# Chapitre 4 : Algèbres de Lie, centralisateurs de tores, tores maximaux et groupe de Weyl

**Références pour ce chapitre :**


[Bo] Armand Borel, Linear algebraic groups (2nd enlarged edition), Springer-Verlag, 1991.

[Hu] James E. Humphreys, Linear algebraic groups (corrected 2nd printing), Springer-Verlag, 1981.

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§§ 12 & 15-16 )

[Sp] Tonny A. Springer, Linear algebraic groups (2nd edition), Birkhäuser, 1998.

Et aussi :

[SGA3] Schémas en groupes (SGA 3), t. I, nouvelle édition recomposée et annotée, Documents Mathématiques 7, Soc. Math. France, 2011. (II, §§4-5 et $\mathrm{VI}_B$, §6)

[DG] Michel Demazure & Pierre Gabriel, Groupes algébriques, Masson & North-Holland, 1970. (§§ II.1.3, II.5.2 & IV.2)


---

## 11. Algèbre de Lie d'un $k$-schéma en groupes

Soit $k$ un corps et $G$ un $k$-schéma en groupes (affine de type fini, comme d'habitude). Posons $A = k[G]$ et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation de $A$.

### 11.1. Première définition. —

***Définition 11.1* (Espaces tangents de Zariski).** — Soient $X$ un $k$-schéma de type fini et $x$ un *point rationnel* de $X$ i.e. un point dont le corps résiduel $\kappa(x)$ est $k$.[(1)] Soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

(i) L'espace tangent (de Zariski) à $X$ en $x$ est le $k$-espace vectoriel $T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$. (Comme $X$ est de type fini, $\mathfrak{m}_x$ est un idéal de type fini donc $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et $T_xX$ sont de dimension finie.)

(ii) Si $f : X \to Y$ est un morphisme de $k$-schémas, alors $y = f(x)$ est un point rationnel de $Y$ et $f$ induit un morphisme de $k$-algèbres $\phi : \mathscr{O}_{Y,y} \to \mathscr{O}_{X,x}$ ; on a $\mathfrak{m}_y = \phi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ donc $\phi$ induit une application linéaire $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Sa transposée

$$T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \longrightarrow (\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)^* = T_yY$$

est notée $d_xf$ et appelée la différentielle de $f$ en $x$. Si $U$ est un ouvert de $X$ contenant $x$, on a $T_xU = T_xX$.

***Définition 11.2* (Algèbre de Lie de $G$).** — (i) On note $\mathrm{Lie}(G)$ le $k$-espace vectoriel $T_eG$, *il ne dépend que de la composante neutre* $G^0$, i.e. on a $\mathrm{Lie}(G^0) = \mathrm{Lie}(G)$. Il est muni d'une structure de $G$-module, déduite de l'action par conjugaison de $G$ sur lui-même : i.e. le morphisme $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h = ghg^{-1}$ munit $A = k[G]$ d'une structure de $G$-module, qui laisse stable l'idéal d'augmentation $\mathfrak{m}$, donc induit sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et sur son dual $\mathrm{Lie}(G)$ une structure de $G$-module, appelée « *l'action adjointe* » de $G$ sur $\mathrm{Lie}(G)$.

(ii) Il résulte de la définition que si $K$ est un corps contenant $k$ et $G_K = \mathrm{Spec}(A \otimes K)$, alors $\mathrm{Lie}(G_K)$ est le $K$-espace vectoriel $\mathrm{Lie}(G) \otimes K$. Donc : « *la formation de* $\mathrm{Lie}(G)$ *commute à l'extension des scalaires de* $k$ *à* $K$ ».

---

[(1)] Ceci équivaut à se donner l'élément de $X(k)$ donné par le morphisme $\mathrm{Spec}(k) = \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$.

(iii) Si $\pi : G \to H$ est un morphisme de $k$-schémas en groupes, l'application linéaire $d_e\pi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ est notée $\mathrm{Lie}(\pi)$ ; c'est un morphisme de $G$-modules. En effet, faisant agir $G$ sur $H$ par $g \cdot h = \pi(g)h\pi(g^{-1})$, le comorphisme $\pi^\sharp : k[H] \to k[G]$ est un morphisme de $G$-modules, ainsi que les applications linéaires induites entre $\mathfrak{m}_H$ et $\mathfrak{m}_G$, puis entre $\mathfrak{m}_H/\mathfrak{m}_H^2$ et $\mathfrak{m}_G/\mathfrak{m}_G^2$ et enfin entre $\mathrm{Lie}(G)$ et $\mathrm{Lie}(H)$.

On peut montrer, et l'on admettra, le résultat d'algèbre commutative suivant, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de $k$ :

***Théorème 11.3***. — (i) *On a toujours* $\dim \mathrm{Lie}(G) \geq \dim(G)$.

(ii) *L'égalité* $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim(G)$ *a lieu si et seulement si* $G$ *est* géométriquement réduit*, i.e. si* $G \times \overline{k} = \mathrm{Spec}(A \otimes \overline{k})$ *est réduit. Dans ce cas, on dit que* $G$ *est* lisse.

***Exemples 11.4***. — (1) Si $G = \mathbb{G}_{a,k}$ ou $\mathbb{G}_{m,k}$ alors $\mathrm{Lie}(G) = k$ et l'action adjointe est triviale, car $G$ est commutatif. De même si $G = \mathbb{G}_{a,k}^r \times \mathbb{G}_{m,k}^s$ alors $\mathrm{Lie}(G) = k^{r+s}$ avec action triviale de $G$.

