

Chapitre 5 : Groupes réductifs, systèmes de racines et données radicielles

Références pour ce chapitre :

[Bo] Armand Borel, Linear algebraic groups (2nd enlarged edition), Springer-Verlag, 1991.

[Hu] James E. Humphreys, Linear algebraic groups (corrected 2nd printing), Springer-Verlag, 1981.

[Po] Patrick Polo, Cours de M2 à l'UPMC 2005-2006, disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/M2 (§§ 17 & 20-23)

[Sp] Tonny A. Springer, Linear algebraic groups (2nd edition), Birkhäuser, 1998.

13. Groupes réductifs ou semi-simples

Soit k un corps algébriquement clos, G un k -groupe algébrique connexe, \mathcal{B} la variété des sous-groupes de Borel de G . Si H est un k -groupe algébrique résoluble connexe, on rappelle que les éléments unipotents de $H(k)$ forment un sous-groupe fermé connexe distingué de H , noté H_u .

Définitions 13.1. — (1) L'intersection des $B(k)$, pour B décrivant \mathcal{B} , est un sous-groupe fermé lisse résoluble \mathcal{R} de G , *caractéristique* (i.e. invariant par tout automorphisme de G), et il en est de même de sa composante neutre \mathcal{R}^0 , qu'on note $R(G)$ et qu'on appelle le *radical* de G . On a donc $R(G) = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \right)^0$. On le notera aussi $\text{rad}(G)$. ⁽¹⁾

C'est le *plus grand sous-groupe fermé lisse résoluble connexe distingué* de G . En effet, soit S ayant ces propriétés; comme S est résoluble connexe, il est contenu dans un Borel B , et comme S est distingué, alors $S = gSg^{-1}$ est contenu dans gBg^{-1} pour tout $g \in G(k)$, donc $S \subset \mathcal{R}$, et comme S est connexe, on a $S \subset R(G)$.

(2) De même, l'intersection des $B_u(k)$, pour B décrivant \mathcal{B} , est un sous-groupe fermé lisse unipotent \mathcal{U} de G , *caractéristique*, et il en est de même de sa composante neutre \mathcal{U}^0 , qu'on note $R_u(G)$ et qu'on appelle le *radical unipotent* de G . On a donc $R_u(G) = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B_u \right)^0$.

C'est le *plus grand sous-groupe fermé lisse unipotent connexe distingué* de G . En effet, soit S ayant ces propriétés; comme S est connexe unipotent (en particulier, résoluble), il est contenu dans un Borel B et donc dans B_u , et comme S est distingué, alors $S = gSg^{-1}$ est contenu dans $gB_u g^{-1}$ pour tout $g \in G(k)$, donc $S \subset \mathcal{U}$, et comme S est connexe, on a $S \subset R_u(G)$. (Cet argument montre aussi que l'inclusion $R_u(G) \subset R(G)_u$ est une égalité.)

(3) G est dit **semi-simple** (resp. **réductif**) si $R(G) = \{e\}$ (resp. si $R_u(G) = \{e\}$). On a donc : « semi-simple \Rightarrow réductif ». La réciproque est évidemment fautive, car tout tore $T \neq \{e\}$ est un groupe réductif qui n'est pas semi-simple.

(4) Soit H un k -groupe algébrique *résoluble connexe*. Alors il résulte de la définition que $R_u(H) = H_u$. D'autre part, on a vu que $H \simeq H_u \rtimes T$, où T est un tore maximal. Il en résulte que si : *si H est connexe, résoluble et réductif, alors c'est un tore.*

Notation. — Comme $N_G(B) = B$ pour tout Borel de G , alors pour tout sous-groupe fermé S de G , la variété des points fixes \mathcal{B}^S est formée des sous-groupes de Borel qui contiennent S .

Définition 13.2. — Soit T un tore maximal de G .

⁽¹⁾Pour éviter une confusion avec le système de racines R d'un groupe réductif.

(i) On note $I(T) = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B \right)^0$. C'est un groupe résoluble connexe contenant T comme tore maximal, donc on a $I(T) \simeq I(T)_u \rtimes T$.

(ii) D'après le th. 12.11, on a $C_G(T) \subset I(T)$.

Le théorème fondamental suivant est dû à Chevalley (en 1956) mais, pour le distinguer des nombreux autres théorèmes de Chevalley, et comme Luna en a donné une démonstration plus courte (et plus conceptuelle) en 1999, nous l'appellerons « th. de Chevalley-Luna ».

Théorème 13.3. — *Si G est réductif alors $I(T)_u = \{e\}$ et donc $C_G(T) = T$.*

Démonstration. — Voir [Po, §17] ou l'article de Luna, cité dans *loc. cit.* □

Corollaire 13.4. — *Soit S un tore contenu dans T . Alors $C_G(S)$ est réductif.*

Démonstration. — D'après le th. 12.7, $C_G(S)$ est connexe et contenu dans tout Borel de G contenant S . Comme $\mathcal{B}^S \supset \mathcal{B}^T$ (i.e. tout Borel contenant T contient S) on a donc :

$$R_u(C_S(G)) \subset \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^S} B_u \right)^0 \subset \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}^T} B_u \right)^0 \subset I(T)_u$$

et comme $I(T)_u = \{e\}$ ceci montre que $C_G(S)$ est réductif. □

Considérons l'action adjointe de T sur $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Comme T est diagonalisable, on a

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\chi \in X(T)} \mathfrak{g}_\chi$$

où $\mathfrak{g}_\chi = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T(k), t \cdot X = \chi(t)X\}$. Comme $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$, l'ensemble

$$R = R(G, T) = \{\alpha \in X(T) - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

est *fini*.⁽²⁾ D'autre part, pour $\chi = 0$ on a, en combinant 11.13 (v) et 13.3 :

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^T = \text{Lie}(G)^T = \text{Lie}(C_G(T)) = \text{Lie}(T).$$

On posera $\text{Lie}(T) = \mathfrak{h}$.⁽³⁾ On peut donc écrire :

$$(*) \quad \boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha}$$

On veut maintenant montrer que R est un « système de racines » (voir plus bas) et que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in R$. Pour cela, fixons $\alpha \in R$. C'est un caractère $T \rightarrow \mathbb{G}_m$ non trivial donc $S_\alpha = (\text{Ker } \alpha)^0$ est un sous-tore de T de dimension $n - 1$, où $n = \dim(T)$. Posons $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$.

