Examen du 15 avril 2016 (durée 2h)

Documents autorisés : polycopiés du cours, notes de cours manuscrites Aucun appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les deux exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les suivantes.

On fixe un corps de base k et une clôture séparable k_s. La terminologie « une extension K/k » signifie que K est un sous-corps de k_s contenant k. Si G est un k-groupe algébrique et K/k une extension, $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(G_K)$ désigne le groupe des automorphismes du K-groupe algébrique $G_K = G \otimes K$. La notation I_n désigne la matrice identité de taille n. Dans l'exercice 1, R désignera une K-algèbre variable.

Exercice 1 **(k-formes de $\mathrm{GL}_{2,k}$).** — On rappelle que, pour toute extension K/k, on a la suite exacte :

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \mu_{2,K} \xrightarrow{i} Z \times \mathrm{SL}_{2,K} \longrightarrow \mathrm{GL}_{2,K} \longrightarrow 1,$$

où $Z \simeq \mathbb{G}_{m,K}$ est le centre de $\mathrm{GL}_{2,K}$ et $i(t)$ est le couple $(t^{-1}I_2, tI_2)$ pour toute K-algèbre R et $t \in \mu_2(R)$.

(1) En utilisant $(*)$, montrer que $\mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{GL}_{2,K}) \simeq \mathrm{Aut}_{K\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,K}) \times \{\pm 1\}$.

(2) Pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$, écrire la matrice $\tau(g) = \mathrm{dét}(g)g^{-1}$. En déduire que l'application $\alpha : g \mapsto g\,\mathrm{dét}(g^{-1})$ est un *automorphisme* du K-groupe $\mathrm{GL}_{2,K}$.

(3) Quelle est la restriction de α à $\mathrm{SL}_{2,K}$? Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(R)$, calculer $\mathrm{dét}(\alpha(g))$ puis $\alpha^2(g)$. Que peut-on en déduire ?

Pour la suite de l'exercice, on prend $k = \mathbb{R}$. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \tau\}$, où $\tau(z) = \overline{z}$. On pose $\mathscr{A}(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-gpe}}(\mathrm{SL}_{2,\mathbb{C}})$ et $\mathscr{A}'(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-gpe}}(\mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}})$.

(4) Déterminer l'action de Γ sur $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$.

(5) Montrer que se donner un 1-cocycle c de Γ à valeurs dans $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$) équivaut à se donner l'élément $c(\tau)$, qui doit vérifier une condition que l'on précisera.

(6) Déterminer à quelle condition deux cocycles c, c' à valeurs dans $\mathscr{A}'(\mathbb{C})$ sont équivalents. En déduire que $H^1(\Gamma, \mathscr{A}'(\mathbb{C})) \simeq H^1(\Gamma, \mathscr{A}(\mathbb{C})) \times H^1(\Gamma, \{\pm 1\})$.

Soit $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ le corps des quaternions. (On a $i^2 = -1 = j^2 = k^2$ et $ij = k = -ji$.)

(7) Montrer que $\mathbb{H}$ s'identifie à l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} z & -\overline{u} \\ u & \overline{z} \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$. Indication : considérer $\mathbb{H}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel à droite de base $(1, j)$ et faire agir $\mathbb{H}$ sur lui-même par multiplication à gauche.

(8) On note β l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$. Montrer que $\mathbb{H}^\times$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $\overline{A} = \gamma(A)$, pour un certain automorphisme γ de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ que l'on déterminera.

(9) En citant le cours, dire quelles sont les $\mathbb{R}$-formes H de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$. Pour chacune d'elles, donner un automorphisme γ_H de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{R}}$ tel que $H(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = \gamma_H(A)\}$.

(10) Déterminer les $\mathbb{R}$-formes G de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ en donnant pour chacune d'elles un automorphisme γ_G de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ tel que $G(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A} = \gamma_G(A)\}$.

(11) Déterminer le centre de chacune des $\mathbb{R}$-formes de $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$. **T.S.V.P →**

Exercice 2. — Soit Γ un groupe fini. Un Γ-groupe est un groupe G muni d'une action de Γ par automorphismes de groupe, i.e. $\gamma(g_1g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $g_1, g_2 \in G$. Dans ce cas, $G^\Gamma = \{g \in G \mid \forall\gamma \in \Gamma,\ \gamma(g) = g\}$ est un *sous-groupe* de G.

Dans le cas où $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/k)$ pour une extension galoisienne finie L/k, où $\mathbf{G}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n,k}$ et $G = \mathbf{G}(L)$, on a $G^\Gamma = \mathbf{G}(k)$ et on a défini en cours l'ensemble $Z^1(\Gamma, G)$ des cocycles à valeurs dans G, la notion de cocycles équivalents, et l'ensemble quotient $H^1(\Gamma, G)$. La définition pour des groupes « abstraits » Γ et G est identique. On rappelle que $H^1(\Gamma, G)$ est un ensemble *pointé*, i.e. il possède un point privilégié noté e qui est la classe du cocycle constant de valeur e, l'élément neutre de G.

On se donne une suite exacte de Γ-groupes :

$$(\star) \qquad 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \overline{G} \longrightarrow 1,$$

c.-à-d. c'est une suite exacte de groupes (H est distingué dans G et $\overline{G} = G/H$) et chacun des morphismes i et π est Γ-invariant, i.e. $i(\gamma(h)) = \gamma(i(h))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $h \in H$, et de même pour π. Le but de l'exercice est de montrer que l'on a une « *suite exacte d'ensembles pointés* » (en un sens précisé dans les questions qui suivent) :

$$(\dagger) \qquad 1 \longrightarrow H^\Gamma \xrightarrow{i'} G^\Gamma \xrightarrow{\pi'} \overline{G}^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, H) \xrightarrow{i''} H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\pi''} H^1(\Gamma, \overline{G}),$$

où i' (resp. i'') désigne la restriction de i à H^Γ (resp. l'application qui associe à la classe d'un cocycle $c : \Gamma \to H$ la classe du cocycle $i \circ c$) et où π' et π'' sont définis de même.

(1) Montrer que $1 \longrightarrow H^\Gamma \xrightarrow{i'} G^\Gamma \xrightarrow{\pi'} \overline{G}^\Gamma$ est une suite exacte de groupes.

(2) Pour tout $y \in \overline{G}^\Gamma$, on choisit $g \in G$ tel que $\pi(g) = y$.[1] Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose alors $c_g(\gamma) = g^{-1}\gamma(g)$. Montrer que c_g est un cocycle à valeurs dans H et que le choix d'un autre élément g' de $\pi^{-1}(y)$ donne un cocycle équivalent. On note alors $\delta(y)$ la classe du cocyle c_g dans $H^1(\Gamma, H)$.

(3) Montrer que $\delta^{-1}(e) = \pi'(G^\Gamma)$.

(4) Montrer que $i''^{-1}(e) = \delta(\overline{G}^\Gamma)$.

(5) Montrer que $\pi''^{-1}(e) = \mathrm{Im}(i'')$.

---

[1] C'est possible car π est surjectif, mais on ne sait pas *a priori* s'il existe un tel g dans G^Γ.