(2) $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_{n,k}) = M_n(k)$ et l'action adjointe est l'action par conjugaison, i.e. pour tout $X \in M_n(k)$, toute $k$-algèbre $R$ et $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, on a dans $M_n(k) \otimes R = M_n(R)$ l'égalité :

$$g \cdot (X \otimes 1) = g(X \otimes 1)g^{-1}$$

(3) Supposons $\mathrm{car}(k) = p$ et $G = \alpha_{p,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/T^p)$. Alors $\mathrm{Lie}(G) = k$ avec action triviale de $G$. Noter qu'ici $\dim \mathrm{Lie}(G) = 1 > \dim(G) = 0$. Idem si $G = \mu_{p,k} = \mathrm{Spec}(k[T]/T^p - 1)$.

(3 bis) Soit $k$ un corps *non parfait*, par exemple $k = \mathbb{F}_p(T)$, et soit $t$ un élément de $k$ qui n'est pas une puissance $p$-ième, par exemple $t = T$. Soit $G$ le sous-groupe de $\mathbb{G}_{a,k}^2$ défini par l'équation $X^p = tY^p$, i.e. $G = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = k[X,Y]/X^p - tY^p)$. Soit $u$ une racine $p$-ième de $t$ dans $\overline{k}$, alors le polynôme $X^p - tY^p$ se factorise dans $\overline{k}[X,Y]$ en $(X - uY)^p$ et l'on en déduit qu'il est irréductible dans $k[X,Y]$. Donc $A$ est intègre, a fortiori réduite, mais $A \otimes \overline{k}$ n'est pas réduite. On voit par ailleurs que les images de $X$ et $Y$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ en forment une base, donc $\dim \mathrm{Lie}(G) = 2 > \dim(G) = 1$.

***Notation 11.5***. — Si $V$ est un $k$-espace vectoriel de dimension finie, on notera $\underline{V}$ le foncteur qui à toute $k$-algèbre $R$ associe $V \otimes R$. Il est représenté par le $k$-schéma $\mathrm{Spec}(S(V^*))$, que l'on désignera aussi par $V$.

**11.2. Deuxième définition.** — On note $\epsilon$ une variable de carré nul, i.e. pour toute $k$-algèbre $R$, $R[\epsilon]$ désigne $R[T]/(T^2)$. (Ne pas confondre cet $\epsilon$ avec l'augmentation $\varepsilon : A \to k$. Au tableau, on écrira $t$ au lieu de $\epsilon$). On va donner une seconde définiton de $\mathrm{Lie}(G)$.

***Définition 11.6* (λ-dérivations)**. — (i) Soient $B$ une $k$-algèbre de type fini, $\lambda : B \to k$ un morphisme de $k$-algèbres et $\mathfrak{m}$ son noyau, qui correspond à un point rationnel $x$ de $X = \mathrm{Spec}(B)$. Pour toute $k$-algèbre $R$, on note $\mathrm{Der}_\lambda(B, R)$ l'ensemble des applications $k$-linéaires $\delta : B \to R$ qui vérifient, pour tout $a, b \in B$ :

$$(*) \qquad \delta(ab) = \lambda(a)\delta(b) + \lambda(b)\delta(a).$$

Ceci entraîne, d'une part, que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ d'où $\delta(1) = 0$ et, d'autre part, que $\delta(\mathfrak{m}^2) = 0$. Réciproquement, pour tout $\xi \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, R)$ notons $\delta_\xi$ l'application linéaire $A \to R$ définie par $\delta_\xi(1) = 0$ et $\delta_\xi(a) = \xi(a \mod \mathfrak{m}^2)$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$. En utilisant que $a' = a - \lambda(a) \cdot 1$ est dans $\mathfrak{m}$, on voit sans difficulté que $\delta_\xi$ est une $\lambda$-dérivation, i.e. vérifie $(*)$. Désignant par $\mathrm{Der}_\lambda(B, R)$ l'ensemble de ces $\lambda$-dérivations, on a donc une identification canonique (fonctorielle en $R$) :

$$T_x X \otimes R = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, R) = \mathrm{Der}_\lambda(B, R).$$

(ii) Notons $p_R$ le morphisme de $R$-algèbres $R[\epsilon] \to R$ envoyant $\epsilon$ sur 0 et notons $\pi$ l'application $X(R[\epsilon]) \to X(R)$ définie par $g \mapsto p_R \circ g$ pour tout $g \in X(R[\epsilon])$. Alors, on a une bijection, fonctorielle en $R$ :

$$\mathrm{Der}_\lambda(B,R) = \{g \in X(R[\epsilon]) \mid \pi(g) = \lambda\}.$$

En effet, un élément du membre de droite est un morphisme de $k$-algèbres $g : B \to R \oplus R\epsilon$ de la forme $g(b) = \lambda(b) + \delta(b)\epsilon$, et la condition que $g$ soit un morphisme de $k$-algèbres s'écrit, pour tout $a, b \in B$ :

$$\lambda(ab) + \delta(ab)\epsilon = \big(\lambda(a) + \delta(a)\epsilon\big)\big(\lambda(b) + \delta(b)\epsilon\big) = \lambda(ab) + \big(\lambda(a)\delta(b) + \lambda(b)\delta(a)\big)\epsilon,$$

ce qui équivaut à la condition $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(B,R)$.

(iii) Revenons à notre $k$-algèbre de Hopf $A = k[G]$, munie de son augmentation $\varepsilon : A \to k$. Pour toute $k$-algèbre $R$, l'application $\pi : G(R[\epsilon]) \to G(R)$ est un morphisme de groupes, et comme l'élément neutre de $G(R)$ est $\varepsilon : A \to R$, on obtient que $\mathrm{Lie}(G)(R) = T_eG \otimes R$ s'identifie, comme ensemble, à :

$$\{g \in G(R[\epsilon]) \mid \pi(g) = e\} = \mathrm{Ker}\Big(G(R[\epsilon]) \to G(R)\Big).$$

De plus, d'après le lemme ci-dessous, cette identification respecte la structure de groupe, i.e. pour tout $x, y$ dans le $R$-module $T_eG \otimes R$, la somme $x + y$ correspond au produit des éléments correspondants de $G(R[\epsilon])$.