Proposition 13.5. — *On a :*⁽⁴⁾

$$(*) \quad \text{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\beta \in R \\ S_\alpha \subset \text{Ker}(\beta)}} \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R \cap \mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}_\beta$$

En particulier, $\text{Lie}(Z_\alpha)$ contient \mathfrak{g}_α donc Z_α n'est pas résoluble.

⁽²⁾ Anticipant sur ce qui va suivre, on l'appelle le « système de racines » de (G, T) .

⁽³⁾ C'est la notation introduite par Élie Cartan dans ses travaux sur les algèbres de Lie.

⁽⁴⁾ Comme $X(T) \simeq \mathbb{Z}^n$, il se plonge dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et donc on peut considérer dans V l'intersection $R \cap \mathbb{Q}\alpha$.

Démonstration. — Comme $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$ on a $\text{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{g}^{S_\alpha}$; c'est un sous- T -module de \mathfrak{g} donc c'est la somme directe des \mathfrak{g}_χ qu'il contient. Il contient bien sûr \mathfrak{h} . D'autre part, pour tout $\beta \in R$, $X \in \mathfrak{g}_\beta$ et $t \in S_\alpha(k)$, on a $t \cdot X = \beta(t)X$, donc $\mathfrak{g}_\beta \subset \text{Lie}(Z_\alpha)$ ssi $S_\alpha \subset \text{Ker}(\beta)$. Ceci prouve la 1ère égalité.

Prouvons la seconde. La suite exacte $1 \rightarrow S_\alpha \rightarrow T \rightarrow \bar{T} \rightarrow 1$, où $\bar{T} = T/S_\alpha$, induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\bar{T}) \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\pi} X(S_\alpha) \longrightarrow 0$$

et comme $X(T) \simeq \mathbb{Z}^n$ et $X(S_\alpha) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ (car ce sont des tores de dimension n et $n-1$) alors $X(\bar{T}) = \mathbb{Z}\delta$ pour un certain δ (unique à ± 1 près) et de plus cette suite exacte de \mathbb{Z} -modules est scindée, i.e. on a :

$$X(T) = \mathbb{Z}\delta \oplus \text{Ker}(\pi) \simeq \mathbb{Z}\delta \oplus X(\bar{T})$$

et donc δ fait partie d'une base $(\delta, e_2, \dots, e_n)$ du \mathbb{Z} -module libre $X(T)$. En se plaçant dans l'espace vectoriel $V = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on voit alors que $X(T) \cap \mathbb{Q}\delta = \mathbb{Z}\delta$ et donc $R \cap \mathbb{Q}\delta = R \cap \mathbb{Z}\delta$.

D'autre part, pour tout $\beta \in R$, on a :

$$\text{Ker}(\beta) \supset S_\alpha \iff \pi(\beta) = 0 \iff \beta \in R \cap \mathbb{Z}\delta.$$

Or $\text{Ker}(\alpha) \supset S_\alpha$ donc $\alpha = q\delta$ pour un certain entier $q \neq 0$ (car $\alpha \neq 0$). On a donc dans V l'égalité $\mathbb{Q}\alpha = \mathbb{Q}\delta$, d'où

$$R \cap \mathbb{Z}\delta = R \cap \mathbb{Q}\delta = R \cap \mathbb{Q}\alpha$$

ce qui prouve la 2ème égalité. (Comme on ne sait pas si $\alpha = \pm\delta$, noter que $\mathbb{Q}\alpha \cap X(T) = \mathbb{Z}\delta$ est a priori plus grand que $\mathbb{Z}\alpha$.)

En particulier, $\text{Lie}(Z_\alpha)$ contient \mathfrak{g}_α . Ceci entraîne que Z_α n'est *pas résoluble*. En effet, sinon Z_α serait connexe, réductif et résoluble, donc un tore (cf. 13.1 (4)), donc égal au tore maximal T et l'on aurait $\text{Lie}(Z_\alpha) = \mathfrak{h}$! \square

Terminologie 13.6. — Soit H un k -groupe algébrique connexe. La dimension d'un tore maximal de H (resp. d'un tore maximal de $H/R(H)$) s'appelle le *rang réductif* (resp. *rang semi-simple*) de H . On les notera $\text{rg-réd.}(H)$ et $\text{rg-ss.}(H)$.

Remarques 13.7. — (1) Supposons H de rang réductif 0 et soit B un sous-groupe de Borel de H . Alors $B = B_u$ donc B est nilpotent. D'après un résultat déjà utilisé, ceci entraîne que $H = B$, donc H est nilpotent.

