0 = \sum_{i=1}^r t_i\chi_i$. Alors on a

$$\sum_{i=1}^r t_i\chi_i \otimes \chi_i = \Delta(\chi_0) = \chi_0 \otimes \chi_0 = \sum_{i,j=1}^r t_it_j\chi_i \otimes \chi_j$$

et comme les $\chi_i \otimes \chi_j$ sont linéairement indépendants ceci donne $t_i = t_i^2$ et $t_it_j = 0$ si $i \neq j$. Comme les $t_i \in k$ sont non nuls, ceci donne $r = 1$ et $t_1 = 1$, d'où $\chi_0 = \chi_1$, contredisant l'hypothèse que les χ_i étaient deux à deux distincts. Ceci montre qu'il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre les éléments de $X(H)$. $\square$

***Définition et proposition 6.3* (Espaces de poids).** — *Soit V un H-module.*

(i) *Si $\chi \in X(H)$, on pose*

$$V_\chi = \{v \in V \mid \Delta_V(v) = v \otimes \chi\}$$

et on l'appelle « l'espace de poids χ » *dans V (il peut bien sûr être nul). C'est le sous-espace formé des $v \in V$ tels que pour toute k-algèbre R et tout $h \in H(R)$ on ait dans $V \otimes R$ l'égalité $h(v \otimes 1) = v \otimes \chi(h)$. (En particulier, pour tout $h \in H(k)$ on a $hv = \chi(h)v$.)*

(ii) *Les espaces de poids sont en* **somme directe**, *i.e. si $\chi_1, \ldots, \chi_r \in X(H)$ sont deux à deux distincts et si des $v_i \in V_{\chi_i}$ vérifient $v_1 + \cdots + v_r = 0$, alors $v_i = 0$ pour tout i.*

Démonstration. — Supposons $v_1 + \cdots + v_r = 0$. Alors on a :

$$0 = \sum_{i=1}^r \Delta_V(v_i) = \sum_{i=1}^r v_i \otimes \chi_i$$

et comme les χ_i sont linéairement indépendants, ceci entraîne $v_i = 0$ pour tout i. $\square$

Insérons ici la démonstration d'un point technique laissé en suspens au §5 dans la démonstration du fait que si H est un sous-schéma en groupes *distingué* de G alors le quotient G/H est affine.

Proposition 6.4. — *Soient G un k-schéma en groupes* lisse*, H un sous-schéma en groupes* distingué*, V un G-module. On suppose qu'il existe une droite $D = kv$ sur laquelle H agit par le caractère χ. Soit E le sous-G-module de V engendré par v. Alors le G-module dual E^* contient une droite sur laquelle H agit par le caractère $-\chi$.*

Remarque 6.5. — Notons d'abord que la proposition n'est pas évidente. En effet, si l'on note k_χ le H-module de dimension 1 sur lequel H agit par χ, l'hypothèse est qu'on a une injection de H-modules $k_\chi \subset E$ et donc par dualité on a une surjection de H-modules $E^* \to (k_\chi)^* = k_{-\chi}$, mais ceci n'entraîne pas en général qu'il existe un sous-H-module de E^* isomorphe à $k_{-\chi}$.

Démonstration. — Montrons que l'espace de poids $(E^*)_{-\chi}$ est non nul. Notons $\mu : E^* \to E^* \otimes k[G]$ la coaction et $\mu_H : E^* \to E^* \otimes k[H]$ celle qui s'en déduit par le morphisme d'algèbres de Hopf $k[G] \to k[H]$.

Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, il suffit de montrer que $(E^*_{\overline{k}})_{-\chi}$ est non nul. En effet, soit $(t_i)_{i\in I}$ une base de $\overline{k}$ sur k ; s'il existe $w \in E^*_{\overline{k}}$ non nul tel que $\mu_H(w) = w \otimes \chi^{-1}$, écrivons $w = \sum_i v_i \otimes t_i$ avec les v_i dans E^* (et nuls sauf pour un nombre fini d'indices). Alors l'égalité

$$\sum_i \mu_H(v_i) \otimes t_i = \mu_H(w) = w \otimes \chi^{-1} = \sum_i v_i \otimes \chi^{-1} \otimes t_i$$

entraîne que $\mu_H(v_i) = v_i \otimes \chi^{-1}$ pour tout i, d'où $(E^*)_{-\chi} \neq (0)$ puisque les v_i ne sont pas tous nuls (car $w \neq 0$).

Comme G est supposé lisse, alors $k[G] \otimes \overline{k}$ est réduite. Remarquons aussi que d'après la construction de E, $E \otimes \overline{k}$ est le sous-$(G_{\overline{k}})$-module de $V \otimes \overline{k}$ engendré par $v \otimes 1$ (cf. Prop. 1.15). Ceci étant dit, remplaçons k par $\overline{k}$ pour alléger l'écriture, i.e. plaçons-nous dans le cas où k est algébriquement clos. Dans ce cas, on a le lemme suivant :

Lemme 6.6. — *E est le sous-espace vectoriel de V engendré par les éléments gv, pour $g \in G(k)$.*

Démonstration du lemme. — Notons E' le sev sus-mentionné. Il est clair que $v \in E' \subset E$ et il suffit de montrer que E' est G-stable, car ceci entraînera que $E = E'$. Or il est clair que E' est stable par $G(k)$, et en utilisant l'exercice 4 de la feuille de TD no. 2 on peut montrer que ceci entraîne que E' est G-stable. Donnons-en une autre démonstration (qui repose en fait sur la même idée).

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \ldots, e_d)$ soit une base de E'. Pour $j = 1, \ldots, d$ écrivons :

$$\mu(e_j) = \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes a_{ij} + \sum_{i=d+1}^{n} e_i \otimes b_{ij}$$

avec $a_{ij}, b_{ij} \in k[G]$. D'une part, comme $k = \overline{k}$ alors $G(k)$ est en bijection avec les idéaux maximaux de $k[G]$. D'autre part, comme E' est stable par $G(k)$ alors pour tout $j = 1, \ldots, d$ et $i > d$ et tout $g \in G(k)$ on a $g(b_{ij}) = 0$ i.e. b_{ij} appartient à l'idéal maximal correspondant à g, donc b_{ij} appartient à l'intersection de tous les idéaux maximaux de $k[G]$. Comme $k[G]$ est une k-algèbre de type fini, cette intersection est égale à l'intersection de tous les idéaux premiers, i.e. l'ensemble des éléments nilpotents de $k[G]$. Or par hypothèse $k[G]$ est réduite, d'où $b_{ij} = 0$. Ceci prouve le lemme, i.e. $E = E'$. $\square$

Revenons à la preuve de la proposition. Fixons $g \in G(k)$. Pour toute k-algèbre R et tout $h \in H(R)$, on a dans $E \otimes R$ l'égalité :

$$h(gv \otimes 1) = g(g^{-1}hg)(v \otimes 1) = g(v \otimes \chi(g^{-1}hg)) = gv \otimes \chi(g^{-1}hg)$$

car $g^{-1}hg \in H(R)$ puisque H est distingué dans G. Notant χ_g le caractère de H défini par $\chi_g(h) = \chi(g^{-1}hg)$ pour tout $h \in H(R)$ (ceci définit bien un morphisme de foncteurs en groupes $H(R) \to \mathbb{G}_{m,k}(R)$, donc un caractère $\chi_g \in X(H)$), ceci montre que $gv \in E_{\chi_g}$. Comme E est engendré par les gv et comme la somme des espaces de poids est directe, on en déduit qu'il existe un nombre fini de caractères $\chi = \chi_0, \ldots, \chi_r$ tels que, comme H-module

$$E = E_\chi \oplus \cdots \oplus E_{\chi_r}.$$

Alors, prenant le dual, on obtient que le G-module E^* se décompose comme H-module en :

$$E^* = (E_\chi)^* \oplus \cdots \oplus (E_{\chi_r})^* = (E^*)_{-\chi} \oplus \cdots \oplus (E^*)_{-\chi_r},$$

d'où $(E^*)_{-\chi} \neq 0$. La proposition est démontrée. $\square$

***Définition 6.7* (Le k-schéma en groupes $D_k(M)$ associé à un groupe abélien M)**

Soit M un groupe abélien. On lui associe la k-algèbre commutative kM, qui a une base $(e_m)_{m\in M}$ indexée par les éléments de M et où la multiplication, k-bilinéaire, est définie par $e_m e_{m'} = e_{m+m'}$ pour tout $m, m' \in M$. Elle est munie d'une structure d'algèbre de Hopf, définie par :

$$\Delta(e_m) = e_m \otimes e_m, \qquad \varepsilon(e_m) = 1, \qquad \tau(e_m) = e_{-m}.$$

On obtient ainsi un k-schéma en groupes $\boxed{D_k(M) = \operatorname{Spec}(kM).}$

Par exemple, si $M \simeq \mathbb{Z}^r$ alors $kM \simeq k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_r^{\pm 1}]$ et donc $D_k(\mathbb{Z}^r)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^r$, i.e. à un produit de r copies du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$.

D'autre part, si $M \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors $kM \simeq k[T]/(T^n - 1)$ et donc $D_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est le k-schéma en groupes $\mu_{n,k}$ des racines n-ièmes de l'unité.

Si M est un groupe abélien **de type fini**, il est isomorphe à une somme directe

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

(et les n_i sont uniques si l'on impose que n_i divise n_{i+1}) et donc

$$kM \simeq k[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}, T_1, \ldots, T_s]/(T_1^{n_1} - 1, \ldots, T_s^{n_s} - 1)$$

est une k-algèbre de type fini et $D_k(M) \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^r \times \mu_{n_1,k} \times \cdots \times \mu_{n_s,k}$. Réciproquement, on a le :

Lemme 6.8. — *Soit M un groupe abélien. Si kM est une k-algèbre de type fini alors M est de type fini.*

Démonstration. — Supposons que kM soit engendrée comme k-algèbre par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_s$; ceux-ci s'écrivent comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments e_m. Notons N le sous-groupe de type fini de M engendré par ces e_m, alors kN contient les x_i donc égale kM. Donc tout élément e_m s'écrit comme combinaison linéaire des e_n, avec $n \in N$, et par indépendance linéaire ceci entraîne que m est l'un des n, i.e. que $M = N$. Ceci prouve que M est de type fini. $\square$

***Définition 6.9* (Groupes diagonalisables).** — On dit que le k-schéma en groupes H est *diagonalisable* si $X(H)$ engendre $k[H]$ comme espace vectoriel (donc en forme une base d'après la proposition 6.2). Dans ce cas, on voit que $k[H]$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf, à l'algèbre de groupe $kX(H)$ et donc $H \simeq D_k(M)$, où $M = X(H)$. Par conséquent, si l'on suppose de plus que H est un k-schéma de type fini, on obtient que H est isomorphe à un produit fini de groupes $\mathbb{G}_{m,k}$ et $\mu_{n,k}$, pour différents n.