***Lemme 11.7***. — *(i) Pour tout $x \in \mathfrak{m}$, on a $\Delta(x) \equiv x \otimes 1 + 1 \otimes x \mod \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$.*

*(ii) Par conséquent, si $R$ est une $k$-algèbre et si $g = \varepsilon + \epsilon\delta$ et $g' = \varepsilon + \epsilon\delta'$ sont deux éléments de $\mathrm{Ker}\big(G(R[\epsilon]) \to G(R)\big)$ alors leur produit est l'élément $gg' = \varepsilon + \epsilon(\delta + \delta')$.*

*Démonstration*. — (i) Soit $x \in \mathfrak{m}$. Comme $A = k \cdot 1 \oplus \mathfrak{m}$ on peut écrire de façon unique

$$\Delta(x) = t \cdot (1 \otimes 1) + y \otimes 1 + 1 \otimes z + u$$

avec $t \in k$, $y, z \in \mathfrak{m}$ et $u \in \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$. Comme $x = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(x)$ on obtient $t = 0$ et $y = x = z$. Ceci prouve (i).

(ii) On a bien sûr $(gg')(1) = 1 = \varepsilon(1)$, et pour tout $x \in \mathfrak{m}$, notant $m_{R[\epsilon]}$ (resp. $m_R$) la multiplication de $R[\epsilon]$ (resp. $R$), on a :

$$(gg')(x) = m_{R[\epsilon]}(g \otimes g')\Delta(x) = \epsilon\delta(x) + \epsilon\delta'(x) + \epsilon^2 m_R(\delta \otimes \delta')(u)$$

et comme $\epsilon^2 = 0$ ceci égale $\epsilon(\delta + \delta')(x)$. □

***Définitions 11.8***. — (i) On définit le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ comme le sous-foncteur en groupes $R \mapsto \mathrm{Ker}\big(G(R[\epsilon]) \to G(R)\big)$ du foncteur en groupes $TG : R \mapsto G(R[\epsilon])$. D'après ce qui précède, il est représenté par le $k$-schéma $\mathrm{Spec}(S(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$, i.e. pour tout $R$ on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, R) \simeq \mathrm{Lie}(G) \otimes R.$$

C'est un sous-foncteur en groupes distingué de $TG$. Par ailleurs, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(G^0) = \underline{\mathrm{Lie}}(G)$ puisque $\mathrm{Lie}(G^0) = \mathrm{Lie}(G)$.

(ii) Pour tout morphisme de $k$-schémas en groupes $\phi : G \to H$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) \arrow[r] \arrow[d] & G(R[\epsilon]) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{R[\epsilon]}"'] & G(R) \arrow[d, "\phi_R"'] \\
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(H)(R) \arrow[r] & H(R[\epsilon]) \arrow[r] & H(R)
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que $\phi_{R[\epsilon]}$ induit un morphisme de groupes $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(R) \to \underline{\mathrm{Lie}}(H)(R)$, qu'on notera $\underline{\mathrm{Lie}}(\phi)(R)$. De plus, si $f : k[H] \to k[G]$ est le morphisme de $k$-algèbres de Hopf correspondant à $\phi$, on voit que si $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ est une $k$-base de $\mathrm{Lie}(G)$ alors

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G)(\phi)(R)(\varepsilon + \sum_i \delta_i \otimes r_i) = \varepsilon + \sum_i (\delta_i \circ f) \otimes r_i$$

donc $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(\phi)(R)$ est simplement l'application $R$-linéaire $\mathrm{Lie}(G) \otimes R \to \mathrm{Lie}(H) \otimes R$ induite par l'application linéaire $\mathrm{Lie}(\phi) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$.

(iii) La suite de foncteurs en groupes :

$$(\star) \qquad e \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G) \longrightarrow TG \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow e$$

où $\pi$ est induit par la projection $p_R : R[\epsilon] \to R$ envoyant $\epsilon$ sur 0, est **exacte**. En effet l'inclusion $i_R : R \hookrightarrow R[\epsilon]$ est une section de $p_R$ (i.e. $p_R \circ i_R = \mathrm{id}_R$), fonctorielle en $R$, donc induit par fonctorialité un scindage $i : G \hookrightarrow TG$ de $\pi$. Donc la suite est bien exacte, et de plus scindée, donc $TG$ est le *produit semi-direct* de $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ par $G$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'action « par conjugaison » de $G$ sur $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ ainsi obtenue coïncide avec la structure de $G$-module sur $\mathrm{Lie}(G)$ définie en 11.2

(iv) $TG$ est représentable par un $k$-schéma en groupes $\mathrm{Lie}(G) \rtimes G$, produit semi-direct de $\mathrm{Lie}(G)$ et $G$, et appelé le *fibré tangent de $G$*.

Tirons maintenant des conséquences de la définition précédente.

***Proposition 11.9.*** — *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de $k$-schémas en groupes et soit $H = \mathrm{Ker}(\phi)$. On a* $\boxed{\underline{\mathrm{Lie}}(H) = \mathrm{Ker}(\underline{\mathrm{Lie}}(\phi)).}$

*Démonstration.* — D'après ce qui précède, pour toute $k$-algèbre $R$, on a

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Lie}}(H)(R) &= \{g \in H(R[\epsilon]) \mid \pi(g) = e_{H(R)}\} \\ &= \{g \in G(R[\epsilon]) \mid \pi(g) = e_{G(R)} \text{ et } \phi(g) = e_{H(R[\epsilon])}\} = \mathrm{Ker}(\underline{\mathrm{Lie}}(\phi))(R)\end{aligned}$$

□

On utilisera plus bas le corollaire suivant. On rappelle qu'un $k$-schéma en groupes est dit *lisse* s'il est géométriquement réduit. Dans ce cas, on dira que c'est un « $k$-groupe algébrique lisse ».