(2) Posons $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$. Considérant la suite exacte :

$$1 \longrightarrow S_\alpha \longrightarrow Z_\alpha \xrightarrow{\pi} \bar{Z}_\alpha \longrightarrow 1$$

on voit que \bar{Z}_α est connexe, non résoluble (car sinon Z_α le serait aussi), et que $\bar{T} = T/S_\alpha$ en est un tore maximal (car si \bar{T} est contenu dans un tore T' alors $\pi^{-1}(T')$ est un groupe connexe, contenant T , commutatif et formé d'éléments semi-simples, donc un tore, donc égal à T). Comme $\dim(\bar{T}) = \dim(T) - \dim(S_\alpha) = 1$, on voit que \bar{Z}_α est justiciable du théorème suivant, que l'on admet :

Théorème 13.8. — *Soit H un k -groupe algébrique connexe, non résoluble, de rang réductif 1. Alors la variété des drapeaux de H est isomorphe à \mathbb{P}_k^1 et H est isomorphe soit à $\text{SL}_{2,k}$ soit à $\text{PGL}_{2,k}$.*

Démonstration. — Voir [Po, §20.1] ou [Bo, Hu, Sp]. \square

Avant de pouvoir tirer bénéfice de ce théorème en étudiant la « donnée radicielle » de $\text{SL}_{2,k}$ et de $\text{PGL}_{2,k}$, on a besoin de la :

Définition 13.9. — Soit T un tore (de dimension n). On note $X_*(T)$ l'ensemble des cocaractères de T , i.e. morphismes de k -groupes algébriques $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow T$. C'est un groupe abélien : la somme $\mu + \nu$ est le morphisme $t \mapsto \mu(t)\nu(t)$ et donc $-\mu$ désigne le morphisme $t \mapsto \mu(t)^{-1}$. On dit que c'est le *groupe des cocaractères* de T .

Remarquons que l'ensemble des morphismes de k -groupes algébriques $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ s'identifie au groupe abélien \mathbb{Z} , en identifiant l'entier r au morphisme $z \mapsto z^r$.

On a donc un accouplement naturel $X(T) \times X_*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à tout couple (χ, μ) associe l'entier r , noté $\langle \chi, \mu \rangle$, tel que le morphisme composé $\chi \circ \mu : \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ soit $z \mapsto z^r$.

Proposition 13.10. — (i) *L'accouplement $X(T) \times X_*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ est bilinéaire et parfait, i.e. il identifie $X(T)$ au \mathbb{Z} -dual $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*(T), \mathbb{Z})$ de $X_*(T)$ et vice-versa.*

(ii) *D'autre part, $W = W(G, T)$ agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$, et l'accouplement est W -invariant, i.e. pour tout $\chi \in X(T)$, $\mu \in X_*(T)$ et $w \in W$, on a $\langle w\chi, w\mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle$ ce qui équivaut à $\langle w\chi, \mu \rangle = \langle \chi, w^{-1}\mu \rangle$.*

Démonstration. — Choisissons un isomorphisme $T \simeq (\mathbb{G}_{m,k})^n$. Alors $X(T)$ s'identifie à \mathbb{Z}^n en notant $\chi_{(a_1, \dots, a_n)}$ le caractère $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$.

D'autre part, $X_*(T)$ s'identifie à \mathbb{Z}^n en notant $\mu_{(b_1, \dots, b_n)}$ le cocaractère $z \mapsto (z^{b_1}, \dots, z^{b_n})$. On voit alors que

$$\langle \chi_{(a_1, \dots, a_n)}, \mu_{(b_1, \dots, b_n)} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Ceci prouve (i).

D'autre part, le groupe Γ des automorphismes de T (isomorphe à $\text{Aut}(X(T))$) agit à gauche sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ par $\sigma \cdot \mu = \sigma \circ \mu$, resp. $\sigma \cdot \chi = \chi \circ \sigma^{-1}$, et l'on a donc

$$\langle \sigma \cdot \chi, \sigma \cdot \mu \rangle = \chi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \mu = \chi \circ \mu = \langle \chi, \mu \rangle.$$

Enfin, le morphisme de groupes $N_G(T) \rightarrow \Gamma$ a pour noyau $C_G(T) = T$, donc $W = W(G, T)$ s'identifie à un sous-groupe de Γ . La proposition est démontrée. \square

13.11 (Le cas de SL_2). — Soit $G = \text{SL}_{2,k} = \text{Spec}(A)$ où $A = k[a, b, c, d]/(ad - bc - 1)$ donc

$$\text{SL}_2(k) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(k) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

et donc, posant $k[\epsilon] = k[T]/(T^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Lie}(\text{SL}_2) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon a & \epsilon c \\ \epsilon b & 1 + \epsilon d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(k[\epsilon]) \mid 1 = 1 + \epsilon(a + d) \right\} \\ &\simeq \left\{ X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(k) \mid \text{Tr}(X) = 0 \right\} = \mathfrak{sl}_2. \end{aligned}$$

D'autre part, les matrices diagonales de $\text{SL}_{2,k}$ forment un tore T de dimension 1 et l'on a $X_*(T) = \mathbb{Z}\mu_0$ où μ_0 est l'isomorphisme $\mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{\sim} T$ donné par

$$\mu_0(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

et $X(T) \simeq \mathbb{Z}\omega$ où $\omega : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ est le caractère donné par $\omega(\mu_0(z)) = z$. (On a donc $\langle \omega, \mu_0 \rangle = 1$.) Posons $\alpha = 2\omega$, i.e. $\alpha(\mu_0(z)) = z^2$. On vérifie que le sous-groupe fermé U