Proposition 6.10. — *Soient H un k-schéma en groupes diagonalisable et V un H-module. Alors $V = \bigoplus_{\chi \in X(H)} V_\chi$.*

Démonstration. — Soit $v \in V$ non nul. Comme $k[H] = \bigoplus_{\chi \in X(H)} k\chi$ on peut écrire de façon unique

$$\Delta_V(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \chi_i$$

avec les χ_i deux à deux distincts et les v_i non nuls $\big(\Delta_V(v) \neq 0$ car $(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)\Delta(v) = v\big)$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \chi_i \otimes \chi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_V(v_i) \otimes \chi_i$$

et comme les χ_i sont linéairement indépendants ceci donne $\Delta_V(v_i) = v_i \otimes \chi_i$, i.e. $v_i \in V_{\chi_i}$. Alors l'égalité

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon(\chi_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

montre que v appartient à la somme des V_χ. Donc cette somme égale V. Et comme cette somme est toujours une somme directe, ceci prouve la proposition. $\square$

Corollaire 6.11. — *Soient H un k-schéma en groupes diagonalisable et*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

une suite exacte de H-modules. Alors, pour tout $\chi \in X(H)$, la suite d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow N_\chi \longrightarrow M_\chi \longrightarrow Q_\chi \longrightarrow 0$$

est exacte. (*Et la réciproque est évidemment vraie.*) [(2)]

Démonstration. — Laissée au lecteur. $\square$

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.12. — (i) *Soit M un groupe abélien de type fini. Les sous-k-schémas en groupes fermés de $H = D_k(M)$ sont les $H_N = D_k(M/N)$, pour N parcourant les sous-groupes de M, et le quotient H/H_N est isomorphe à $D_k(N)$.*

(ii) *La catégorie des groupes abéliens de type fini est anti-équivalente à celle des k-schémas en groupes diagonalisables de type fini.*

[(2)] En d'autres termes, la catégorie des H-modules est équivalente à celle des k-ev gradués par le groupe abélien $X(H)$.

***Définition 6.13* (Tores et tores déployés).** — Un rôle particulièrement important est joué par les groupes $D_k(\mathbb{Z}^r) \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^r$. Un tel groupe est appelé un *tore déployé* de dimension r. [(3)] On dit *tore déployé* car on introduit la définition plus générale suivante.

Un k-schéma en groupes de type fini T est appelé un tore de dimension r si $T \times \overline{k}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\overline{k}}$. Si $k = \overline{k}$ tous les tores sont déployés, mais si $k \neq \overline{k}$ il peut exister des tores non déployés, voir l'exemple ci-dessous. Dans la suite on se placera sur un corps algébriquement clos, donc on n'aura pas besoin de faire la distinction entre « tores » et « tores déployés ».

Exemple 6.14. — Soient $k = \mathbb{R}$ et $T = \mathrm{SO}_{2,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$. Alors T représente le foncteur en groupes qui à toute k-algèbre R associe le sous-groupe suivant de $\mathrm{GL}_2(R)$:

$$\mathrm{SO}_2(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \mid 1 = \mathrm{dét}(M) = x^2 + y^2 \right\}.$$

Ceci est bien un sous-groupe car

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - yx' \\ xy' + yx' & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Donc la structure d'algèbre de Hopf est donnée par $\Delta(X) = X \otimes X - Y \otimes Y$, $\Delta(Y) = X \otimes Y + Y \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$, $\varepsilon(Y) = 0$, $\tau(X) = X$ et $\tau(Y) = -Y$.

D'autre part, $A_{\mathbb{C}} = A \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ (en posant $t = X + iY$) et l'on peut vérifier que la structure d'algèbre de Hopf est bien celle de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Ou bien, pour toute $\mathbb{C}$-algèbre R, on peut remplacer la base canonique (e_1, e_2) de R^2 par la base $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ où $f_1 = e_1 - ie_2$ et $f_2 = e_1 + ie_2$; en écrivant la matrice M précédente dans cette nouvelle base, on voit que :

$$T_{\mathbb{C}}(R) = \left\{ M' = \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \mid 1 = \mathrm{dét}(M') = x^2 + y^2 \right\}$$

et que l'application $T_{\mathbb{C}}(R) \to R^{\times}$, $(x, y) \mapsto z = x + iy$ est un morphisme de groupes, fonctoriel en R, et bijectif car sa réciproque est donnée par

$$z \mapsto (x, y) = \Big(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2} \Big).$$

Ceci montre que $T_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, donc T est un $\mathbb{R}$-tore de dimension 1. Mais il n'est pas déployé, car $V = \mathbb{R}^2$ est de façon naturelle un T-module, i.e. le morphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \to \mathrm{GL}_2$ correspond à la coaction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes A, \qquad e_1 \mapsto e_1 \otimes X + e_2 \otimes Y, \quad e_2 \mapsto e_1 \otimes (-Y) + e_2 \otimes X.$$

Ce T-module n'est pas somme directe d'espaces de poids $V_\chi \oplus V_{\chi'}$, car sinon $T(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ agirait sur $\mathbb{R}^2$ de façon diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

7. Composante connexe d'un k-schéma en groupes de type fini

***Définition 7.1* (Espaces topologiques noethériens).** — (i) Soient A une k-algèbre *de type fini* et $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Comme les fermés de Y sont les $V(I)$, pour I un idéal de A tel que $I = \sqrt{I}$, que pour deux tels idéaux I, J on a $V(I) \supset V(J) \Leftrightarrow I \subset J$ et que toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire, on voit que Y vérifie la propriété suivante :

$(\star)$ Toute suite décroissante de fermés de Y est stationnaire.

Un espace topologique vérifiant cette propriété est dit **noethérien**.

(ii) Remarquons que cette propriété est aussi vérifiée par tout k-schéma de type fini X (pas nécessairement affine). En effet, par hypothèse X est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, avec A_i une k-algèbre de type fini. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de X. Pour chaque i, $F_n \cap U_i$ est un fermé de U_i donc cette suite est stationnaire à partir d'un certain n_i. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts U_i,

[(3)] On verra plus bas la notion de dimension.

la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire pour $n \geq \mathrm{Max}(n_i)$. Ceci prouve que X est un espace topologique noethérien.

(iii) Remarquons aussi que la propriété $(\star)$ est équivalente à la suivante :

$(\star')$ Tout ensemble non vide de fermés de Y possède au moins un élément minimal.

Définitions 7.2 **(Espaces topologiques irréductibles ou connexes)**
Soit X un espace topologique. On dira qu'un sous-ensemble de X est strict s'il est distinct de X.

(i) On dit que X est **irréductible** s'il n'est pas réunion de deux fermés stricts E, F, i.e. si la condition $X = E \cup F$ avec E, F fermés entraîne que $E = X$ ou $F = X$. Par passage aux complémentaires, ceci équivaut à dire que si U, V sont deux ouverts non vides de X, alors $U \cap V$ est non vide ; ceci équivaut aussi à dire que tout ouvert non vide U est *dense*. Et aussi, on voit par récurrence sur n que si X est irréductible et égal à une réunion de fermés $X_1, \ldots, X_n$, alors il est égal à l'un d'eux.

(ii) On dit qu'une partie Y de X est irréductible si, munie de la topologie induite c'est un espace topologique irréductible. Ceci équivaut à dire que si E, F sont deux fermés de X tels que $Y \subset E \cup F$, alors Y est contenu dans E ou dans F. On voit ainsi que : Y est irréductible si et seulement si son adhérence $\overline{Y}$ l'est. On voit aussi que si Y est irréductible et contenu dans une réunion de fermés $F_1, \ldots, F_n$ de X, alors il est contenu dans l'un d'eux.

(iii) D'autre part, on rappelle la notion plus familière suivante : X est dit *connexe* s'il n'est pas réunion *disjointe* de deux fermés stricts E, F, i.e. si la condition $X = E \sqcup F$ avec E, F fermés (et donc aussi ouverts) entraîne que $E = X$ (et $F = \varnothing$) ou $F = X$ (et $E = \varnothing$). Ceci équivaut à dire que toute partie à la fois ouverte et fermée de X est soit vide soit égale à X.

(iv) Il est clair que tout espace irréductible est connexe, mais la réciproque est fausse en général (voir exemple plus bas).

Lemme 7.3. — *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Si X est irréductible (resp. connexe), il en est de même de $f(X)$.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Exemple 7.4. — Soit A une k-algèbre de type fini, donc noethérienne. On sait alors que les idéaux premiers minimaux de A sont en nombre fini, notons-les $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, et que tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ contient au moins un des $\mathfrak{p}_i$. Alors $\mathrm{Spec}(A)$ est la réunion des fermés

$$F_i = V(\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i\} \simeq \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}_i)$$

et chacun de ces fermés est irréductible. En effet, supposons que $F_i \subset V(I) \cup V(J)$, où I, J sont deux idéaux de A ; alors $\mathfrak{p}_i$ contient I ou J, disons I. Mais alors $F_i \subset V(I)$. Ceci montre que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est réunion des fermés $F_1, \ldots, F_n$, qui sont irréductibles.

Si $n = 2$ et si F_1 et F_2 ont un point en commun, alors $X = F_1 \cup F_2$ est connexe (car F_1 et F_2 le sont) mais n'est pas irréductible. Ceci est le cas par exemple si $A = \mathbb{C}[T_1, T_2]/T_1T_2$, car A a deux idéaux premiers minimaux : (T_1) et (T_2), et $V(\mathfrak{p}_1)$ et $V(\mathfrak{p}_2)$ ont en commun l'idéal maximal (T_1, T_2).

L'écriture donnée plus haut de $\mathrm{Spec}(A)$ comme réunion finie de fermés irréductibles est valable pour tout espace topologique noethérien, en particulier pour tout k-schéma de type fini.

Définition et proposition 7.5 **(Composantes irréductibles et composantes connexes)**
Soit X un espace topologique noethérien.

(i) *On peut écrire* $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ *où les* X_i *sont des fermés irréductibles, et avec* n *minimal (i.e. aucun* X_i *n'est contenu dans la réunion des autres* X_j*). Ces* X_i *sont uniquement déterminés et s'appellent les* composantes irréductibles *de* X*. Ce sont les fermés irréductibles maximaux, i.e. tout fermé irréductible est contenu dans au moins l'un des* X_i*.*

(ii) X *est réunion d'un nombre fini de composantes connexes. Chacune d'elles est réunion des* X_i *qu'elle contient et est fermée et* **ouverte**.

Démonstration. — Donnons d'abord une démonstration valable pour tout espace topologique noethérien. Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Si $\mathscr{F}$ était non vide, alors d'après $(\star')$ il contiendrait un élément minimal Z, nécessairement non irréductible. Donc Z est réunion de deux fermés stricts Z_1 et Z_2 et par minimalité de Z, Z_1 et Z_2 sont des réunions finies de fermés irréductibles, et donc il en est de même de Z, contradiction ! Cette contradiction montre que $\mathscr{F} = \varnothing$ et donc X est réunion finie de fermés irréductibles.