***Corollaire 11.10.*** — *Soit $\phi : G \to G'$ un morphisme de $k$-groupes algébriques* lisses. *On suppose $G'$* connexe *et* $\mathrm{Lie}(\phi)$ surjective.

(i) *Alors on a $G' \simeq G/H$, où $H = \mathrm{Ker}(\phi)$.*

(ii) *D'autre part, $H$ est un $k$-groupe algébrique* lisse.

*Démonstration.* — Comme $G$ et $G'$ sont des $k$-groupes algébriques lisses, on sait que $\phi$ induit un isomorphisme de $G/H$ sur un sous-groupe fermé lisse $G''$ de $G'$. Il s'agit donc de montrer que $G'' = G'$. Comme $G'$ est irréductible, il suffit de montrer que $\dim(G'') \geq \dim(G')$. Or $\dim(G'') = \dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$ et, d'après le théorème 11.3 et l'hypothèse que $G$ est géométriquement réduit, on a :

$$(*) \qquad \dim(G) - \dim(H) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(H) \geq \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}),$$

où l'on a posé $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. Et, comme $\mathrm{Lie}(\phi) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}(G')$ est supposée surjective et que $\mathfrak{h}$ est son noyau, on a donc, en utilisant encore 11.3

$$\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{g}') = \dim(G').$$

Il en résulte que $\dim(G'') \geq \dim(G')$, d'où $G'' = G'$, ce qui prouve (i). Mais l'égalité $\dim(G'') = \dim(G')$ entraîne que l'inégalité dans $(*)$ est aussi une égalité, et donc $H$ est lisse, d'après 11.3 à nouveau. □

***Remarques 11.11***. — (1) Dans le corollaire précédent, il est nécessaire de supposer $G'$ connexe, car si $G'$ n'est pas connexe et $i$ désigne l'inclusion de $G = G'^0$ dans $G'$, alors $\mathrm{Lie}(i)$ est un isomorphisme, $\mathrm{Ker}(i) = \{e\}$ et $G' \not\simeq G$.

Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il est nécessaire de supposer $G$ lisse, car par exemple si $i$ est l'inclusion de $G = \alpha_{p,k}$ dans $G' = \mathbb{G}_{a,k}$, alors $\mathrm{Lie}(i)$ est un isomorphisme, $\mathrm{Ker}(i) = \{e\}$ et $G' \not\simeq G$.

Par contre, l'hypothèse que $G'$ soit lisse n'est pas indispensable et découle des hypothèses.

(2) Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il se peut aussi que $\phi$ soit la projection canonique de $G$ sur $G/H$ mais que $\mathrm{Lie}(\phi)$ ne soit pas surjective : c'est le cas par exemple pour $\phi : \mathbb{G}_{a,k} \to \mathbb{G}_{a,k}$, $x \mapsto x^p$, dont le noyau est $H = \alpha_{p,k}$. Dans ce cas, $\mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(G)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Lie}(\phi) = 0$.

***Définition 11.12*** **(Centralisateurs, normalisateurs et points fixes)**
Soient $G$ un $k$-schéma en groupes, $H$ un sous-schéma en groupes fermé de $G$.

(i) Le *centralisateur* $C_G(H)$ de $H$ dans $G$ est le sous-foncteur en groupes de $G$ défini par : pour toute $k$-algèbre $R$,

$$C_G(H)(R) = \left\{ g \in G(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour toute } R\text{-algèbre } R' \text{ et } h \in H(R'), \\ \text{on a } \; g_{R'} h\, g_{R'}^{-1} = h \end{array} \right\}$$

où $g_{R'}$ est l'image de $g$ dans $G(R')$, et le *normalisateur* de $H$ dans $G$ est défini par :

$$N_G(H)(R) = \left\{ g \in G(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour toute } R\text{-algèbre } R', \\ \text{on a } \; g_{R'} H(R')\, g_{R'}^{-1} = H(R') \end{array} \right\}$$

(ii) D'autre part, si $E$ est un foncteur sur lequel $H$ agit (i.e. pour toute $k$-algèbre $R$ on a une action de $H(R)$ sur $E(R)$, ceci de façon fonctorielle en $R$), on définit le sous-foncteur $E^H$ des *points fixes* (ou des *invariants*) par :

$$E^H(R) = \left\{ x \in E(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour toute } R\text{-algèbre } R' \text{ et } h \in H(R'), \\ \text{on a } \; h \cdot x_{R'} = x_{R'} \end{array} \right\}$$

où $x_{R'}$ désigne l'image de $x$ dans $E(R')$. Si $E$ est un foncteur en groupes et si $H$ y agit par automorphismes de groupe, alors $E^H$ est un sous-foncteur en groupes de $E$.

***Théorème 11.13*** **(Centralisateurs et normalisateurs)**. — *Soient $G$ un $k$-schéma en groupes et $H$ un sous-schéma en groupes fermé de $G$.*

(i) *$C_G(H)$ et $N_G(H)$ sont représentés par des sous-schémas en groupes fermés de $G$.*

(ii) *D'autre part, si $H$ agit par automorphismes de groupes sur un $k$-schéma en groupes $E$, alors $E^H$ est représenté par un sous-schéma en groupes fermé de $E$.*

(iii) *Si $H$ est lisse, on a :* [(2)]

$$C_G(H)(\overline{k}) = \{g \in G(\overline{k}) \mid \forall h \in H(\overline{k}), \quad gh = hg\}$$
$$N_G(H)(\overline{k}) = \{g \in G(\overline{k}) \mid gH(\overline{k})g^{-1} = H(\overline{k})\}$$
$$E^H(\overline{k}) = \{x \in E(\overline{k}) \mid \forall h \in H(\overline{k}), \quad h \cdot x = x\}$$

(iv) *Si $G$ est lisse et $H$ diagonalisable, alors $C_G(H)$ et $N_G(H)$ sont lisses.*

(v) *On a $\underline{\mathrm{Lie}}(C_G(H)) = \underline{\mathrm{Lie}}(G)^H = \underline{\mathrm{Lie}(G)^H}$.*

[(2)] Noter que le cas de $C_G(H)$ est un cas particulier de $E^H$, car si on fait agit $H$ sur $G$ par conjugaison, on a $G^H = C_G(H)$.