(resp. U') de $\mathrm{SL}_{2,k}$ défini par les équations $a = d = 1$ et $b = 0$ (resp. $a = d = 1$ et $c = 0$), i.e. pour toute k -algèbre Λ ,

$$U(\Lambda) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Lambda) \right\} \quad U'(\Lambda) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Lambda) \right\}$$

est isomorphe à \mathbb{G}_a , normalisé par T , et a pour algèbre de Lie : $\mathrm{Lie}(U) = kE_{12}$, resp. $\mathrm{Lie}(U') = kE_{21}$, où E_{ij} désigne la matrice élémentaire ayant des 0 partout sauf un 1 à la place (i, j) . On vérifie de plus que pour tout $t \in T(k)$, on a $t \cdot E_{12} = \alpha(t)E_{12}$ et $t \cdot E_{21} = \alpha(t)^{-1}E_{21}$. Donc, posant $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T) = k(E_{11} - E_{22})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

On pose $U_\alpha = U$ et $U_{-\alpha} = U'$, de sorte qu'on a $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} = \mathrm{Lie}(U_{\pm\alpha})$.

Par ailleurs, $\mathrm{Aut}_{k\text{-gr. alg}}(T) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.}}(X(T)) \simeq \{\pm 1\}$, et $W = W(G, T)$ s'injecte dans ce groupe. Or l'élément

$$n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

normalise T : on a $n \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} n^{-1} = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ donc $W \neq \{e\}$ et l'élément non trivial de W , qu'on notera s , agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ par $s(\mu) = -\mu$ et $s(\chi) = -\chi$. Posons $\alpha^\vee = \mu_0$, c'est l'unique élément de $X_*(T) \simeq \mathbb{Z}$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; on l'appelle la *coracine* associée à α . Remarquons que la coracine associée à $-\alpha$ est $-\alpha^\vee$. Alors, pour tout $\mu \in X_*(T)$ et $\chi \in X(T)$, on a :

$$2\mu = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee \quad \text{et} \quad 2\chi = \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

et donc :

$$s(\mu) = \mu - 2\mu = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee \quad \text{et} \quad s(\chi) = \chi - 2\chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Et ici, $\alpha^\vee = \mu_0$ engendre $X_*(T)$ tandis que α égale 2 fois le générateur ω de $X(T)$.

13.12 (Le cas de PGL_2). — Posons $\overline{G} = \mathrm{PGL}_{2,k} = \mathrm{SL}_{2,k}/\mu_{2,k}$ et notons \overline{T} l'image de T dans \overline{G} . C'est un tore maximal de \overline{G} et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mu_{2,k} \longrightarrow T \xrightarrow{\pi} \overline{T} \longrightarrow 1$$

donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\overline{T}) \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donc $X(\overline{T})$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $X(T) = \mathbb{Z}\omega$; c'est donc le sous-groupe $\mathbb{Z}\alpha$.

Posons $\mathfrak{g}' = \mathfrak{pgl}_2 = \mathrm{Lie}(\overline{G})$ et $\mathfrak{h}' = \mathrm{Lie}(\overline{T})$.⁽⁵⁾ Comme chaque $U_{\pm\alpha}$ est unipotent, son intersection avec $\mu_{2,k}$ est triviale, donc la projection $\pi : G \rightarrow \overline{G}$ induit un isomorphisme de chaque $U_{\pm\alpha}$ sur son image, notée $\overline{U}_{\pm\alpha}$. De plus, comme $\mu_{2,k}$ agit trivialement sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ (car contenu dans le noyau de $\pm\alpha$), l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} se factorise en une action de \overline{G} , et l'on voit donc que \overline{T} agit sur chaque $\mathrm{Lie}(\overline{U}_{\pm\alpha})$ par le caractère $\pm\alpha$.

Donc \mathfrak{g}' contient les espaces de poids $\mathfrak{g}'_{\pm\alpha}$ et $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{h}'$ (qui sont en somme directe) et comme $\dim \mathfrak{g}' = 3$ car \overline{G} est lisse de dimension 3, on en déduit que

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}'_\alpha \oplus \mathfrak{g}'_{-\alpha}.$$

D'autre part, l'élément n de $G(k)$ agit non trivialement (via son image dans $\overline{G}(k)$) sur \overline{T} et donc $W = W(\overline{G}, \overline{T})$ est non trivial et son élément non trivial, noté encore s , agit par $-\mathrm{id}$ sur $X(\overline{T})$ et sur $X_*(\overline{T})$.

⁽⁵⁾On note $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ plutôt que $\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{h}}$ car si $\mathrm{car}(k) = 2$ les projections $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ne sont pas surjectives.

Enfin, reprenant le μ_0 de $\mathrm{SL}_{2,k}$, on a $\pi \circ \mu_0 \in X_*(\bar{T})$ et comme $\langle \alpha, \pi \circ \mu_0 \rangle = 2$ et que le couplage $X(\bar{T}) \times X_*(\bar{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est parfait, alors $\pi \circ \mu_0$ est égal à 2 fois un générateur μ'_0 de $X_*(\bar{T})$. On pose $\alpha^\vee = \pi \circ \mu_0$, c'est l'unique élément de $X_*(\bar{T}) \simeq \mathbb{Z}$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; on l'appelle la *coracine* associée à α . Remarquons que la coracine associée à $-\alpha$ est $-\alpha^\vee$.

On a alors, pour tout $\mu \in X_*(\bar{T})$ et $\chi \in X(\bar{T})$,

$$\mu = \langle \alpha, \mu \rangle \mu'_0 \quad \text{et donc} \quad 2\mu = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee$$

et

$$\chi = \langle \chi, \mu'_0 \rangle \alpha \quad \text{et donc} \quad 2\chi = \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

d'où :

$$s(\mu) = \mu - 2\mu = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee \quad \text{et} \quad s(\chi) = \chi - 2\chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

Mais ici, c'est α qui engendre $X(\bar{T})$ tandis que α^\vee égale 2 fois le générateur μ'_0 de $X_*(\bar{T})$.