Dans le cas d'un k-schéma X de type fini, on peut aussi raisonner comme suit : X est recouvert par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, avec A_i une k-algèbre de type fini, pour $i = 1, \ldots, s$. On a vu dans l'exemple 7.4 que chaque U_i est réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles U_{ij}. Notons F_{ij} l'adhérence dans X de U_{ij}, c'est un fermé irréductible, et X est contenu dans la réunion des F_{ij}.

Avec l'une ou l'autre des démonstrations, on obtient que X est réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles. Considérons alors une écriture $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ où les X_i sont des fermés irréductibles, avec n **minimal**.

Si Y est un sous-espace irréductible de X, l'inclusion $Y \subset X_1 \cup \cdots \cup X_n$ entraîne que $Y \subset X_j$ pour un certain j. Par conséquent, tout sous-espace irréductible maximal de X est égal à l'un des X_j. Comme de plus on a choisi n minimal, alors aucun X_i n'est contenu dans un X_j avec $j \neq i$, donc chaque X_i est un sous-espace irréductible maximal de X. Ceci prouve l'unicité des X_i et achève la démonstration de (i).

(ii) Les X_i sont irréductibles donc connexes, et l'on sait que si C, D sont deux parties connexes ayant un point commun alors $C \cup D$ est connexe. Considérons alors le graphe Γ de sommets les entiers $1, \ldots, n$ et où (i, j) est une arête ssi $X_i \cap X_j \neq \varnothing$. Notons $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ les composantes connexes de ce graphe et notons C_s la réunion des X_i pour $i \in \Gamma_s$. Alors chaque C_s est fermé et connexe, et X est la réunion disjointe des C_s. Comme les C_s sont en nombre fini, il en résulte que chacun est aussi ouvert. Enfin, il est clair que les C_s sont les composantes connexes de X, i.e. les parties connexes maximales, car si D est une partie connexe non vide, elle est la réunion disjointe des parties ouvertes et fermées $D \cap C_s$, donc ces parties sont toutes vides sauf l'une d'elles qui égale D, donc on a $D \subset C_s$ pour un certain s. $\square$

Soit G un k-schéma en groupes de type fini. L'élément neutre $e \in G(k)$ correspond à un point fermé de G, qui n'est autre que l'idéal d'augmentation I de $k[G]$. La composante connexe C de G contenant e est notée G^0 ; comme c'est un ouvert de G alors, munie de la restriction du faisceau $\mathscr{O}_G$, c'est un sous-schéma ouvert de G, et comme C est aussi fermé, on peut montrer que G^0 est un k-schéma **affine de type fini**. On l'appelle **composante neutre** de G, ou parfois la « composante connexe » de G (sous-entendu : celle de l'élément neutre). Avant d'énoncer (et démontrer) le théorème qui affirme, entre autre, que G^0 est un sous-schéma en groupes distingué de G, on a besoin d'introduire la définition suivante.

Définition 7.6 **(k-schémas géométriquement irréductibles ou connexes)**
Soit X un k-schéma et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On dit que X est *géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*) si le $\overline{k}$-schéma $X_{\overline{k}} = X \times \overline{k}$ est irréductible (resp. connexe). Ceci entraîne en particulier que X est irréductible (resp. connexe), car la projection $X_{\overline{k}} \to X$ est surjective.

Remarque 7.7. — Si k n'est pas algébriquement clos, un k-schéma irréductible (resp. connexe) n'est pas nécessairement géométriquement irréductible (resp. géométriquement connexe). Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-schéma irréductible, mais $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ donc $X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ est formé de deux points, chacun fermé et ouvert, donc n'est pas connexe.

L'intérêt des notions « géométriquement irréductible ou connexe » apparaît dans le lemme suivant, que nous admettrons (une référence possible est EGA IV_2, §4.4).

Proposition 7.8. — *Soit X un k-schéma géométriquement irréductible (resp. connexe). Alors :*

(i) *Pour tout corps K contenant k, $X_K = X \times K$ est irréductible (resp. connexe).*

(ii) *Si Y est un k-schéma irréductible (resp. connexe), alors $X \times Y$ est irréductible (resp. connexe).*

***Théorème 7.9* (Composante neutre d'un k-schéma en groupes)**
Soit G un k-schéma en groupes de type fini et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

(i) *La composante neutre G^0 est un k-schéma* **en groupes** *affine de type fini.*

(ii) *G^0 est* géométriquement irréductible (*donc irréductible*) *et $G^0_{\overline{k}} = G^0 \times \overline{k}$ est la composante neutre de $G_{\overline{k}} = G \times \overline{k}$.*

(iii) *Toutes les composantes connexes de $G_{\overline{k}}$ sont irréductibles, et chacune est égale à $gG^0_{\overline{k}}$ pour un certain $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k})$.*

(iv) *G^0 est distingué dans G et donc G/G^0 est un k-schéma en groupes affine. Plus généralement, si H est un k-schéma en groupes de type fini agissant sur G par automorphismes de groupes, alors H laisse stable G^0.*

(v) *$(G/G^0)(\overline{k}) = G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$ est un groupe* **fini**. *Par conséquent, $G/G^0 = \mathrm{Spec}(B)$ pour une certaine algèbre de Hopf B de dimension finie sur k.*

Remarque 7.10. — Si k n'est pas algébriquement clos, on prendra garde qu'une composante connexe de G autre que la composante neutre n'est pas nécessairement géométriquement irréductible. Par exemple, soit G le $\mathbb{R}$-schéma en groupes $\mu_{3,\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T]/(T^3-1))$. Il est formé de deux points fermés : le point unité e, correspondant à l'idéal $(T-1)$, et le point α correspondant à l'idéal (T^2+T+1), dont le corps résiduel est $\mathbb{C}$. Donc $\{e\}$ et $\{\alpha\}$ sont chacun une composante irréductible de G. Mais $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]/(T^3-1))$ est formé des trois points (chacun étant une composante irréductible) qui correspondent aux idéaux $(T-1)$, $(T-j)$ et $(T-j^2)$.

Démonstration. — (ii) Notons π le morphisme de projection de $G_{\overline{k}} = G \times \mathrm{Spec}(\overline{k})$ vers G. On peut montrer, et nous l'admettrons, que π est ouvert et fermé. Soit alors U une partie ouverte et fermée non vide de $G^0_{\overline{k}}$, alors $\pi(U)$ est une partie ouverte et fermée non vide de G^0, donc égale G^0 donc contient le point e. Comme le corps résiduel de e est k, l'image inverse $\pi^{-1}(e)$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\overline{k})$ et son intersection avec U est non vide, donc $\pi^{-1}(e) \subset U$. Si le complémentaire U' de U dans $G^0_{\overline{k}}$ était non vide, on pourrait lui appliquer le même raisonnement, ce qui conduirait à une contradiction. Donc $U' = \varnothing$ et ceci montre que $G^0_{\overline{k}}$ est connexe. [4]

Donc $G^0_{\overline{k}}$ est contenu dans la composante neutre C de $G_{\overline{k}}$; mais $\pi(C)$ est connexe et contient e, donc est contenue dans G^0, donc C est contenue dans $\pi^{-1}(G^0) = G^0_{\overline{k}}$. Donc $G^0_{\overline{k}} = C$ est bien la composante neutre de $G_{\overline{k}}$.

Montrons que $G^0_{\overline{k}}$ est irréductible. Dans le cas contraire, il existerait deux composantes irréductibles F_1 et F_2 qui se rencontrent. Soit V l'ouvert complémentaire de la réunion des composantes irréductibles autres que F_1. Alors V (resp. le fermé $F_1 \cap F_2$) contient au

[4] Ce raisonnement montre que si X est un k-schéma connexe tel que $X(k) \neq \varnothing$, alors X est géométriquement connexe.

moins un point fermé g (resp. h), qu'on peut voir comme un élément de $G^0_{\overline{k}}(\overline{k})$. Alors la translation par hg^{-1} est un automorphisme de $G_{\overline{k}}$, qui induit donc un isomorphisme entre les anneaux locaux en g et en h ; ceux-ci ont donc le même nombre d'idéaux premiers minimaux. Or on peut montrer que pour tout k-schéma de type fini X et $x \in X$, le nombre d'idéaux premiers minimaux de $\mathscr{O}_{X,x}$ est égal au nombre de composantes irréductibles de X contenant x ; ce nombre est donc 1 pour g et ≥ 2 pour h, d'où une contradiction. Ceci montre que $G^0_{\overline{k}}$ est irréductible. Donc G^0 est géométriquement irréductible.

(i) Comme G^0 est géométriquement irréductible, alors $G^0 \times G^0$ est irréductible, donc connexe. Comme l'image d'un connexe par une application continue est connexe, les morphismes de multiplication $m : G^0 \times G^0 \to G$ et de passage à l'inverse $\iota : G^0 \to G$ ont leur image contenue dans G^0, donc G^0 est un sous-schéma en groupes ouvert (et fermé) de G. On a déjà dit qu'il est affine et de type fini.

(iii) Soit C une composante connexe de $G_{\overline{k}}$. C'est une partie fermée non vide du k-schéma de type fini $G_{\overline{k}}$ donc elle contient au moins un point $g \in G_{\overline{k}}(\overline{k})$. Alors, comme la translation par g est un isomorphisme de $G_{\overline{k}}$, on en déduit qu'elle induit un isomorphisme de la composante connexe de e sur celle de g, i.e. on a $C = gG^0_{\overline{k}}$.

(iv) La première assertion découle de la seconde, car G opère sur lui-même par automorphismes intérieurs, i.e. via le morphisme de k-schémas $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'g^{-1}$. Il suffit donc de montrer la seconde assertion. Écrivons H comme réunion disjointe de ses composantes connexes : $H = H^0 \sqcup \cdots \sqcup H^n$. Alors $H \times G$ est la réunion disjointe des $H^i \times G$, donc il suffit de montrer que chaque morphisme de k-schémas $H^i \times G^0 \to G$ se factorise par G^0. Or comme G^0 est géométriquement irréductible et H^i connexe, alors $H^i \times G^0$ est connexe donc son image l'est aussi, et elle contient e car H agit par automorphismes de groupes (i.e. l'image de $H^i \times e$ est e). Donc le morphisme se factorise bien par G^0.

(v) On sait déjà que $(G/G^0)(\overline{k}) = G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$. D'autre part, l'action par translation de $G(\overline{k})$ sur $G_{\overline{k}}$ induit une action de $G(\overline{k})$ sur l'ensemble fini E des composantes connexes de $G_{\overline{k}}$. Cette action est transitive, par (iii), et le stabilisateur de la composante neutre est $G^0(\overline{k})$ (car $gG^0 = G^0$ entraîne qu'il existe $h, h' \in G^0(\overline{k})$ tels que $gh = h'$, d'où $g = h'h^{-1} \in G^0(\overline{k})$). Donc $G(\overline{k})/G^0(\overline{k})$ est en bijection avec E, donc est fini.