*Démonstration.* — On admet les points (i–iv). Prouvons (v). Appliquant la définition de $E^H$ à $E = \underline{\mathrm{Lie}}(G)$, sur lequel $G$ et donc $H$ agit par conjugaison, on obtient :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G)^H(R) = \left\{ g \in G(R[\epsilon]) \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi(g) = e \text{ et pour toute } R\text{-algèbre } R' \\ \text{et } h \in H(R'), \text{ on a } \; h \cdot g_{R'} = g_{R'} \end{array} \right\}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Lie}}(C_G(H))(R) &= \{g \in C_G(H)(R[\epsilon]) \mid \pi(g) = e\} \\ &= \left\{ g \in G(R[\epsilon]) \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi(g) = e \text{ et pour toute } R[\epsilon]\text{-algèbre } R' \\ \text{et } h \in H(R'), \text{ on a } \; h \cdot g_{R'} = g_{R'} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Or toute $R$-algèbre $R'$ est aussi une $R[\epsilon]$-algèbre via la projection $R[\epsilon] \to R$, donc l'inclusion $\underline{\mathrm{Lie}}(G)^H(R) \subset \underline{\mathrm{Lie}}(C_G(H))(R)$ est une égalité pour tout $R$. Ceci prouve la première égalité de (v).

La seconde est aussi un fait général. Notons $\pi$ la projection de $k[H]$ sur le quotient $C = k[H]/k1$. Si $V$ est un $H$-module, i.e. un $k[H]$-comodule, posons $\overline{\Delta}_V = (\mathrm{id}_V \otimes \pi) \circ \Delta_V$ ; alors on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow V^H \longrightarrow V \xrightarrow{\overline{\Delta}_V} V \otimes C$$

et pour toute $k$-algèbre $R$, la suite

$$0 \longrightarrow V^H \otimes R \longrightarrow V \otimes R \xrightarrow{\overline{\Delta}_V \otimes \mathrm{id}_R} V \otimes C \otimes R$$

est exacte (tout $k$-ev est un $k$-module libre donc plat), donc $V^H \otimes R$ est le noyau de l'application $R$-linéaire

$$\overline{\Delta}_{V \otimes R} : V \otimes \to V \otimes C \otimes R \simeq V \otimes R \otimes C$$

et il est clair que tout élément de ce noyau appartient à

$$\underline{V}^H(R) = \left\{ x \in V_R = V \otimes R \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour toute } R\text{-algèbre } R' \text{ et } h \in H(R'), \\ \text{on a } h(x \otimes 1) = x \otimes 1 \text{ dans } V_R \otimes_R R' = V \otimes R' \end{array} \right\}$$

Or, appliquant ceci à $R' = R \otimes k[H]$ et au morphisme de $k$-algèbres $h : k[H] \to R \otimes k[H]$, $\phi \mapsto 1 \otimes \phi$, on obtient qu'un tel $x$ vérifie $\Delta_{V \otimes R}(x) = x \otimes 1$, donc appartient au noyau de $\overline{\Delta}_{V \otimes R}$. Ceci prouve que $\underline{V}^H(R) = V^H \otimes R$, d'où la seconde égalité de (v). □

## 12. Tores maximaux et groupe de Weyl

On suppose $k = \overline{k}$ et « $k$-groupe algébrique » signifie : « $k$-groupe algébrique *lisse* ».

***Lemme 12.1.*** — *Soit $G$ un $k$-groupe algébrique.*

(i) *Soit $\Gamma$ un sous-groupe abstrait de $G(k)$ et $H$ son adhérence dans $G(k)$. Alors $H$ est un sous-groupe fermé de $G(k)$.*

(ii) *Soit $S$ un ensemble d'éléments semi-simples de $G(k)$ qui commutent, et $H$ le sous-groupe* fermé *engendré par $S$, i.e. l'adhérence du sous-groupe $\Gamma$ engendré par $S$. Alors $H$ est un $k$-groupe algébrique* diagonalisable.

*Démonstration.* — (i) Soit $g \in \Gamma$. Alors $g\Gamma \subset \Gamma \subset H(k)$ donc l'image inverse de $H(k)$ par l'application continue $x \mapsto gx$ contient $\Gamma$ donc $H(k)$. On a donc $\Gamma H(k) \subset H(k)$.

Soit alors $h \in H(k)$. Alors $\Gamma h \subset H(k)$ donc l'image inverse de $H(k)$ par l'application continue $x \mapsto xh$ contient $\Gamma$ donc $H(k)$. Donc $H(k)$ est stable par multiplication. De même, notons $\iota$ le morphisme $g \mapsto g^{-1}$. Alors $\iota(\Gamma) = \Gamma \subset H(k)$ donc, par continuité, $H(k)$ est stable par $\iota$. Ceci prouve que $H$ est un sous-groupe fermé de $G$.