On va obtenir un certain nombre de conséquences en comparant 13.5 (*) aux résultats de 13.11 et 13.12. « Rappelons » d'abord le lemme suivant (utilisé sans commentaire dans la démonstration de 12.2).

Lemme 13.13. — Soient G un k -groupe algébrique, H un sous-groupe fermé (i.e. un sous-schéma en groupes fermé réduit) de G , distingué. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Lie}(G/H) \longrightarrow 0$$

est exacte, donc $\mathrm{Lie}(G/H)$ s'identifie à $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. — Par hypothèse G est lisse, donc le quotient G/H l'est aussi. Donc

$$\dim \mathrm{Lie}(G/H) = \dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H) = \dim \mathrm{Lie}(G) - \dim(H).$$

De plus, comme H est réduit et $k = \bar{k}$, alors H est lisse, donc $\dim(H) = \dim \mathrm{Lie}(H)$. D'autre part, on sait que $\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Ker}(\pi)$, donc pour une raison de dimension π est surjective. \square

Appliquant ceci à $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$, et posant $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathrm{Lie}(S_\alpha)$, on obtient

$$\mathrm{Lie}(\bar{Z}_\alpha) = \mathrm{Lie}(Z_\alpha)/\mathrm{Lie}(S_\alpha) = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\beta \in R \cap \mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}_\beta,$$

où $\dim \bar{\mathfrak{h}} = 1$. De plus, S_α agit trivialement sur $\mathrm{Lie}(Z_\alpha)$ donc les β ci-dessus se factorisent par le quotient $\bar{T} = T/S_\alpha$ donc appartiennent au sous-groupe $X(\bar{T}) \subset X(T)$.

D'autre part, on a admis que \bar{Z}_α est isomorphe à $\mathrm{SL}_{2,k}$ ou bien à $\mathrm{PGL}_{2,k}$ et l'on a donc : $\mathrm{Lie}(\bar{Z}_\alpha) = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\dim(\mathfrak{g}_{\pm\alpha}) = 1$.

Conséquences 13.14. — (1) Pour tout $\alpha \in R$, on a $-\alpha \in R$ et $\dim(\mathfrak{g}_{\pm\alpha}) = 1$.

(2) De plus, les seuls multiples rationnels de α qui appartiennent à R sont $\pm\alpha$, i.e. si $\beta \in R$ et $\beta = q\alpha$ avec $q \in \mathbb{Q}$, alors $q = \pm 1$.

Remarque 13.15. — On a ainsi construit les « racines » $\pm\alpha \in X(T)$ en les faisant apparaître dans le sous-groupe $X(\bar{T})$ de $X(T)$, où $\bar{T} = T/S_\alpha$ est un quotient de T . On va construire les « coracines » $\alpha^\vee \in X_*(T)$ dans un certain sous-tore T_α de T . Introduisons pour cela la :

Définition 13.16 (Groupe dérivé). — Soit G un k -groupe algébrique connexe.

(i) Le sous-groupe fermé engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, pour $g, h \in G(k)$ est appelé le *groupe dérivé* de G et noté $\mathcal{D}(G)$; c'est un sous-groupe caractéristique.

(ii) On peut de plus montrer, et nous l'admettrons, que $\mathcal{D}(G)$ est **connexe**.

Proposition 13.17. — Soit G un k -groupe algébrique connexe réductif. Alors :

- (i) Le radical $\text{rad}(G)$ est un tore central S de G , qui est le plus grand tore central de G .
- (ii) $\mathcal{D}(G) \cap S$ est un groupe diagonalisable fini, i.e. un produit fini de groupes $\mu_{r,k}$.
- (iii) $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple, et l'on a $\text{rg-réd.}(\mathcal{D}(G)) \leq \text{rg-réd.}(G) - \dim(S)$.

Démonstration. — (i) $\text{rad}(G)$ est résoluble et connexe et $\text{rad}(G)_u = \{e\}$ puisque G est réductif, donc $\text{rad}(G)$ est un tore S . Il est normalisé par G donc, par le th. de rigidité des tores (12.8), il est central dans G . C'est le plus grand, car tout tore central est, a fortiori, distingué donc contenu dans $\text{rad}(G)$. Par ailleurs, S est contenu dans tout tore maximal T de G , car $S \subset C_G(T) = T$.

(ii) On peut considérer G comme sous-groupe fermé d'un certain $\text{GL}(V)$. Sous l'action de S , V se décompose en somme directe

$$V = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_r}$$

pour certains $\chi_i \in X(S)$ et, S étant central dans G , chaque $V_i = V_{\chi_i}$ est un sous- G -module (pour $v \in V_i$, $g \in G(k)$ et $s \in S(k)$, on a $sgv = gsv = \chi_i(s)gv$). Donc on a :

$$G \subset \text{GL}(V_1) \times \cdots \times \text{GL}(V_r) \quad \text{et} \quad S \subset \mathbb{G}_{m,k} \times \cdots \times \mathbb{G}_{m,k},$$

où dans le dernier produit, chaque $\mathbb{G}_{m,k}$ désigne le groupe des homothéties de $\text{GL}(V_i)$.