D'autre part, comme G^0 est distingué, on sait que $G/G^0 = \mathrm{Spec}(B)$ pour une certaine k-algèbre de type fini B (égale aux G^0-invariants dans $k[G]$). Comme $(G/G^0)(\overline{k})$ est fini alors B n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$. [5] Comme c'est une k-algèbre de type fini, $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_s$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de B, donc est un idéal nilpotent I. Comme I est de type fini, il existe un entier n tel que $I^n = (0)$ et donc l'intersection des $\mathfrak{m}_i^n$ est nulle. Par le théorème chinois, B est donc isomorphe à la somme directe des $B/\mathfrak{m}_i^n$; or chacune de ces k-algèbres est de dimension finie, donc B l'est aussi. $\square$

Exemples 7.11. — (a) Soit p un nombre premier, $n = p^r m$ un entier ≥ 2, avec m premier avec p. Soit k un corps de caractéristique p et $G = \mu_{n,k}$. Alors $G^0 = \mu_{p^r,k}$ et $G/G^0 \simeq \mu_{m,k}$ (le morphisme $G \to G/G^0$ étant donné par $g \mapsto g^{p^r}$.)

(b) Soient k un corps, n un entier ≥ 2 et G le sous-schéma en groupes de $\mathrm{GL}_{n,k}$ formé des éléments qui normalisent le tore T des matrices diagonales, i.e. pour toute k-algèbre R,

$$G(R) = \{g = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \text{pour toute } R\text{-algèbre } R' \text{ et } t \in T(R'),\ gtg^{-1} \in T(R')\}.$$

On peut montrer que G est bien un schéma (i.e. que le foncteur ci-dessus est représenté par une certaine k-algèbre A), que $G^0 = T$ et que G/G^0 est isomorphe au groupe symétrique S_n.

[5] Noter qu'on peut avoir $s < |E|$, cf. la remarque 7.10.

Terminologie 7.12 **(Groupes connexes)**. — On dira qu'un k-schéma en groupes G est connexe si l'on a $G = G^0$. Noter que l'on dit « connexe » car c'est l'usage, mais qu'un groupe connexe est une variété (géométriquement) irréductible !

Dans ce cas, d'après la proposition 7.8 on a : *pour tout k-schéma X connexe (resp. irréductible), $G \times X$ est connexe (resp. irréductible).*

Cette hypothèse de connexité est très utile pour étudier certaines classes de k-schémas en groupes, voir la section suivante.

8. k-groupes lisses résolubles connexes

Désormais, on suppose k **algébriquement clos** et que tous les k-schémas en groupes G considérés sont **de type fini**. Si de plus G est réduit, donc lisse puisque $k = \overline{k}$, on dira simplement que G est « k-groupe algébrique ». On dira « sous-groupe fermé de G » pour « sous-k-schéma en groupes fermé réduit ». Lorsqu'on aura besoin de considérer un k-schéma en groupes H de type fini non nécessairement réduit, on écrira : « soit H un k-schéma en groupes ».

Terminologie 8.1 **(Sous-variétés localement fermées)**. — De même, tous les k-schémas X considérés seront réduits et de type fini, et l'on dira que X est une k-variété algébrique. Dans ce cas, on identifie $X(k)$ à l'ensemble des points fermés de X et on le munit de la topologie de Zariski. Alors l'application :

$$Z \mapsto Z(k)$$

est une bijection entre l'ensembles des sous-k-schémas fermés réduits de X et les sous-ensembles fermés de $X(k)$. (L'application réciproque associe à tout fermé F de $X(k)$ l'adhérence de F dans X, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de X.) On dira que Z, ou que $Z(k)$, est une « sous-variété fermée » de X.

Rappelons que, par définition, un « sous-schéma réduit » de X est un sous-schéma ouvert d'un sous-schéma fermé réduit de X. Alors la bijection précédente s'étend en une bijection

$$Y \mapsto Y(k)$$

entre l'ensembles des sous-k-schémas réduits de X et les parties localement fermées de $X(k)$. (En effet, cette application est injective et il suffit de voir qu'elle est bijective. Pour $L = F \cap U$, où F est ouvert et U fermé dans $X(k)$, on a $L = F - F'$ où $F' = X - U$, alors F et F' proviennent de sous-schémas fermés réduits Z et Z', et $V = X - Z'$ est un sous-schéma ouvert de X tel que $V(k) = X(k) - Z'(k)$ et donc si l'on pose $Y = Z \cap V$ on a $Y(k) = L$.) On dira que Y, ou que $Y(k)$, est une « sous-variété localement fermée » de X.

Lemme 8.2 **(de l'orbite fermée)**. — *Soit G un k-groupe algébrique opérant sur une k-variété algébrique X.*

(i) *Si une sous-variété localement fermée Y de X est stable par G, il en est de même de son adhérence $\overline{Y}$ et du fermé $\overline{Y} - Y$.*

(ii) *X contient au moins une G-orbite fermée.*

Démonstration. — (i) Montrons d'abord que $\overline{Y}$ est stable par G. Il suffit de montrer que $\overline{Y}(k)$ est stable par $G(k)$. Soit donc $g \in G(k)$. On a $gY(k) \subset Y(k) \subset \overline{Y}(k)$ donc l'image inverse du fermé $\overline{Y}(k)$ par l'application continue $x \mapsto gx$ contient $Y(k)$ et donc aussi $\overline{Y}(k)$. Il en résulte que $\overline{Y}(k)$ est stable par g, pour tout $g \in G(k)$.

Notons Z la sous-variété fermée $\overline{Y} - Y$. À nouveau, il suffit de montrer que $Z(k)$ est stable par $G(k)$. Soient $z \in Z(k)$ et $g \in G(k)$. Comme $\overline{Y}$ est G-stable on a $gz \in \overline{Y}(k)$.

Mais on ne peut avoir $gz \in Y(k)$ car sinon $z = g^{-1}(gz)$ appartiendrait à $Y(k)$. On a donc $gz \in Z(k)$ et ceci prouve (i).

Prouvons (ii). On sait que, pour tout $x \in X(k)$, son orbite sous G est une sous-variété localement fermée $\mathscr{O}_x$ stable par G. Notons $\overline{\mathscr{O}}_x$ son adhérence ; elle est G-stable d'après (i). Comme X est un espace topologique noethérien, l'ensemble $\mathscr{F}$ des adhérences d'orbites possède au moins un élément minimal $\overline{\mathscr{O}}_x$.

Si on avait $\mathscr{O}_x \neq \overline{\mathscr{O}}_x$ alors le fermé G-stable $Z = \overline{\mathscr{O}}_x - \mathscr{O}_x$ serait non vide donc contiendrait un point y de $X(k)$ ainsi que son orbite et que $\overline{\mathscr{O}}_y$. Alors celle-ci serait strictement contenue dans $\overline{\mathscr{O}}_x$, contredisant la minimalité. Ceci prouve que $\mathscr{O}_x = \overline{\mathscr{O}}_x$, d'où (ii). □

Définition 8.3. — Soit G un k-groupe algébrique. On dira que G est **résoluble** s'il existe une suite de sous-groupes fermés : $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r \supset G_{r+1} = \{e\}$ telle que chaque G_{i+1} soit distingué dans G_i et que le quotient G_i/G_{i+1} soit commutatif.

Lemme 8.4. — *Si G est résoluble* connexe*, il existe une suite comme ci-dessus avec chaque G_i* connexe*.*

Démonstration. — Comme G/G_1 est commutatif, le morphisme de schémas $\phi_0 : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ se factorise par G_1, et comme $G \times G$ est connexe, il se factorise par G_1^0. Ceci entraîne que G_1^0 est distingué dans G et que le groupe quotient G/G_1^0 est commutatif.

De même, comme G_1/G_2 est commutatif, le morphisme de schémas $\phi_1 : G_1 \times G_1 \to G_1$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ se factorise par G_2, et comme $G_1^0 \times G_1^0$ est connexe, il est envoyé par ϕ_1 dans G_2^0. Ceci entraîne que G_2^0 est distingué dans G_1^0 et que le groupe quotient G_1^0/G_2^0 est commutatif. On peut alors répéter cet argument et l'on obtient que la suite des G_i^0 convient. □

***Définition 8.5* (k-schémas séparés)**. — On dit qu'un k-schéma X est *séparé* si le morphisme diagonal $X \to X \times X$ est une immersion fermée, i.e. si la diagonale Δ_X est un sous-schéma fermé de $X \times X$. Comme on a supposé $k = \overline{k}$, ceci se récrit de façon plus simple comme suit :

(1) Si X est une k-variété algébrique, ceci équivaut à dire que l'ensemble des couples (x, x), pour $x \in X(k)$, est fermé dans $X(k) \times X(k)$.

(2) Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, la diagonale Δ_X est le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(A \times A)$ défini par l'idéal I noyau de la multiplication $A \otimes A \to A$, donc tout schéma affine est séparé. On peut aussi montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ est séparé.

(3) Si Y est une sous-variété localement fermée d'une variété algébrique séparée X, alors Δ_Y est l'intersection de $Y \times Y$ avec Δ_X, qui est fermé das $X \times X$, donc Δ_Y est fermée dans $Y \times Y$. Donc Y est séparée.

(4) D'après ce qui précède tout k-variété algébrique quasi-affine ou quasi-projective est séparée.

L'intérêt de cette notion apparaît dans la proposition suivante.

Proposition 8.6. — *Soit G un k-groupe algébrique opérant sur une k-variété algébrique* séparée *X et soit H un sous-groupe fermé* distingué *de G. Alors :*

(i) *$X^H(k) = \{x \in X(k) \mid hx = x$ pour tout $h \in H(k)\}$ est un fermé de $X(k)$, donc c'est l'ensemble des k-points d'une sous-variété fermée X^H de X (éventuellement vide), appelée la variété des points fixes de H dans X.*

(ii) *Le morphisme $G \times X^H \to X$ se factorise par X^H, donc G agit sur X^H.*

Démonstration. — (i) Soit $h \in H(k)$. Alors $X^h(k) = \{x \in X(k) \mid hx = x\}$ est l'image inverse de la diagonale de $X(k) \times X(k)$ par le morphisme $x \mapsto (hx, x)$, donc c'est un fermé de $X(k)$. Comme $X^H(k)$ est l'intersection des $X^h(k)$, pour $h \in H(k)$, il est aussi fermé.

(ii) Il suffit de montrer que $X^H(k)$ est stable par $G(k)$. Soient donc $x \in X^H(k)$ et $g \in G(k)$; alors pour tout $h \in H(k)$ on a :

$$h \cdot gx = g(g^{-1}hg)x = gx$$

donc $gx \in X^H(k)$. □

Remarque 8.7. — On peut montrer que le groupe algébrique G/H opère sur X^H, i.e. que le morphisme $G \times X^H \to X^H$ se factorise en un morphisme $(G/H) \times X^H \to X^H$. Mais nous n'aurons pas besoin de cela. En tout cas, il est clair que le groupe $(G/H)(k) = G(k)/H(k)$ agit sur $X^H(k)$.