(ii) On peut supposer que $G$ est un sous-groupe fermé d'un certain $\mathrm{GL}(V)$. Comme $S$ est une famille commutative d'éléments semi-simples de $\mathrm{GL}(V)$, il existe une base de $V$ formée de vecteurs propres communs. Identifiant $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_{n,k}$ au moyen de cette base, on obtient que $S$ est contenu dans le tore $T$ des matrices diagonales, donc il en est de même de $\Gamma$ et donc $H(k)$ est un sous-groupe fermé de $T(k)$, donc $H$ est diagonalisable. □

***Théorème 12.2*** **(Structure des groupes résolubles connexes)**
*Soit $G$ un $k$-groupe algébrique résoluble connexe.*

(i) *Il existe un tore $T$ de $G$ tel que le morphisme de $k$-groupes algébriques $T \hookrightarrow G \to G/G_u$ soit un isomorphisme.*

(ii) *Pour tout tel $T$, le morphisme de variétés $T \times G_u \to G$, $(t,u) \mapsto tu$ est un isomorphisme. En particulier, $G_u$ est connexe.*

(iii) *Deux tels tores sont conjugués par un élément de $G(k)$.*

(iv) *Tout sous-groupe fermé lisse diagonalisable $S$ de $G$ est contenu dans un tel tore.*

(iv bis) *Ces tores sont appelés les* tores maximaux *de $G$.*

(v) *Si $S$ est un sous-groupe fermé lisse diagonalisable de $G$, alors $C_G(S)$ est connexe et égal à $N_G(S)$.*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur $\dim(G)$. On sait déjà que le théorème est vrai si tout élément semi-simple de $G(k)$ est central. (Dans ce cas, tout $S$ comme en (v) est central donc $C_G(S) = G$.) On peut donc supposer qu'il existe un élément semi-simple $s$ non central; soit $S$ le sous-groupe diagonalisable qu'il engendre.

Alors, d'après le point (iii) du théorème 11.13, $H = C_G(S)^0$ est un sous-groupe algébrique (lisse!) de $G$, résoluble connexe et de dimension $< \dim(G)$.

Notons $D$ le quotient $G/G_u$, qui est un tore. Comme $G_u$ est lisse, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(G_u) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(D) \longrightarrow 0$$

et ce sont des $S$-modules pour l'action adjointe de $S$. Comme $S$ est diagonalisable et agit trivialement sur $D$ donc sur $\mathrm{Lie}(D)$, on obtient en prenant les $S$-invariants (i.e. les espaces de poids $\chi$ pour $\chi =$ le caractère trivial de $S$) la suite exacte ci-dessous :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(G_u)^S \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)^S \longrightarrow \mathrm{Lie}(D) \longrightarrow 0$$

Or, d'après le théorème 11.13, on a $\mathrm{Lie}(G)^S = \mathrm{Lie}(C_G(S)) = \mathrm{Lie}(H)$ et, de plus, $H$ est lisse. On déduit alors du corollaire 11.10 que le noyau $H \cap G_u$ de $H \to D = G/G_u$, est lisse, donc coïncide avec $H_u$, et que $D \simeq H/H_u$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe un tore $T$ de $H$ tel que le morphisme composé $T \hookrightarrow H \to H/H_u = G/G_u$ soit un isomorphisme. Ceci prouve (i).

Le point (ii) est clair. Prouvons (iii). Soit $T'$ un autre tel tore, alors $\dim(T') = \dim(D) = \dim(T)$. D'autre part, $T'$ agit à gauche sur la variété $G/T \simeq G_u$ et, d'après le th. 10.7, celle-ci est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, où $n = \dim(G_u)$. D'après la proposition 12.3 plus bas, il en résulte que $T'(k)$ possède un point fixe dans $(G/T)(k) = G(k)/T(k)$; il existe donc $g \in G(k)$ tel que $T'(k)g \subset T(k)$ d'où $T'(k) \subset gT(k)g^{-1}$. Comme $gTg^{-1}$ est irréductible et que le fermé $T'$ est de même dimension, il en résulte que $T' = gTg^{-1}$. Ceci prouve (iii).

Prouvons (iv) et (v) par récurrence sur $\dim(G)$. Observons d'abord que le morphisme composé $S(k) \to D(k) = G(k)/G_u(k)$ est injectif, d'après la décomposition de Jordan. Donc c'est OK si $S$ est central, car alors, d'une part, $C_G(D) = G$. D'autre part, le sous-groupe fermé $S'$ engendré par $D(k)$ et $T(k)$ est diagonalisable, et comme $S'(k) \to D(k)$ est injectif et que $T(k) \to D(k)$ est bijectif, on obtient $S'(k) = T(k)$ d'où $S \subset T$.

Donc on peut supposer que $H = C_G(S)^0$ est de dimension $< \dim(G)$. Par hypothèse de récurrence, $S$ est contenu dans un tore maximal de $T$ de $H$. Alors

$$C_G(S) = T \cdot G_u^S.$$

Or on peut montrer que $G_u^S$ est connexe ([DG, §IV.2.3, Cor. 3.10]), donc $C_G(S)$ est connexe. Ceci prouve (iv) et la première assertion de (v).

Enfin, soit $n \in N_G(S)(k)$ et $s \in S(k)$. Comme $G/G_u = D$ est abélien, alors $nsn^{-1}s^{-1}$ est un élément de $G_u(k)$ ; mais comme $nsn^{-1} \in S(k)$, c'est aussi un élément de $S(k)$ donc un élément semi-simple. On a donc $nsn^{-1}s^{-1} = e$ d'où $nsn^{-1} = s$. Ceci montre que $n \in C_G(S)(k)$, d'où $N_G(S) = C_G(S)$. □

***Proposition 12.3***. — *($k = \overline{k}$) Tout tore $T$ opérant sur un espace affine $\mathbb{A}_k^n$ y possède au moins un point fixe.*

*Démonstration.* — à ajouter ultérieurement, ou à faire en TD. □

On va déduire du théorème 12.2 un certain nombre de conséquences.

***Définition 12.4***. — Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe. Une *paire de Borel* est un couple $(T, B)$ formée d'un tore de $G$ qui est maximal pour l'inclusion (i.e. si $T \subset T'$ où $T'$ est un tore, alors $T = T'$) et où $B$ est un sous-groupe de Borel de $G$ contenant $T$.