Or $\mathcal{D}(\text{GL}(V_i)) \subset \text{SL}(V_i)$ (et c'est en fait une égalité) donc on a

$$\mathcal{D}(G) \subset \text{SL}(V_1) \times \cdots \times \text{SL}(V_r) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(G) \cap S \subset \mu_{d_1,k} \times \cdots \times \mu_{d_r,k},$$

où $d_i = \dim(V_i)$. Posant $M = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, on obtient donc que $\mathcal{D}(G) \cap S$ est un sous-groupe fermé de $D_k(M)$, donc isomorphe à $D_k(\overline{M})$ pour un certain quotient \overline{M} de M . Ceci prouve (ii).

(iii) Soit \mathcal{R} le radical de $\mathcal{D}(G)$. Comme $\mathcal{D}(G)$ est *caractéristique* dans G , il en est de même de \mathcal{R} , donc \mathcal{R} est contenu dans $\text{rad}(G) = S$, donc dans $S \cap \mathcal{D}(G)$. Comme \mathcal{R} est lisse et connexe, ceci entraîne que $\mathcal{R} = \{e\}$, donc $\mathcal{D}(G)$ est semi-simple.

Soit T' un tore maximal de $\mathcal{D}(G)$, contenu dans un tore maximal T de G . D'une part, $\overline{T} = T/S$ est un tore maximal de \overline{G} , donc

$$\text{rg-réd.}(G/S) = \dim(T) - \dim(S) = \text{rg-réd.}(G) - \dim(S).$$

D'autre part, l'image $\overline{T'}$ de T' dans \overline{G} est de même dimension que T' , puisque $T' \cap S$ est de dimension 0. On a donc

$$\text{rg-réd.}(\mathcal{D}(G)) = \dim(T') = \dim(\overline{T'}) \leq \text{rg-réd.}(G/S) = \text{rg-réd.}(G) - \dim(S).$$

Ceci prouve (iii). ⁽⁶⁾ □

Conséquences 13.18. — Revenons à notre groupe réductif $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$ et posons $G_\alpha = \mathcal{D}(Z_\alpha)$. Comme $\overline{Z}_\alpha = Z_\alpha/S_\alpha$ est de rang réductif 1, ⁽⁷⁾ alors G_α est de rang réductif ≤ 1 , donc égal à 1 car G_α n'est pas nilpotent (car sinon Z_α serait résoluble).

Soit alors T_α un tore maximal (de dimension 1) de G_α contenu dans T (un tel tore existe, car les tores maximaux de G sont conjugués et $\mathcal{D}(G)$ est distingué dans G); notons \overline{T}_α son image dans \overline{Z}_α . Comme $\overline{T} = T/S_\alpha$ est de dimension 1, on a $\overline{T}_\alpha = \overline{T}$ et donc $\pm\alpha \in X(\overline{T})$ sont des caractères de \overline{T}_α donc de T_α .

De plus, l'égalité $\overline{T}_\alpha = \overline{T}$ entraîne que le morphisme de groupes $T_\alpha \times S_\alpha \rightarrow T$, $(t, s) \mapsto ts$ est surjectif, donc T est engendré par T_α et S_α .

⁽⁶⁾On verra plus loin que cette inégalité est en fait une égalité.

⁽⁷⁾Ceci entraîne, au passage, que l'inclusion $S_\alpha \subset \text{rad}(Z_\alpha)$ est une égalité.

D'autre part, G_α est connexe, non résoluble et de rang réductif 1, donc d'après le théorème 13.8, il est isomorphe à $\mathrm{SL}_{2,k}$ ou à $\mathrm{PGL}_{2,k}$. Il en résulte que

$$\mathrm{Lie}(G_\alpha) = \mathrm{Lie}(T_\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

et que G_α contient un sous-groupe U_α (resp. $U_{-\alpha}$) isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$, normalisé par T_α et dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{g}_α (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$).

De plus, d'après les résultats pour $\mathrm{SL}_{2,k}$ et $\mathrm{PGL}_{2,k}$, il existe un unique cocaractère α^\vee de T_α tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et un élément n de $G_\alpha(k)$ qui normalise T_α mais ne le centralise pas (donc qui induit sur T_α l'automorphisme non trivial $t \mapsto t^{-1}$). Comme T est engendré par T_α et le tore central S_α , on a donc $n \in N_G(T)(k)$. Notons s_α son image dans $W(G, T)$ et remarquons que l'action de s_α dans $X(T_\alpha)$ échange α et $-\alpha$.

Soit $\mu \in X_*(T)$. Alors le cocaractère $s_\alpha(\mu) - \mu : z \mapsto n\mu(z)n^{-1}\mu(z)^{-1}$ est à valeurs dans $\mathcal{D}(Z_\alpha) \cap T$; notons provisoirement H le sous-groupe fermé réduit de T engendré par $T(k) \cap G_\alpha(k)$, c'est un sous-groupe diagonalisable lisse de T , donc sa composante neutre H^0 est un tore. Or T_α est contenu dans H et donc dans H^0 , d'où $T_\alpha = H^0$.

Comme $\mathbb{G}_{m,k}$ est réduit et connexe, alors tout cocaractère $\mathbb{G}_{m,k} \rightarrow \mathcal{D}(Z_\alpha) \cap T$ se factorise par H et par $H^0 = T_\alpha$, donc $s_\alpha(\mu) - \mu$ est à valeurs dans T_α , donc comme $X_*(T_\alpha) = \mathbb{Z}\mu'_0$, il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que

$$s_\alpha(\mu) - \mu = -r\mu'_0,$$

où μ'_0 est le générateur de $X_*(T_\alpha)$ tel que $\langle \alpha, \mu'_0 \rangle$ soit > 0 . Comme le couplage est bilinéaire et W -invariant, on a

$$-r\langle \alpha, \mu'_0 \rangle = \langle s_\alpha(\alpha), \mu \rangle - \langle \alpha, \mu \rangle = -2\langle \alpha, \mu \rangle.$$

Or, pour $\mathrm{SL}_{2,k}$ on a $\alpha^\vee = \mu'_0$, d'où $r = \langle \alpha, \mu \rangle$ et

$$r\mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee,$$

tandis que pour $\mathrm{PGL}_{2,k}$ on a $\alpha^\vee = 2\mu'_0$, d'où $r = 2\langle \alpha, \mu \rangle$ et

$$r\mu'_0 = 2\langle \alpha, \mu \rangle \mu'_0 = \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee$$

à nouveau. On a donc dans tous les cas $\boxed{s_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \alpha^\vee}$.