Les variétés algébriques projectives (i.e. les sous-variétés fermées d'un espace projectif) ont certaines propriétés particulières, dont la suivante (que l'on admet pour le moment).

Proposition 8.8. — *Soit X une variété projective* connexe. *Alors $\mathscr{O}_X(X) = k$.*

***Théorème 8.9* (du point fixe de Borel).** — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble* connexe *agissant sur une variété projective $X \neq \varnothing$. Alors $X^G(k) \neq 0$.*

Démonstration. — On sait que G possède une suite de sous-groupes fermés *connexes*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r \supset G_{r+1} = \{e\}$$

telle que chaque G_{i+1} soit distingué dans G_i et que le quotient G_i/G_{i+1} soit commutatif. Montrons par récurrence décroissante sur i que la sous-variété fermée $X_i = X^{G_i}$ est non vide. C'est OK pour $i = r+1$, donc on peut supposer que $i \leq r$ et que X_{i+1} est non vide. D'après la proposition 8.6 (appliquée à $G = G_i$ et $H = G_{i+1}$), X_{i+1} est donc une sous-variété fermée de X (donc projective), stable par G_i.

D'après le lemme de l'orbite fermée 8.2, il existe $x \in X_{i+1}(k)$ tel que sa G_i-orbite $Y = \mathscr{O}_x$ soit fermée, donc c'est une variété projective. Soit G_x le k-schéma en groupes de G_i stabilisateur de x (on ne suppose pas ici que G_x est réduit). Comme x est fixé par $G_{i+1}(k)$ alors G_x contient G_{i+1} et donc, comme G_i/G_{i+1} est abélien, G_x est un sous-schéma en groupes *distingué* de G_i. Par conséquent, G_i/G_x est un k-groupe algébrique *affine connexe*.

D'autre part, on a un isomorphisme $G_i/G_x \xrightarrow{\sim} Y$, donc en particulier Y est connexe. Comme c'est une variété projective on a donc $\mathscr{O}_Y(Y) = k$. Mais comme Y est aussi affine, on a $Y = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_Y(Y)) = \operatorname{Spec}(k)$ donc Y est égale au point x. Et comme Y est la G_i-orbite de x, ceci montre que $gx = x$ pour tout $g \in G_i(k)$, donc X_i est non vide. Ceci prouve le théorème. □

Remarques 8.10. — (1) Tout groupe fini G définit un k-groupe algébrique : l'algèbre des fonctions est k^G = produit de copies de k indexé par G = ensemble de toutes les fonctions $f : G \to k$ (et donc $\operatorname{Spec}(k^G)$ est une réunion disjointe de copies de $\operatorname{Spec}(k)$). Si l'on note δ_g la fonction telle que $\delta_g(h) = 1$ si $h = g$ et $= 0$ sinon, la structure d'algèbre de Hopf est définie par :

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{h \in G} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h \qquad \varepsilon(\delta_g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \tau(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

On prendra garde que k^G est différente de l'algèbre de groupe kG, de base $(e_g)_{g \in G}$ avec la mutliplication $e_g e_h = e_{gh}$!

(2) Le théorème n'est pas vrai pour un groupe résoluble non connexe. Par exemple, prenons $k = \mathbb{C}$ et $G =$ le groupe symétrique S_3, qui est résoluble vu la suite exacte

$$e \longrightarrow C_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow C_2 \longrightarrow e$$

où C_i désigne le groupe cyclique d'ordre i. Considérons l'espace vectoriel de dimension deux $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Alors S_3 agit sur V (par permutations des coordonnées) donc aussi sur la variété projective $\mathbb{P}(V)$. Le groupe cyclique C_3 a exactement deux points fixes dans $\mathbb{P}(V)(\mathbb{C})$, qui sont les droites D_1 et D_2 engendrées par les vecteurs propres $(1, j, j^2)$ et $(1, j^2, j)$. Mais l'action de C_2 permute ces deux points fixes, donc S_3 n'a pas de point fixe !

Définitions 8.11 **(Grassmaniennes et variétés de drapeaux)**
Soit V un k-ev de dimension n et soit d un entier compris entre 1 et $n-1$.

(i) De même qu'on a défini le k-schéma $\mathbb{P}(V)$ qui représente le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des facteurs directs de rang 1 de $V \otimes R$, on peut montrer que le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des facteurs directs de rang d de $V \otimes R$ est représentable par un k-schéma, que l'on notera $\mathrm{Gr}_d(V)$ et qu'on appelle la « *grassmannienne* des d-plans de V ».[6]

On montre aussi que le morphisme de foncteurs $\mathrm{Gr}_d(V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$, $E \mapsto \bigwedge^d E$ est une immersion fermée, i.e. permet d'identifier $\mathrm{Gr}_d(V)$ à un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

(ii) D'autre part, si $W_1, \dots, W_r$ sont des k-ev, on montre que le morphisme de foncteurs :

$$\mathbb{P}(W_1)(R) \times \cdots \times \mathbb{P}(W_r)(R) \to \mathbb{P}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_r)(R), \qquad (D_1, \dots, D_r) \mapsto D_1 \otimes \cdots \otimes D_r$$

définit un morphisme de k-schémas $\mathbb{P}(W_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(W_r) \to \mathbb{P}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_r)$, appelé le morphisme de Segre, et que ce morphisme est une immersion fermée. Donc : *un produit fini d'espaces projectifs est un k-schéma projectif.* (En particulier, $\mathbb{P}^r_k \times \mathbb{P}^s_k$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^{rs+r+s}_k$.)

(iii) Revenons à notre V de dimension n et donnons-nous des entiers $d_1, \dots, d_s$ tels que $1 \leq d_1 < \cdots < d_s \leq n-1$. On voit alors que le foncteur qui à toute k-algèbre R associe l'ensemble des s-uplets $(E_1, \dots, E_s)$, où chaque E_i est un facteur direct de rang d_i de $V \otimes R$, est représentable par un certain sous-schéma fermé $X = X(d_1, \dots, d_s)$ de $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigotimes_{i=1}^s \bigwedge^{d_i} V$. On peut de plus montrer que le sous-foncteur qui à tout R associe l'ensemble des s-uplets comme ci-dessus tels que $E_1 \subset \cdots \subset E_s$ est représenté par un sous-schéma fermé de X, qu'on appelle le *k-schéma des drapeaux* de type $(d_1, \dots, d_s)$ dans V et qu'on notera $\mathcal{F}\ell(V; d_1, \dots, d_s)$. [7]

Si $s = n-1$ et $d_i = i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$, on dit que c'est le schéma (ou la variété) des drapeaux *complets*. En fait, dans ce cas on désignera $\mathcal{F}\ell(V; 1, 2, \dots, n-1)$ simplement par $\mathcal{F}\ell(V)$ et l'on dira que c'est la variété des drapeaux de V (en omettant le mot « complet »). Et dans les autres cas, on dira que $\mathcal{F}\ell(V; d_1, \dots, d_s)$ est la variété des drapeaux partiels de type $(d_1, \dots, d_s)$.

Corollaire 8.12 **(Th. de Lie-Kolchin).** — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe et V une représentation de G de dimension finie n. Il existe un drapeau de V stable par G, i.e. il existe une suite de sous-G-modules* $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ *avec* $\dim(V_i) = i$.

---

[6] Si $V = k^n$, on trouve selon les auteurs, les notations conflictuelles $\mathrm{Gr}_{d,n}$ (pour dire d-plans dans k^n) ou $\mathrm{Gr}_{d,n-d}$ (pour dire d-plans E avec le quotient V/E de dimension $n-d$), donc attention ! !
[7] $\mathcal{F}\ell$ comme l'anglais « Flag ».

Démonstration. — G agit dans V donc dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(V)$, et comme celle-ci est projective G y admet un point fixe. □

Corollaire 8.13. — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe. Tout G-module simple est de dimension* 1.

Démonstration. — Ceci découle du théorème de Lie-Kolchin. (On rappelle que si G est un groupe (algébrique), un G-module V est dit *simple* s'il est $\neq (0)$ et ne contient pas de sous G-modules autres que (0) et V.) □

Remarque 8.14. — Bien sûr, le corollaire n'est pas vrai pour un groupe non résoluble. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_{n,k}$ le G-module k^n est simple (exercice !).

Remarque 8.15. — En fait, pour démontrer le th. de Lie-Kolchin (qui est antérieur à Borel), on peut se passer du th. du point fixe de Borel. Mais on va en avoir besoin plus bas pour un théorème très important.

On admet les résultats d'algèbre commutative contenus dans la définition et proposition suivante.

***Définition et proposition 8.16* (Dimension).** — *Soit X une k-variété algébrique* irréductible.

(i) *Toute les chaînes maximales $\{x\} \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$ de sous-variétés fermées irréductibles ont la même longueur n, appelée la* **dimension** *de X et notée* $\dim(X)$*. De plus, pour tout ouvert affine U non vide de X, n est égal au degré de transcendance sur k du corps des fractions de $\mathscr{O}_X(U)$ (ce qui fournit une méthode de calcul). Par conséquent, pour tout ouvert non vide V de X, on a* $\dim(V) = \dim(X)$.

(ii) *Pour une k-variété algébrique Y non nécessairement irréductible, on pose* $\dim(Y) = \mathrm{Max}\{\dim(Y_i)\}$*, où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y.*

(iii) *Pour toute sous-variété fermée Z de X, on a* $\dim(Z) \leq \dim(X)$*, avec égalité ssi $Z = X$, i.e. pour X irréductible et Z une sous-variété fermée $\neq X$, on a* $\dim(Z) < \dim(X)$.

(iv) *Si G est un k-groupe algébrique, toutes ses composantes irréductibles sont isomorphes à sa somposante neutre G^0 (on rappelle que $k = \overline{k}$) donc ont même dimension, d'où* $\dim(G) = \dim(G^0)$.

(v) *La notion de dimension ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent : si H est un k-schéma en groupes affine non nécessairement réduit, on a* $\dim(H) = \dim(H(k))$*, où $H(k)$ désigne le k-groupe algébrique associé à H.*

(vi) *Si G est un k-groupe algébrique et H un sous-schéma en groupes fermé (pas nécessairement réduit), alors la variété G/H est de dimension* $\dim(G) - \dim(H)$.

Exemples 8.17. — (i) $\mathbb{G}_{a,k}$ et $\mathbb{G}_{m,k}$ sont de dimension 1. Tout groupe fini est de dimension 0.

(ii) $G = \mathrm{GL}_{n,k}$ est de dimension n^2. Soit P le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_{n,k}$ de la droite $D = ke_1$ engendrée par le premier vecteur de la base canonique, i.e. P est le sous-groupe fermé défini par les équations $c_{1j} = 0$ pour $j = 2, \ldots, n$. Alors $\dim(P) = n^2 - (n-1)$ et le quotient G/P est isomorphe à $\mathbb{P}_k^{n-1}$ et de dimension $n - 1$.