Remarquons que tout tore, étant résoluble et connexe, est contenu dans un sous-groupe de Borel, donc tout tore maximal de $G$ fait partie d'une paire de Borel.

***Théorème 12.5* (Conjugaison des paires de Borel et des tores maximaux)**

*Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe.*

(i) *Toutes les paires de Borel de $G$ sont conjuguées sous $G(k)$.*

(ii) *En particulier, tous les tores maximaux de de $G$ sont conjugués.*

*Démonstration.* — Soient $(T, B)$ et $(T', B')$ deux paires de Borel. Comme tous les Borel sont conjugués, il existe $g \in G(k)$ tel que $B' = gBg^{-1}$. Alors $gT'g^{-1}$ et $T$ sont deux tores maximaux de $B$, donc il existe $b \in B(k)$ tel que $bgT'g^{-1}b^{-1} = T$. On a de plus $bgB'g^{-1}b^{-1} = bBb^{-1} = B$. Ceci prouve (i), et comme tout tore maximal fait partie d'une paire de Borel, (ii) en découle. □

On admet le théorème suivant. Pour la preuve, voir [Po, 15.33] ou [Bo], [Hu] ou [Sp].

***Théorème 12.6* (Union des sous-groupes de Borel)**. — *Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe. Alors $G$ est la réunion de ses sous-groupes de Borel.*

***Théorème 12.7* (Sous-groupes de Borel du centralisateur d'un tore)**

*Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe et $S$ un tore de $G$.*

(i) *Le centralisateur $C_G(S)$ est connexe.*

(ii) *Si $B$ est un Borel de $G$ contenant $S$, alors $B \cap C_G(S) = C_B(S)$ est un sous-groupe de Borel de $C_G(S)$.*

*Démonstration.* — (i) Soit $g \in C_G(S)(k)$. D'après le théorème 12.6, il existe un sous-groupe de Borel $B_0$ tel que $g \in B_0(k)$. Notons $\pi$ la projection $G \to G/B_0$, alors $g$ fixe le point $\pi(e)$ de $X = G/B_0$, donc la variété des points fixes

$$X^g(k) = \{x \in X(k) \mid gx = x\}$$

est non vide. C'est une sous-variété fermée de $G/B_0$, donc elle est projective. Comme $g$ commute à $S$, alors $X^g$ est stable par $S$, car pour tout $s \in S(k)$ et $x \in X^g(k)$ on a $gsx = sgx = sx$. Donc, d'après le théorème du point fixe de Borel, $S(k)$ possède un point fixe dans $X^g(k)$, donc il existe $g_1 \in G(k)$ tel que le point $g_1B_0(k)$ soit fixé par $g$ et par

$S$ ; alors $g$ et $S$ sont contenus dans le sous-groupe de Borel $B = g_1 B_0 g_1^{-1}$. Mais alors $g$ appartient à $B \cap C_G(S) = C_B(S)$ qui est connexe (d'après le théorème 12.2) donc contenu dans $C_G(S)^0$. Ceci prouve (i).

Esquissons la preuve de (ii). Comme $B' = B \cap C_G(S)$ égale $C_B(S)$ il est lisse, résoluble et connexe. Pour montrer que c'est un Borel de $C = C_G(S)$, il suffit de montrer que la variété $C/B'$ est projective. Notant $\pi$ la projection $G \to G/B$, on voit que $C/B'$ est isomorphe à la $C$-orbite du point $\pi(e)$. Or on peut montrer que cette orbite est fermée dans $G/B$, donc projective. (Voir [Po, 15.37] ou [Bo], [Hu] ou [Sp].) □

Le théorème suivant nous permettra de définir bientôt le groupe de Weyl d'un $k$-groupe algébrique réductif.

***Théorème 12.8*** **(Rigidité des tores).** — *Soit $S$ un tore de $G$. Alors $N_G(S)^0 = C_G(S)$.*

*Esquisse de démonstration.* — Posons $N = N_G(S)$, $H = N^0$ et $C = C_G(S)$. On a $S = \mathrm{Spec}(k\mathbb{Z}^d)$, où $d = \dim(S)$. D'après l'anti-équivalence de catégories entre les groupes abéliens et les $k$-schémas en groupes diagonalisables, le groupe des automorphismes de $S$ est le groupe abstrait $\Gamma = \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$.

Or, à tout groupe abstrait $\Gamma$, on peut associer un $k$-schéma discret $\underline{\Gamma}$ = réunion disjointe de copies de $\mathrm{Spec}(k)$ indexées par $\Gamma$, et où la loi de groupes est induite par celle de $\Gamma$. On peut montrer (voir en TD) que l'action de $N$ sur $S$ induit, pour toute $k$-algèbre $R$, un morphisme de groupes $N(R) \to \underline{\Gamma}(R)$ et d'après Yoneda ceci induit donc un morphisme de $k$-schémas en groupes $\phi : N \to \underline{\Gamma}$. Or l'espace topologique sous-jacent à $\underline{\Gamma}$ est discret, i.e. tout point est ouvert et fermé. Comme $H$ est connexe, on a nécessairement $\phi(H) = \{e\}$, donc l'action de $H$ sur $S$ est triviale, et donc l'inclusion $C_G(S) \subset H$ est une égalité.

On obtient de plus que le $k$-schéma en groupes $N/H$ est isomorphe à $\underline{W}$, pour un certain sous-groupe fini $W$ de $\Gamma$, ce qui prouve que $H$ est lisse, en admettant que $C_G(S)$ l'est. (Pour cela, voir [DG, §II.2, Th. 2.8].)