Comme le couplage est W -invariant et bilinéaire on obtient, pour tout $\chi \in X(T)$ et $\mu \in X_*(T)$:

$$\langle s_\alpha \chi, \mu \rangle = \langle \chi, s_\alpha \mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle - \langle \alpha, \mu \rangle \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = \langle \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha, \mu \rangle$$

et comme le couplage est parfait ceci donne $\boxed{s_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha}$.

Notation. — On note R^\vee le sous-ensemble $\{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ de $X_*(T)$ et on l'appelle l'ensemble des *coracines* de (G, T) .

Remarque 13.19. — Rappelons (cf. la preuve de 13.10) que $N = N_G(T)$ agit sur $X_*(T)$ et sur $X(T)$ et que cette action se factorise par $W = W(G, T) = N/T$ (car T agit trivialement) : pour tout $w \in W$, notant n_w un élément de $N(k)$ dont l'image dans W est w , on a, pour tout $\mu \in X_*(T)$, $\chi \in X(T)$ et $t \in T(k)$:

$$(w \cdot \mu)(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} (n_w \cdot \mu)(t) = n_w \mu(t) n_w^{-1} \quad (w \cdot \chi)(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} (n_w \cdot \chi)(t) = \chi(n_w^{-1} \mu(t) n_w).$$

Revenant à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathfrak{g}_\beta$ de \mathfrak{g} en T -espaces de poids, on voit que les \mathfrak{g}_β sont permutés par l'action de $W = W(G, T)$: pour $w \in W$ et $n_w \in N(k)$ comme ci-dessus, et pour tout $\beta \in R$, $X \in \mathfrak{g}_\beta$ et $t \in T(k)$, on a :

$$t \cdot n_w \cdot X = n_w \cdot (n_w^{-1} t n_w) \cdot X = \beta(n_w^{-1} t n_w) n_w \cdot X = (w \cdot \beta) n_w \cdot X,$$

ce qui montre que $n_w(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{w(\beta)}$ et donc $n_w(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{w(\beta)}$. Pour tout $w \in W$, on a donc $w(R) \subset R$ et $w^{-1}(R) \subset R$ d'où $w(R) = R$.

De plus, comme $n_w(\alpha)$ est la racine $\beta = w(\alpha)$, alors $n_w G_\alpha n_w^{-1}$ égale G_β et donc s_β , qui est l'unique élément non trivial de $W(G_\beta, T)$, coïncide avec l'élément $n_w s_\alpha n_w^{-1}$, i.e. pour tout $\chi \in X(T)$ on a :

$$\chi - \langle \chi, \beta^\vee \rangle \beta = n_w s_\alpha n_w^{-1}(\chi) = n_w(w^{-1}\chi - \langle w^{-1}\chi, \alpha^\vee \rangle \alpha) = \chi - \langle \chi, w(\alpha^\vee) \rangle \beta$$

et donc $w(\alpha^\vee) = w(\alpha)^\vee$ d'où $w(R^\vee) = R^\vee$ pour tout $w \in W(G, T)$. En particulier, pour tout $\alpha \in R$, on a $s_\alpha(R) = R$ et $s_\alpha(R^\vee) = R^\vee$.

Lemme 13.20. — *L'application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ est bijective.*

Démonstration. — Par définition, elle est surjective donc il suffit de montrer qu'elle est injective. Supposons $\alpha^\vee = \beta^\vee$. Alors $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha = \beta - 2\alpha$ et de même $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\beta$. Alors on a :

$$\begin{aligned} s_\beta s_\alpha(\alpha) &= -s_\beta(\alpha) = 2\beta - \alpha = \alpha + 2(\beta - \alpha) \\ s_\beta s_\alpha(\beta) &= -\beta - 2(\alpha - 2\beta) = 3\beta - 2\alpha, \end{aligned}$$

et donc $s_\beta s_\alpha(\beta - \alpha) = 3\beta - 2\alpha - (2\beta - \alpha) = \beta - \alpha$. Donc, supposant avoir montré que $(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha)$, ce qui est le cas pour $n = 0, 1$, on obtient

$$(s_\beta s_\alpha)^{n+1}(\alpha) = \alpha + 2(\beta - \alpha) + 2n(\beta - \alpha) = \alpha + 2(n+1)(\beta - \alpha).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(s_\beta s_\alpha)^n(\alpha) = \alpha + 2n(\beta - \alpha)$ et ceci est un élément de R . Comme R est fini, ceci entraîne que $\beta - \alpha = 0$, d'où $\beta = \alpha$. \square

On en déduit le :

Théorème 13.21. — *Soit G un k -groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie ; considérons la décomposition de \mathfrak{g} en T -espaces de poids :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

(i) *Pour tout $\alpha \in R$, on a $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ et il existe un sous-groupe U_α de G , isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et normalisé par T , tel que $\text{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$.*

(ii) *Le quadruplet $(X(T), X_*(T), R, R^\vee)$ est une donnée radicielle réduite, au sens de la définition plus bas.*

(iii) *En particulier, R est un système de racines réduit dans le sous-espace vectoriel V de $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ qu'il engendre, et R^\vee est le système de racines dual dans V^* .*

Définitions 13.22 (Systèmes de racines et groupes de Weyl)

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel. On dit qu'une partie R de V est un *système de racines* si :

(i) R est fini, ne contient pas 0 et engendre V .