(iii) Soit B le sous-groupe fermé de $G = \mathrm{GL}_{n,k}$ formé des matrices triangulaires supérieures, i.e. B est défini par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i > j$. Alors B est de dimension $n(n+1)/2$. D'autre part, B est le stabilisateur dans $\mathrm{GL}_{n,k}$ du drapeau standard $V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1}$, où V_i désigne le sev de k^n engendré par les i premiers vecteurs de la base canonique. Par conséquent, G/B est isomorphe à la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(k^n)$; celle-ci est donc de dimension $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Lemme 8.18. — (i) *Si G est un groupe résoluble, il en est de même pour tout sous-groupe fermé* (*et pour tout quotient G/H si H est un sous-groupe fermé distingué*).

(ii) *Soit $B = B_n$ (resp. $U = U_n$) le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_{n,k}$ *formé des matrices triangulaires supérieures (resp. et avec des* 1 *sur la diagonale) est résoluble connexe. De plus, U est un groupe* unipotent (*voir définition dans la section* 10).

Démonstration. — (i) Soit $G = G_0 \supset \cdots \supset G_{r+1} = \{e\}$ une suite comme dans la définition 8.3 et soit H un sous-groupe fermé de G. Alors $H_i = H \cap G_i$ est un sous-groupe fermé de H, distingué dans H_{i-1}, et H_{i-1}/H_i est isomorphe à un sous-groupe de G_{i-1}/G_i donc est commutatif. Ceci prouve que H est résoluble.

Si H est distingué dans G, notons π la projection $G \to G/H = \overline{G}$. Alors $\overline{G}_i = \pi(G_i)$ est un sous-groupe fermé de $\overline{G}$, distingué dans $\overline{G}_{i-1}$. Le morphisme de groupes

$$G_{i-1}(k) \to \overline{G}_{i-1}(k) \to (\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i)(k)$$

est surjectif et contient $G_i(k)$ dans son noyau, donc $(\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i)(k)$ est commutatif et donc $\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i$ est commutatif (car les deux morphismes envoyant (g, h) sur gh resp. hg coïncident sur les k-points donc sont égaux).

(ii) Remarquons d'abord que, comme variétés, U est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^{n(n-1)/2}$ et B à $(\mathbb{G}_{m,k})^n \times U$. Donc U et B sont des groupes algébriques connexes.

Pour tout $b, b' \in B(k)$, chaque terme diagonal de bb' (resp. $b'b$) est le produit des termes diagonaux correspondants de b et b', dont le commutateur $bb'b^{-1}b'^{-1}$ appartient à $U(k)$. Ceci montre que U est distingué et que le quotient B/U est commutatif. On voit par ailleurs que ce quotient est isomorphe au tore $(\mathbb{G}_{m,k})^n$.

D'autre part, posons $U_0 = U$ et pour $d = 1, \ldots, n-1$ notons U_d le sous-groupe fermé de U formé des éléments ayant d diagonales de 0 au-dessous de la diagonale, i.e. défini dans U par les équations $c_{ij} = 0$ pour $i + 1 \leq j \leq i + d$. Alors on a

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_{n-2} \supset U_{n-1} = \{e\}$$

et on vérifie que chaque U_d est distingué dans U et que de plus chaque quotient U_{d-1}/U_d est *central* dans U/U_d (i.e. pour tout $u \in U(k)$ et $u' \in U_{d-1}(k)$, le commutateur $uu'u^{-1}u'^{-1}$ appartient à U_d).

Ceci est une propriété plus forte que d'être résoluble. En tout cas, ceci prouve déjà que U et B sont résolubles.

Remarquons de plus que pour tout $d = 1, \ldots, n-1$, le morphisme

$$U_{d-1} \to (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$$

qui à tout $u \in U_{d-1}$ associe les coefficients de sa première diagonale non nulle (i.e. la d-ième diagonale au-dessus de la diagonale principale), est un morphisme de groupes, qui induit un isomorphisme $U_{d-1}/U_d \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{a,k})^{n-d}$. [8] □

***Définition 8.19* (Sous-groupes de Borel)**. — Soit G un k-groupe algébrique. On appelle *sous-groupe de Borel* de G tout sous-groupe fermé connexe résoluble B qui est maximal pour ces propriétés, i.e. si $B \subset B'$ pour un sous-groupe fermé connexe résoluble B', alors $B = B'$.

Remarquons que B, étant connexe, est contenu dans la composante neutre G^0 de G et en est un sous-groupe de Borel. Donc dans la définition ci-dessus, on peut sans perte de généralité remplacer G par sa composante neutre, i.e. supposer G connexe.

[8] Ceci entraîne que pour tout sous-schéma en groupes $H \neq \{e\}$ de U, il existe un morphisme non trivial de k-schémas en groupes $H \to \mathbb{G}_{a,k}$. Ceci sera utilisé dans le lemme 9.5 ; voir aussi la section 10.

Terminologie 8.20 **(G-modules fidèles).** — Soit G un k-groupe algébrique. On dit qu'un G-module V de dimension finie est *fidèle* si le noyau du morphisme de groupes algébriques correspondant $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ est trivial (i.e. égal à $\{e\}$). Dans ce cas, on a vu au §5 que ϕ est un isomorphisme de G sur un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$.

D'autre part, on a vu que G admet au moins un G-module fidèle E de dimension finie. Dans ce cas, pour tout G-module V, le G-module $V \oplus E$ est fidèle.

Théorème 8.21 **(Conjugaison des sous-groupes de Borel)**
Soit G un k-groupe algébrique connexe.

(i) *Tous les sous-groupes de Borel de G sont conjugués sous l'action par conjugaison de $G(k)$.* (*En particulier ils sont tous isomorphes, donc de même dimension.*)

(ii) *Si B est un sous-groupe de Borel de G, la variété G/B est projective.*

Démonstration. — Soit S un sous-groupe de Borel de G de *dimension maximale* d (un tel sous-groupe existe car tous les sous-groupes fermés de G sont de dimension $\leq \dim(G)$).

D'après la proposition 3.2, il existe un G-module V et une droite D de V telle que le stabilisateur G_D égale S. De plus, quitte à remplacer V par un certain $V \oplus E$, on peut supposer que V est un G-module fidèle, ce qui nous permet de considérer G comme un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$.

Comme S stabilise D, alors l'espace vectoriel quotient V/D est un S-module, et d'après le théorème de Lie-Kolchin il existe donc un drapeau F_0 :

$$D = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V$$

de V stable par S. Notons provisoirement G_{F_0} le stabilisateur dans G de ce drapeau ; les inclusions

$$S \subset G_{F_0} \subset G_D = S$$

montrent alors que $G_{F_0} = S$. Donc la variété quotient G/S est isomorphe à l'orbite $\mathscr{O}_0$ de F_0 dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(V)$ de V, et cette orbite est irréductible car G est connexe (donc irréductible). Montrons que cette orbite est **fermée**, donc projective.

Soit F un drapeau arbitraire

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_{n-1}$$

de V et G_F son stabilisateur dans G. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V adaptée au drapeau F, i.e. pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $(e_1, \ldots, e_i)$ est une base de W_i. Alors, identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base, on voit que le sous-groupe fermé $G_F(k)$ est contenu dans le sous-groupe des matrices trianglaires supérieures (car il stabilise le drapeau F !), donc il est résoluble, ainsi que sa composante connexe $G^0_F(k)$. Comme S est un sous-groupe résoluble connexe de dimension maximale, on a donc, en utilisant les points (iv–vi) de la proposition 8.16 :

$$\dim(G_F) = \dim(G_F(k)) = \dim(G^0_F(k)) \leq \dim(S)$$

et donc l'orbite de F, isomorphe à G/G_F donc de dimension $\dim(G) - \dim(G_F)$, est de dimension $\geq \dim(G) - \dim(S) = \dim(\mathscr{O}_0)$. Ceci montre que $\mathscr{O}_0$ est une orbite de G dans $\mathcal{F}\ell(V)$ de dimension *minimale* et ceci entraîne qu'elle est fermée. En effet, son adhérence $\overline{\mathscr{O}}_0$ est irréductible et de même dimension d que $\mathscr{O}_0$, donc le fermé G-stable $Z = \overline{\mathscr{O}}_0 - \mathscr{O}_0$ est de dimension $< d$ (avec la convention que $\dim(\varnothing) = -1$), et s'il était non vide, il contiendrait une G-orbite de dimension $< d$, contradiction.

Ceci montre que $\mathscr{O}_0$ est fermée ; c'est donc une variété projective, isomorphe à G/S.

Notons que G agit à gauche sur G/S. De plus, $(G/S)(k) = G(k)/S(k)$ et pour tout $g \in G(k)$, le stabilisateur dans $G(k)$ du point $gS(k)$ est le conjugué $gS(k)g^{-1}$.

Soit maintenant B un sous-groupe de Borel arbitraire de G. Il agit à gauche sur la variété projective G/S et d'après le théorème du point fixe de Borel, il existe $g \in G(k)$ tel que le point $gS(k)$ de $(G/S)(k)$ soit fixé par $B(k)$; on a donc $B(k) \subset gS(k)g^{-1}$ d'où $B \subset gSg^{-1}$.

Or gSg^{-1} est, comme S, un sous-groupe fermé connexe résoluble, et comme B est un sous-groupe de Borel, l'inclusion plus haut entraîne que $B = gSg^{-1}$. Ceci montre que tous les sous-groupes de Borel sont conjugués à S, ce qui prouve déjà (i).

De plus, $B = gSg^{-1}$ est alors le stabilisateur du drapeau $F = gF_0$, qui appartient à $\mathscr{O}_0$, et l'on a donc un isomorphisme

$$G/B \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_F = \mathscr{O}_0.$$

Donc G/B est une variété projective, isomorphe à G/S. □

Le point (ii) du théorème admet la réciproque suivante, qui permet de caractériser les sous-groupes de Borel.

Proposition 8.22. — *Soient G un k-groupe algébrique, S un sous-groupe fermé résoluble connexe. Si la variété G/S est projective, alors S est un sous-groupe de Borel de G.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. Il agit sur la variété projective G/S donc il existe un point de $(G/S)(k) = G(k)/S(k)$ fixé par $B(k)$. Il existe donc $g \in G(k)$ tel que $g^{-1}B(k)g \subset S(k)$, d'où $g^{-1}Bg \subset S$. Mais comme $g^{-1}Bg$ est un Borel et que S est résoluble connexe, ceci entraîne que $g^{-1}Bg = S$, donc S est un Borel. □

Exemple 8.23. — Soit $G = \mathrm{GL}_{n,k}$. Alors le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures est fermé, résoluble et connexe, et le quotient G/B est la variété des drapeaux $\mathcal{F}\ell(k^n)$ qui est projective. Donc B est un sous-groupe de Borel.

En raison de cet exemple, si G est un k-groupe algébrique connexe et B un sous-groupe de Borel de G, on dit que G/B est « la variété des drapeaux de G ».

9. Décomposition de Jordan-Chevalley

***Rappel 9.1* (Décomposition de Jordan)**. — Soit V un k-ev de dimension finie. Comme k est algébriquement clos, on a ce qui suit.