Si l'on admet que $H$ est lisse, on peut donner une autre démonstration de l'égalité $H = C_G(S)$, voir [Po, Th. 8.16] ou [Bo], [Hu] ou [Sp]. □

***Théorème 12.9*** **(Normalisateur d'un Borel ou parabolique)**
*Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe.*

(i) *Pour tout Borel $B$ de $G$, on a $N_G(B)(k) = B(k)$.*

(ii) *Un sous-groupe fermé lisse $P$ de $G$ est dit* parabolique *s'il contient un Borel. Dans ce cas, on a $N_G(P)(k) = P(k) = P^0(k)$.*

*Démonstration.* — On admet le point (i), voir [Po, Th. 15.39] ou [Bo], [Hu] ou [Sp]. Déduisons-en (ii). Supposons que $P$ contienne un Borel $B$, on a alors $B \subset P^0$. Soit $x \in N_G(P)(k)$, alors $xBx^{-1}$ est aussi un Borel de $P^0$ donc il existe $p \in P^0(k)$ tel que $pxBx^{-1}p^{-1} = B$, donc $px$ est un élément $b$ de $B(k)$ et donc $x = p^{-1}b$ appartient à $P^0(k)$. □

***Définition 12.10*** **(La variété des sous-groupes de Borel)**
Soit $G$ un $k$-groupe algébrique connexe. Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $G$. Alors $G(k)$ agit par conjugaison sur $\mathscr{B}$, et pour tout $B \in \mathscr{B}$, le stabilisateur de $B$ dans $G(k)$ est $N_G(B)(k) = B(k)$, donc $\mathscr{B}$ s'identifie à $(G/B)(k)$, ceci pour tout choix d'un Borel $B$. On dira que $\mathscr{B}$ est la variété des sous-groupes de Borel de $G$, et aussi la *variété des drapeaux* de $G$ ; c'est une variété projective.

Pour tout sous-ensemble $S$ de $G(k)$, on note $\mathscr{B}^S$ l'ensemble des points fixes de $S$ dans $\mathscr{B}$ ; c'est une sous-variété fermée de $\mathscr{B}$ (éventuellement vide), formée des sous-groupes de Borel $B$ qui contiennent $S$ (car un point $B$ de $\mathscr{B}$ est fixé par $S$ ssi $S$ est contenu dans $N_G(B)(k) = B(k)$).

***Théorème 12.11* (Sous-groupes de Cartan).** — *Soient $G$ un $k$-groupe algébrique connexe et $T$ un tore maximal. Alors $C = C_G(T)$ est appelé un* sous-groupe de Cartan.

(i) *$C$ est un $k$-groupe algébrique connexe et nilpotent.*

(ii) *Tout sous-groupe de Borel $B$ de $G$ contenant $T$ contient $C$.*

*Démonstration.* — (i) On sait déjà que $C = C_G(T)$ est lisse et connexe. Soit $B$ un sous-groupe de Borel de $C$. Alors $T$ est un tore maximal de $B$ central, donc en particulier distingué. Donc, d'après le théorème 12.2, $T$ contient tout élément semi-simple de $B$, donc ceux-ci sont centraux, donc $B$ est isomorphe à $T \times B_u$ et $B$ est nilpotent. D'après un exercice de la feuille de TD no. 3, ceci entraîne que $B = C$, donc $C$ est nilpotent (a fortiori résoluble).

(ii) Soit maintenant $B$ un sous-groupe de Borel de $G$. D'après le théorème 12.2, $B \cap C$ est un Borel de $C$, donc égal à $C$ puisque $C$ est résoluble connexe. Donc $C \subset B$. $\square$

***Définition 12.12* (Groupe de Weyl de $G$).** — Soient $G$ un $k$-groupe algébrique connexe et $T$ un tore maximal. On appelle groupe de Weyl de $G$ le groupe fini $W = W_G = N_G(T)/C_G(T)$. On le note parfois $W(G,T)$, mais comme tous les tores maximaux sont conjugués il ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de $T$.

***Proposition 12.13*.** — *Soient $G$ un $k$-groupe algébrique connexe, $\mathscr{B}$ sa variété des drapeaux et $T$ un tore maximal de $G$. Alors $W(G,T)$ agit de façon libre et transitive sur $\mathscr{B}^T$.*

*Démonstration.* — Posons $N = N_G(T)$ et $C = C_G(T)$. Si $B$ appartient à $\mathscr{B}^T$, i.e. si $B$ est un Borel contenant $T$, il en est de même de $n \cdot B = nBn^{-1}$ pour tout $n \in N(k)$. Ceci montre que l'action de $N(k)$ sur $\mathscr{B}$ laisse stable $\mathscr{B}^T$.

Fixons $B \in \mathscr{B}^T$. Son stabilisateur dans $N(k)$ est le groupe des $k$-points de $N \cap B = N_B(T)$. Or d'après le théorème 12.2, on a $N_B(T) = C_B(T) = C \cap B$, et ceci égale $C$ d'après le théorème précédent (car $C \subset B$). Le stabilisateur dans $N(k)$ de chaque $B \in \mathscr{B}^T$ est donc $C(k)$ et il en résulte que $W(G,T) = N(k)/C(k)$ agit sur $\mathscr{B}^T$ et y agit librement (i.e. avec des stabilisateurs triviaux).

Enfin, soit $B'$ un autre élément de $\mathscr{B}^T$. Comme les Borels sont conjugués, il existe $g \in G(k)$ tel que $B' = gBg^{-1}$. Alors $g^{-1}Tg$ et $T$ sont des tores maximaux de $B$ donc il existe $b \in B(k)$ tel que $g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$. Alors $gb^{-1}$ est un élément $n$ de $N(k)$, d'où $g = nb$ et donc $B' = nBn^{-1}$. Ceci montre que l'action de $N(k)$ sur $\mathscr{B}^T$ est transitive, et donc l'action induite de $W(G,T)$ l'est aussi. $\square$