(ii) Pour tout $\alpha \in R$, il existe un élément α^\vee de V^* tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que l'involution s_α de V définie par $s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha$ laisse stable R .

(iii) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, on a $\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, les α^\vee sont uniquement déterminés et forment dans V^* un système de racines noté R^\vee et appelé le système de racines *dual*.

Le **groupe de Weyl** de R est le sous-groupe $W(R)$ de $\text{GL}(V)$ engendré par les s_α . L'isomorphisme canonique $\text{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \text{GL}(V^*)$, $g \mapsto {}^t g^{-1}$, envoie chaque s_α sur s_{α^\vee} et induit donc un isomorphisme canonique entre $W(R)$ et $W(R^\vee)$.

Enfin, R est dit *réduit* si pour $\alpha, \beta \in R$ l'égalité $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}\beta$ entraîne $\beta = \pm\alpha$.

Définition 13.23. — Une **donnée radicielle** est un quadruplet (M, M^\vee, R, R^\vee) où :

a) M et M^\vee sont deux \mathbb{Z} -modules libres de rang fini, en dualité par un couplage parfait $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) R et R^\vee sont des parties finies de M et M^\vee , en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ telle que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que les involutions s_α et s_{α^\vee} de M et M^\vee définies par :

$$s_\alpha(m) = m - \langle m, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad s_{\alpha^\vee}(m^\vee) = m^\vee - \langle \alpha, m^\vee \rangle \alpha^\vee$$

vérifient $s_\alpha(R) = R$ et $s_{\alpha^\vee}(R^\vee) = R^\vee$.

c) On dit que la donnée radicielle est **réduite** si elle vérifie de plus la condition suivante : si $\alpha, \beta \in R$ vérifient $\mathbb{Z}\alpha \cap \mathbb{Z}\beta \neq \{0\}$, alors $\beta = \pm\alpha$. Dans la suite, on ne considérera que des données radicielles et systèmes de racines *réduits* et l'on omettra l'adjectif « réduit(e) ».

Remarques 13.24. — 1) La condition $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ implique $\alpha \neq 0$, pour tout $\alpha \in R$.

2) Soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R . Alors R est un système de racines dans V , et R^\vee s'identifie au système de racines dual dans V^* .

Définitions 13.25. — Soit (M, M^\vee, R, R^\vee) une donnée radicielle.

(i) Elle est dite **semi-simple** si le sous-groupe $\mathbb{Z}R$ a même rang que M . On peut montrer que ceci a lieu si et seulement si $\mathbb{Z}R^\vee$ a même rang que M^\vee , donc cette condition est symétrique en R et R^\vee .

(ii) Elle est dite **adjointe** (resp. **simplettement connexe**) si $\mathbb{Z}R = M$ (resp. $\mathbb{Z}R^\vee = M^\vee$).

(iii) Il existe des données radicielles semi-simples qui ne sont ni adjointes ni simplettement connexes, par exemple celle de SO_{2n} , pour $n \geq 2$. D'autre part, il peut arriver qu'une donnée radicielle soit à la fois adjointe et simplettement connexe (il y a essentiellement trois cas, nommés G_2 , F_4 et E_8).

Remarque 13.26. — La terminologie provient du fait que si G est un \mathbb{C} -groupe algébrique réductif connexe et si $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, alors la donnée radicielle de G est :

(i) *adjointe* ssi G est isomorphe à son image par Ad dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

(ii) *simplettement connexe* ssi le groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ est simplettement connexe.

Exemples 13.27. — On a déjà vu les données radicielles de $\mathrm{SL}_{2,k}$ et de $\mathrm{PGL}_{2,k}$: la première est simplettement connexe, la seconde adjointe.

Donnons un exemple de donnée radicielle non semi-simple. Soit $G = \mathrm{GL}_{2,k}$ et T le tore des matrices diagonales. On a $X_*(T) = \mathbb{Z}\mu_1 \oplus \mathbb{Z}\mu_2$, où $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow T$ sont définis par

$$\mu_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

et $X(T) = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_2$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base duale de (μ_1, μ_2) , i.e. pour tout élément $t = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ on a $\varepsilon_1(t) = z_1$ et $\varepsilon_2(t) = z_2$. On a

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(T) \oplus kE_{12} \oplus kE_{21}$$

et pour tout t comme ci-dessus, on a $t \cdot E_{12} = z_1 z_2^{-1} E_{12} = \alpha(t) E_{12}$, où $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, et $t \cdot E_{21} = \alpha(t)^{-1} E_{21}$.

De plus, on a $\mathcal{D}(\mathrm{GL}_{2,k}) = \mathrm{SL}_{2,k}$ et $\alpha^\vee = \mu_1 - \mu_2$, i.e. pour toute k -algèbre Λ et $z \in \Lambda^\times$:

$$\alpha^\vee(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\Lambda).$$

(Pour les données radicielles de $\mathrm{SL}_{n,k}$, $\mathrm{PGL}_{n,k}$ et $\mathrm{GL}_{n,k}$, voir [Po, §18.4], [Sp, 7.4.7] ou le TD no. 5.)