(i) Tout k-endomorphisme u de V s'écrit de façon unique

$$u = u_s + u_n$$

où u_s et u_n **commutent** et u_s est *semi-simple* (i.e. diagonalisable) et u_n nilpotent. On dit que ceci est la décomposition de Jordan (additive) de u et u_s (resp. u_n) s'appelle la partie semi-simple (resp. nilpotente) de u. De plus, on montre que u_s et u_n sont des polynômes en u, donc si un sev E de V est stable par u il l'est aussi par u_s et u_n.

On dit que u est semi-simple (resp. nilpotent) si $u = u_s$ (resp. $u = u_n$). L'unique élément à la fois semi-simple et nilpotent est 0.

(ii) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. On dit que g est *unipotent* si sa seule valeur propre est 1, i.e. si $g - \mathrm{id}_V$ est nilpotent.

(iii) Tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ s'écrit de façon unique

$$g = g_s g_u$$

avec $g_s, g_u \in \mathrm{GL}(V)$ qui **commutent**, g_s semi-simple et g_u unipotent.[9] On dit que ceci est la décomposition de Jordan (multiplicative) de g et g_s (resp. g_u) s'appelle la partie

[9] g_s est comme plus haut et $g_u = g_s^{-1}g = \mathrm{id}_V + g_s^{-1}g_n$.

semi-simple (resp. unipotente) de g. De plus, on montre que si un sev E de V est stable par g il l'est aussi par g_s et g_u.

On dit que g est semi-simple (resp. unipotent) si $g = g_s$ (resp. $g = g_u$). L'unique élément à la fois semi-simple et unipotent est l'élément neutre id_V.

Théorème 9.2. — *Soit G un k-groupe algébrique.*

(i) *Tout $g \in G(k)$ s'écrit de façon unique $g = g_s g_u$, avec $g_s, g_u \in G(k)$ qui* **commutent**, *et g_s* « semi-simple » *et g_u* « unipotent » *: ceci signifie que pour tout morphisme de groupes algébriques ρ de G dans un $\mathrm{GL}(V)$, $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\rho(g)$.*

(ii) *On dit que $g = g_s g_u$ est la décomposition de Jordan de g et que g_s (resp. g_u) est la partie semi-simple (resp. unipotente) de g. On dit que g est semi-simple (resp. unipotent) si $g = g_s$ (resp. $g = g_u$). L'unique élément à la fois semi-simple et unipotent est l'élément neutre e de $G(k)$.*

(iii) *La décompostion de Jordan est préservée par tout morphisme de groupes algébriques $\rho : G \to H$, i.e. pour tout $g \in G(k)$, $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\rho(g)$ dans $H(k)$.*

Démonstration. — Voir [Po, §7] ou [Wa, §9] ou les livres de Springer, Borel ou Humphreys. □

Proposition 9.3. — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe. L'ensemble G_u des éléments unipotents de $G(k)$ est un sous-groupe fermé distingué de G.*

Démonstration. — D'après le th. de Lie-Kolchin, G est un sous-groupe fermé d'un certain groupe $B = B_n$ de matrices triangulaires supérieures. Notons U le sous-groupe de B formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Alors G_u égale $G \cap U$ donc est un sous-groupe fermé distingué de G, puisque U est fermé et distingué dans B. □

On démontrera dans le chapitre suivant que si G est un k-groupe algébrique résoluble connexe, alors G est le produit semi-direct de G_u et d'un tore T, et que deux tels tores sont conjugués par un élément de $G(k)$. Pour le moment, démontrons déjà le *cas particulier* ci-dessous.

Proposition 9.4. — *Soit G un k-groupe algébrique résoluble connexe.* On suppose que tout élément semi-simple de $G(k)$ est **central**. *Alors :*

(i) *Les éléments semi-simples de $G(k)$ forment un sous-groupe fermé G_s, qui est un k-groupe algébrique diagonalisable.*

(ii) *Le morphisme de multiplication $G_s \times G_u \to G$ est un isomorphisme.*

(iii) *Par conséquent, G_s est connexe donc c'est un tore.*

(iv) *Comme $G_s(k)$ contient tous les élements semi-simples de $G(k)$, G_s est évidemment l'unique tore maximal de G.*

Démonstration. — (i) Soit V un G-module fidèle, on peut considérer G comme un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$. Notons $G_s(k)$ l'ensemble des éléments semi-simples de $G(k)$. Comme ils sont centraux, donc commutent entre eux, il existe une base de V formée de vecteurs propres communs. Alors, identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base et notant T le tore des matrices diagonales, on voit que $G_s(k)$ est contenu dans $G(k) \cap T(k)$ et lui est en fait égal, car tout élément $G(k) \cap T(k)$ est un élément semi-simple de $G(k)$ donc appartient à $G_s(k)$.

Donc $G_s = G \cap T$ est un sous-groupe fermé de G, et comme c'est un sous-groupe fermé de T il est diagonalisable.

(ii) Comme G_s est central, le morphisme de variétés de $H = G_s \times G_u$ vers G, qui envoie (g_s, g_u) sur $g_s g_u$ est un morphisme de groupes algébriques, donc induit un isomorphisme de $H/\operatorname{Ker}(\phi)$ (où $\operatorname{Ker}(\phi)$ est pris au sens des schémas !) sur un sous-groupe fermé G' de G. Or par décomposition de Jordan, ϕ est surjectif sur les k-points, donc $G' = G$. Il reste donc à montrer que $K = \operatorname{Ker}(\phi)$ égale $\{e\}$.(10)

Or, K est isomorphe à $G_s \cap G_u$ donc c'est un sous-k-schéma en groupes fermé de G_s et de G_u, donc c'est un k-schéma en groupes qui est à la fois diagonalisable et unipotent. Or d'après le lemme 9.5, ceci entraîne que $K = \{e\}$.

On a donc un isomorphisme $G_s \times G_u \xrightarrow{\sim} G$. Comme G est connexe et que la projection $G \to G_s$ est surjective, il en résulte que G_s est un k-groupe algébrique diagonalisable connexe. D'après la classification des k-groupes diagonalisables (oubliée dans la section 6, mais voir **??** plus bas), G_s est donc un tore. La proposition est démontrée. □

Lemme 9.5. — *Soit K un k-schéma en groupes qui est à la fois diagonalisable et unipotent. Alors $K = \{e\}$.*

Démonstration. — Par l'absurde, supposons $K \neq \{e\}$. Alors, comme K est unipotent, il possède un morphisme ϕ non trivial vers le groupe additif $G = \mathbb{G}_{a,k}$ et celui-ci est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2,k}$ via

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi un morphisme ψ de K dans $\mathrm{GL}_{2,k}$ qui est non trivial, i.e. $\operatorname{Ker}(\psi) \neq K$. Le G-module $V = k^2$ possède une suite de composition :

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

où $V_1 = ke_1$, et G, donc aussi K, agit trivialement (i.e. via le caractère trivial $\chi(g) = 1$) sur V_1 et sur V_2. Comme K est diagonalisable, il agit alors trivialement sur V, donc le morphisme ψ est trivial, contradiction ! Ceci montre que $K = \{e\}$. □

Remarque 9.6. — Par un argument similaire, on peut montrer le résultat plus fort suivant : « Soit H (resp. U) un k-schéma en groupes diagonalisable (resp. unipotent). Alors tout morphisme de k-schémas en groupes $H \to U$ est trivial, i.e. se factorise par le groupe trivial $\{e\}$. »

10. k-schémas en groupes unipotents

Revenons ici sur la définition et les propriétés des k-schémas en groupes unipotents. Donnons-en une autre définition.

Terminologie 10.1. — Soient G un k-schéma en groupes et V un G-module. Le sous-G-module des *invariants* est

$$V^G = \{v \in V \mid \Delta_V(v) = v \otimes 1\}$$

i.e. c'est le sous-espace formé des v tels que pour toute k-algèbre R et tout $g \in G(R)$ on ait dans $V \otimes R$ l'égalité $g(v \otimes 1) = v \otimes 1$. C'est clairement un sous-G-module de V, sur lequel l'action de G est « triviale », i.e. tout $g \in G(R)$ agit comme l'identité. On dit que V est un G-module *trivial* si $V = V^G$.

***Définition 10.2* (k-schémas en groupes unipotents)**. — Soit G un k-schéma en groupes.

(10)Au sens des schémas, i.e. il ne suffit pas de dire que $K(k) = \{e\}$, ce qui découle de la décomposition de Jordan dans $G(k)$.

(i) On dit que G est **unipotent** si pour tout G-module $V \neq (0)$ de dimension finie, le sous-module des invariants V^G est non nul.

(ii) En réappliquant ceci au G-module V/V^G, on voit par récurrence sur $\dim(V)$ que ceci entraîne qu'il existe une suite strictement croissante de sous-G-modules :

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$$

telle que chaque V_i/V_{i-1} soit un G-module trivial. En prenant une base de V adaptée à ce drapeau de sous-modules et en identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base, on voit alors que l'image de G dans $\mathrm{GL}_{n,k}$ est contenue dans le sous-groupe $U_{n,k}$ des matrices unitriangulaires supérieures.

(iii) Prenant pour V un G-module fidèle, de sorte qu'on peut identifier G à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$, on obtient alors que G est un sous-groupe fermé de $U_{n,k}$. On va démontrer plus bas que la réciproque est vraie.

Remarque. — Avec la définition adoptée plus haut, il est clair que si G est unipotent et si $G' = G/H$ est un schéma en groupes quotient de G alors G' est unipotent, car $k[G'] \subset k[G]$ donc si V est un $k[G']$-comodule non nul, c'est aussi un $k[G]$-comodule non nul donc il existe $v \neq 0$ tel que $\Delta_V(v) = v \otimes 1$.

Par contre, il n'est pas évident qu'un sous-schéma en groupes H de G soit unipotent. Ceci va découler de la proposition suivante.

Proposition 10.3. — *Soit G un k-schéma en groupes et $A = k[G]$.*

(i) *On suppose que A est réunion d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels C_i tels que $C_0 = k1$ et que :*

$$(*) \qquad \Delta(C_r) \subset \sum_{i=0}^{r} C_i \otimes C_{r-i}$$

pour tout r. Alors G est unipotent, ainsi que tout sous-schéma en groupes fermé de G.

(ii) *Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe $U_{n,k}$ vérifie l'hypothèse de* (i)*, donc est unipotent.*

Démonstration. — (i) Soit V un G-module non nul. Pour tout r, posons

$$V_r = \{v \in V \mid \Delta_V(v) \in V \otimes C_r\}.$$

Notons que $V^G = V_0$, car si $v \neq 0$ et $\Delta_V(v) = v \otimes t$, avec $t \in k$, alors l'égalité $v = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_V(v)$ entraîne que $t = 1$. Comme A est la réunion des C_i, il existe un entier r tel que $V_r \neq 0$. Si $r > 0$, montrons que $V_{r-1} \neq 0$. Notons π la projection $A \to \overline{A} = A/C_{r-1}$ et $\overline{\Delta}_V$ la composée $(\mathrm{id}_V \otimes \pi) \circ \Delta_V : V \to V \otimes \overline{A}$. L'hypothèse sur les C_i entraîne que $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V(V_r)$ est contenu dans $V \otimes (C_{r-1} \otimes A + A \otimes C_{r-1})$ donc est d'image nulle dans $V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}$. D'autre part, $(\mathrm{id}_V \otimes \Delta)\Delta_V = (\Delta_V \otimes \mathrm{id}_A)\Delta_V$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Delta_V"] \arrow[dr, "\overline{\Delta}_V"'] & V \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_V \otimes \Delta"] \arrow[d] & V \otimes A \otimes A \arrow[d] \\
 & V \otimes \overline{A} \arrow[r, "\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_{\overline{A}}"] & V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}
\end{tikzcd}$$

Si l'on avait $V_{r-1} = \{0\}$ alors $\overline{\Delta}_V$ serait injective, ainsi que $\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_{\overline{A}}$ et que l'application composée $V \to V \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}$. Or $V_r \neq 0$ est contenu dans le noyau de cette application composée. Ceci montre que $V_{r-1} \neq 0$.

Par conséquent, G est unipotent. De plus, si H est un sous-schéma en groupes fermé de G alors $k[H]$ est une algèbre de Hopf quotient de A donc est la réunion des images $\overline{C}_i$ des C_i, lesquelles vérifient aussi $(*)$, et donc H est unipotent. Ceci prouve (i).

(ii) $k[U_{n,k}]$ est l'algèbre de polynômes $A = k[X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$ et si l'on pose $\deg(X_{ij}) = j - i$, celle-ci devient une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée telle que $A_0 = k \cdot 1$, en notant A_r la composante homogène de A de degré r. De plus, pour tout $i < j$, on a

$$\Delta(X_{ij}) = X_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes X_{ij} + \sum_{i<\ell<j} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}$$

donc $\Delta : A \to A \otimes A$ est un morphisme de k-algèbres graduées, i.e. pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta(A_r) \subset (A \otimes A)_r = \bigoplus_{i=0}^{r} A_i \otimes A_{r-i}.$$

Il en résulte que si l'on pose $C_r = \bigoplus_{i=0}^{r} A_i$ alors A est la réunion des C_i, on a $C_0 = A_0 = k\cdot 1$, et $(*)$ est vérifiée. Ceci prouve que $U_{n,k}$ est unipotent. Et donc, d'après (i), il en est de même de tout sous-schéma en groupes fermé de $U_{n,k}$. $\square$

On en déduit le :

***Théorème 10.4* (Caractérisation des k-schémas en groupes unipotents)**
Soit G un k-schéma en groupes.

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes, et si elles sont vérifiées on dit que G est* **unipotent**.

(1) *Pour tout G-module V non nul, V^G est non nul.*

(2) *Tout G-module simple est trivial* (*et donc de dimension* 1).

(3) *Pour tout G-module V non nul de dimension d, il existe un drapeau complet de sous-G-modules $V_1 \subset \cdots \subset V_{d-1} \subset V_d = V$ tels que chaque V_i/V_{i-1} soit un G-module trivial de dimension* 1.

(4) *G est un sous-schéma en groupes fermé de $U_{n,k}$ pour un certain entier $n \geq 2$.*

(i bis) *En particulier, $\mathbb{G}_{a,k} \simeq U_{2,k}$ est unipotent.*

(ii) *Si G est unipotent, alors tout sous-schéma en groupes H de G est unipotent, de même que le quotient G/H si H est distingué.*

(iii) *Réciproquement, si H est un sous-schéma en groupes distingué tel que H et G/H soit unipotents, alors G l'est aussi.*

(iv) *G est unipotent $\Longleftrightarrow$ il a une* suite de composition centrale (*c.-à-d., une suite de sous-groupes fermés distingués*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_N \supset G_{N+1} = \{e\}$$

où chaque G_i/G_{i+1} est central dans G/G_{i+1}) telle que *chaque G_i/G_{i+1} soit isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_{a,k}$.*

Démonstration. — (i) et (ii) découlent de ce qui précède. D'autre part, on a un isomorphisme de k-groupes algébriques $\mathbb{G}_{a,k} \to U_{2,k}$ donné par $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où (i bis).

Prouvons (iii). Soit V un G-module non nul. Comme H est unipotent alors $V^H \neq (0)$. D'après un lemme vu dans la section 5, on sait que V^H est un sous-G-module de V ; notons μ la coaction $V^H \to V^H \otimes k[G]$. Soit $v \in V^H$, écrivons

$$\mu(v) = \sum_i v_i \otimes \phi_i$$

avec les $v_i \in V^H$ linéairement indépendants et $\phi_i \in k[G]$. Soit R une k-algèbre et $g \in G(R)$, $h \in H(R)$. Alors dans $V^H \otimes R$ on a les égalités :

$$\sum_i v_i \otimes \phi_i(gh) = gh(v \otimes 1) = g(v \otimes 1) = \sum_i v_i \otimes \phi_i(g).$$

Ceci prouve que $\phi(gh) = \phi(g)$ pour tout $g \in G(R)$ et $h \in H(R)$, donc ϕ_i appartient à la sous-algèbre de Hopf $k[G]^H = k[G/H]$. Ceci montre que V^H est un (G/H)-module (non nul). Comme G/H est unipotent, il existe donc $v \neq 0$ dans V tel que $\mu(v) = v \otimes 1$. Ceci montre que G est unipotent.

Prouvons (iv). Supposons G unipotent. On a vu dans la démonstration du lemme 8.18 que $U = U_{n,k}$ possède une suite de composition centrale dont les quotients successifs sont des produits de copies de $\mathbb{G}_{a,k}$. En raffinant cette suite, on obtient une suite de composition centrale

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_{N-1} \supset U_N = \{e\}$$

où $N = \dim(U) = n(n-1)/2$ et où chaque U_i/U_{i+1} est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$. Maintenant, si G est un sous-schéma en groupes fermé de U, les $G_i = G \cap U_i$ forment une suite de composition centrale de G et chaque G_i/G_{i+1} est isomorphe à un sous-schéma en groupes fermé de $U_i/U_{i+1} \simeq \mathbb{G}_{a,k}$, donc G vérifie la propriété énoncée en (iv).

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée. Alors chaque quotient G_i/G_{i+1}, étant un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbb{G}_{a,k}$, est unipotent d'après (i bis) et (ii). Par applications répétées de (iii), on obtient alors que G est unipotent. $\square$

Remarque. — La démonstration du lemme 9.5 utilise la caractérisation (iv) des groupes unipotents. Pour être complet, donnons-en une seconde démonstration, utilisant juste la définition 10.2.

Lemme 10.5. — *Soit K un k-schéma en groupes qui est à la fois diagonalisable et unipotent. Alors $K = \{e\}$.*

Démonstration. — Tout caractère $\chi \in X(K)$ définit un G-module $V = k_\chi$ de dimension 1, via $\Delta_V(v) = v \otimes \chi$ pour tout $v \in V$. Comme K est unipotent, ce module est trivial, i.e. χ est la fonction constante 1, i.e. $X(K)$ est le groupe abélien trivial $M = \{0\}$. Et comme K est diagonalisable, on a $K = \mathrm{Spec}(kM) = \mathrm{Spec}(k)$, d'où $K = \{e\}$. $\square$

Remarque 10.6. — On rappelle que $k = \overline{k}$. On peut démontrer les résultats suivants (cf. [Wa, §8.4] ou [DG, §IV.2]).

(i) Soit $G = \mathrm{Spec}(A)$ un sous-schéma en groupes non trivial de $\mathbb{G}_{a,k}$.

(1) Si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors $G = \mathbb{G}_{a,k}$.

(2) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors $H = G_{\text{réd}} = \mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})$ est un sous-schéma en groupes distingué de G et $G/H \simeq \alpha_{p^r} = \mathrm{Spec}(k[X]/X^{p^r})$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$. De plus, la composante neutre H^0 est soit triviale soit isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et H/H^0 est isomorphe au groupe fini $\mathbb{F}_p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En particulier, si G est non trivial, réduit et connexe, alors $G \simeq \mathbb{G}_{a,k}$.

(ii) Soit G un k-groupe algébrique unipotent et connexe. Alors G possède une suite de composition centrale dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_{a,k}$.

En travaillant un peu plus (cf. [DG, §IV.4.3, Cor. 3.8]) on peut démontrer le théorème suivant, que nous admettrons :

Théorème 10.7. — *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, de dimension n. Alors, comme variété, U est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$.*

Terminons ce chapitre avec la proposition suivante, oubliée dans la section 6 et utilisée dans la preuve de la proposition 9.4.

Proposition 10.8. — *Soit H un k-schéma en groupes diagonalisable.*

(i) *H est le produit d'un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$ et de groupes $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$, pour des entiers q qui sont primaires, i.e. de la forme p^r pour un nombre premier p et $r \geq 1$.*

(ii) *Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si $q = p^r$ avec $r \geq 1$, le groupe $\mu_{q,k}$ n'est pas réduit.*

(iii) *Si H est réduit et connexe, alors $H \simeq \mathbb{G}_{m,k}^d$ i.e. H est un tore.*

Démonstration. — Par hypothèse, $H = \mathrm{Spec}(kM)$ où M est un groupe abélien de type fini. Alors M est la somme directe d'un certain $\mathbb{Z}^d$ et de groupes cycliques primaires $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, pour des entiers q primaires, d'où (i).

Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et si $q = p^r$ avec $r \geq 1$, on a $T^q - 1 = (T-1)^q$ donc la k-algèbre $k[T]/(T^q - 1)$ n'est pas réduite, d'où (ii).

Prouvons (iii). Supposons H réduit. Alors d'après (i) et (ii) c'est le produit d'un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$ et de groupes $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$, pour des entiers q de la forme p^r, pour des nombres premiers p distincts de $\mathrm{car}(k)$ (si celle-ci est $\neq 0$). Dans ce cas, le polynôme dérivé $(T^q - 1)' = qT^{q-1}$ est non nul, donc les racines de $T^q - 1$ sont deux-à-deux distinctes, i.e. le groupe $\mu_q(k)$ des racines q-ièmes de l'unité dans k est formé de q éléments, et $T^q - 1$ se factorise en :

$$T^q - 1 = \prod_{\xi \in \mu_q(k)} (T - \xi)$$

et donc $\mu_{q,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/(T^q - 1)$ est un produit (indexé par $\mu_q(k)$) de copies de $\mathrm{Spec}(k)$ et la composante connexe de $\mu_{q,k}$ est le groupe trivial $\{e\}$.[11]

Il en résulte que si H est réduit et connexe, alors H est un tore $\mathbb{G}_{m,k}^d$. □

[11] Au contraire, si $\mathrm{car}(k) = p$ alors le k-schéma $\mu_{q,k}$ n'est pas réduit mais n'a qu'un seul point, donc est connexe.